2012年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

数学（理科A卷）

本试卷共4页，21小题，满分150分．考试用时120分钟．

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，满分40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设i为虚数单位，则复数 $\dfrac{5-6i}{i}=$

A．$6+5i$　　B．$6-5i$　　C．$-6+5i$　　D．$-6-5i$

2．设集合 $\mathrm{U}=\{1,2,3,4,5,6\}$，$\mathrm{M}=\{1,2,4\}$ 则 $\complement_U \mathrm{M}=$

A．U　　B．$\{1,3,5\}$　　C．$\{3,5,6\}$　　D．$\{2,4,6\}$

3．若向量 $\overrightarrow{BA}=(2,3)$，$\overrightarrow{CA}=(4,7)$，则 $\overrightarrow{BC}=$

A．$(-2,-4)$　　B．$(3,4)$　　C．$(6,10)$　　D．$(-6,-10)$

4．下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上为增函数的是

A．$y=\ln(x+2)$　　B $y=-\sqrt{x+1}$　　C．$y=(\dfrac{1}{2})^x$　　D．$y=x+\dfrac{1}{x}$

5．已知变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} y\le 2 \\ x+y\ge 1 \\ x-y\le 1 \end{cases}$，则 $z=3x+y$ 的最大值为

A．12　B．11　C．3　D．-1

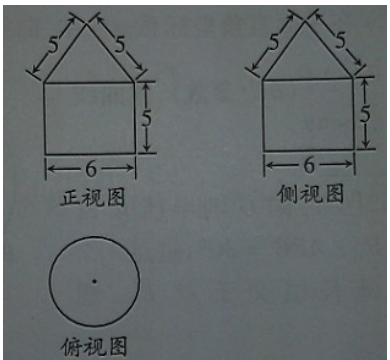

图 1

6．某几何体的三视图如图1所示，它的体积为

A．12π　B．45π　C．57π　D．81π

7．从个位数与十位数之和为奇数的两位数中任取一个，其中个位数为0的概率是

A．$\dfrac{4}{9}$　B．$\dfrac{1}{3}$　C．$\dfrac{2}{9}$　D．$\dfrac{1}{9}$

8．对任意两个非零的平面向量 α,β，定义 $\alpha\circ\beta=\dfrac{\alpha\cdot\beta}{\beta\cdot\beta}$．若平面向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|\ge|\vec{b}|>0$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，且 $\alpha\circ\beta$ 和 $\beta\circ\alpha$ 都在集合 $\left\{\dfrac{n}{2}\,|\,n\in Z\right\}$ 中，则 $\vec{a}\circ\vec{b}=$

A．$\dfrac{1}{2}$　B．1　C．$\dfrac{3}{2}$　D．$\dfrac{5}{2}$

二、填空题：本大题共7小题．考生作答6小题．每小题5分，满分30分．

（一）必做题（9～13题）

9．不等式$|x+2|-|x|\le 1$的解集为__________．

10．$(x^2+\frac{1}{x})^6$的展开式中x^3的系数为_________．（用数字作答）

11．已知递增的等差数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_3=a_2^{\ 2}-4$，则$a_n=$________．

12．曲线$y=x^3-x+3$在点$(1,3)$处的切线方程为__________．

13．执行如图2所示的程序框图，若输入n的值为8，则输出s的值为_______．

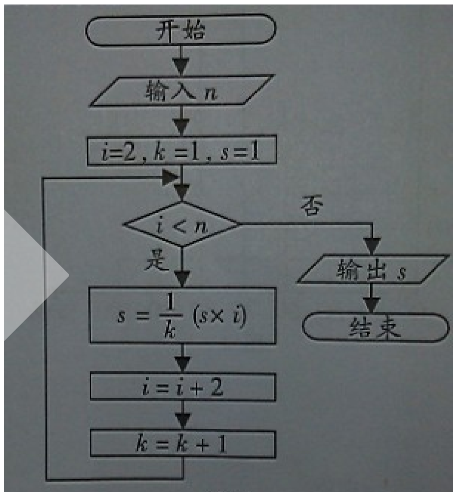

图 2

（二）选做题（14、15题，考生只能从中选做一题）

14．（坐标系与参数方程选做题）在平面直角坐标系中xoy中，曲线C_1和曲线C_2的参数方程分别为$\begin{cases}x=t\\ y=\sqrt{t}\end{cases}$（$t$为参数）和$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta\\ y=\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数），则曲线$C_1$和曲线$C_2$的交点坐标为_

．

15．（几何证明选讲选做题）如图3，圆O的半径为1，A，B，C是圆上三点，且满足$\angle ABC=30°$，过点A做圆O的切线与OC的延长线交与点P，则PA=____．

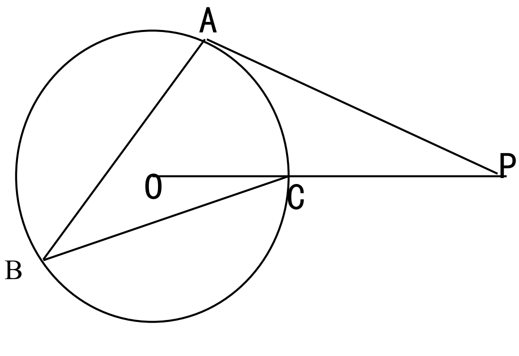

图3

三、解答题：本大题共6小题，满分80分．解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤．

16．（本小题满分12分）

已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\frac{\pi}{6})$（其中 $\omega>0,x\in R$）的最小正周期为 10π．

（1） 求 ω 的值；

（2） 设 $\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f(5\alpha+\frac{5\pi}{3})=-\frac{6}{5}$, $f(5\beta-\frac{5\pi}{6})=\frac{16}{17}$，求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值．

17．（本小题满分13分）

某班50位学生期中考试数学成绩的频率分布直方图如图4所示，其中成绩分组区间是：

[40,50), [50,60), [60,70), [70,80), [80,90), [90,100],

(1)求图中x的值;

(2)从成绩不低于80分的学生中随机选取2人，2人中成绩在90分以上（含90分）的人数记为 ξ，求 ξ 的数学期望．

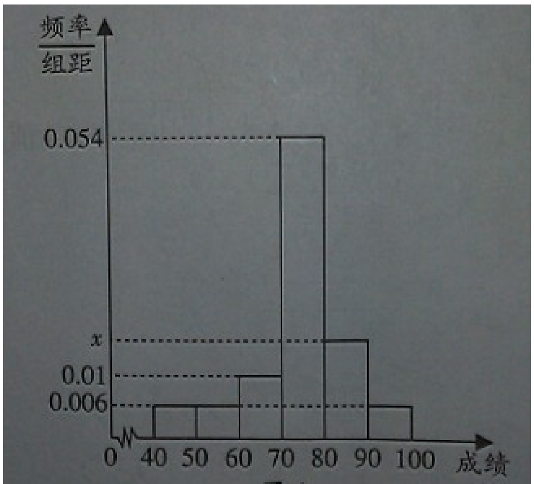

图 4

18．（本小题满分13分）

如图5所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，点 E 在线段 PC 上，$PC\perp$ 平面 BDE．

（1）证明：$BD\perp$ 平面 PAC；

（2）若 $PA=1$，$AD=2$，求二面角 $B-PC-A$ 的正切值．

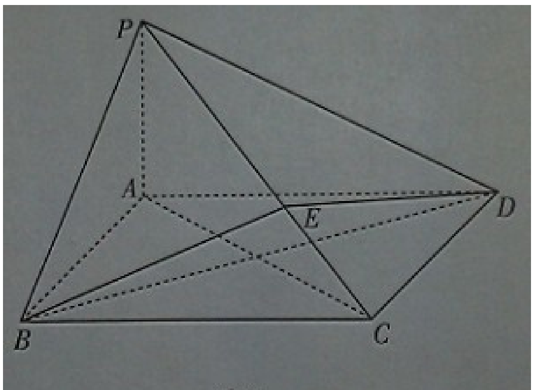

图 5

19．（本小题满分14分）

设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$2S_n=a_{n+1}-2^{n+1}+1$，$n\in N^*$，且a_1,a_2+5,a_3成等差数列.

（1）求a_1的值；

（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（3）证明：对一切正整数n，有$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{3}{2}$.

20．（本小题满分14分）

在平面直角坐标系xOy中，已知椭圆C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率$e=\sqrt{\frac{2}{3}}$，且椭圆$C$上的点到点$Q(0,2)$的距离的最大值为3.

（1） 求椭圆C的方程

（2） 在椭圆C上，是否存在点$M(m,n)$，使得直线$l:mx+ny=1$与圆$O:x^2+y^2=1$相交于不同的两点A、B，且ΔOAB的面积最大？若存在，求出点M的坐标及对应的ΔOAB的面积；若不存在，请说明理由.

）

21．（本小题满分14分）

设$a<1$，集合$A=\{x\in R|x>0\},B=\{x\in R|2x^2-3(1+a)x+6a>0\}$，$D=A\cap B$.

（1） 求集合D（用区间表示）；

（2） 求函数$f(x)=2x^3-3(1+a)x^2+6ax$在D内的极值点.

2012广东高考数学（理科）参考答案

选择题答案：1-8： DCAAB CDC

填空题答案：

9. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$　10. 20　11. $2n-1$　12. $y=2x+1$

13. 8　14. $(1,1)$　15. $\sqrt{3}$

解答题

16.

（1）$\omega=\dfrac{1}{5}$

（2）代入得 $2\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{6}{5}\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$

$$2\cos\beta=\frac{16}{17}\Rightarrow\cos\beta=\frac{8}{17}$$

$\because\ \alpha,\beta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

$\therefore\ \cos\alpha=\dfrac{4}{5},\sin\beta=\dfrac{15}{17}$

$\therefore\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{8}{17}-\dfrac{3}{5}\times\dfrac{15}{17}=-\dfrac{13}{85}$

17.

（1）由 $30\times0.006+10\times0.01+10\times0.054+10x=1$ 得 $x=0.018$

（2）由题意知道：不低于80分的学生有12人，90分以上的学生有3人

随机变量 ξ 的可能取值有0,1,2

$$P(\xi=0)=\frac{C_9^2}{C_{12}^2}=\frac{6}{11}$$

$$P(\xi=1)=\frac{C_9^1C_3^1}{C_{12}^2}=\frac{9}{22}$$

$$P(\xi=2)=\frac{C_3^2}{C_{12}^2}=\frac{1}{22}$$

$\therefore\ E\xi=0\times\dfrac{6}{11}+1\times\dfrac{9}{22}+2\times\dfrac{1}{22}=\dfrac{1}{2}$

18.

（1）$\because\ PA\perp$ 平面 $ABCD$

$\therefore\ PA\perp BD$

$\because$ $PC\perp$平面BDE

$\therefore$ $PC\perp BD$

$\therefore$ $BD\perp$平面PAC

（2）设AC与BD交点为O，连OE

$\because$ $PC\perp$平面BDE

$\therefore$ $PC\perp OE$

又$\because$ $BO\perp$平面PAC

$\therefore$ $PC\perp BO$

$\therefore$ $PC\perp$平面BOE

$\therefore$ $PC\perp BE$

$\therefore$ $\angle BEO$为二面角$B-PC-A$的平面角

$\because$ $BD\perp$平面PAC

$\therefore$ $BD\perp AC$

$\therefore$ 四边形$ABCD$为正方形

$\therefore$ $BO=\sqrt{2}$

在ΔPAC中，$\dfrac{OE}{OC}=\dfrac{PA}{AC}\Rightarrow\dfrac{OE}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow OE=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore$ $\tan\angle BEO=\dfrac{BO}{OE}=3$

$\therefore$ 二面角$B-PC-A$的平面角的正切值为3

19.

（1）在$2S_n=a_{n+1}-2^{n+1}+1$中

令$n=1$得：$2S_1=a_2-2^2+1$

令$n=2$得：$2S_2=a_3-2^3+1$

解得：$a_2=2a_1+3$，$a_3=6a_1+13$

又$2\left(a_2+5\right)=a_1+a_3$

解得$a_1=1$

（2）由$2S_n=a_{n+1}-2^{n+1}+1$

$2S_{n+1}=a_{n+2}-2^{n+2}+1$得

$a_{n+2}=3a_{n+1}+2^{n+1}$

又$a_1=1, a_2=5$也满足$a_2=3a_1+2^1$

所以$a_{n+1}=3a_n+2^n$对$n\in N^*$成立

$\therefore\ a_{n+1}+2^{n+1}=3\left(a_n+2^n\right)$

$\therefore\ a_n+2^n=3^n$

$\therefore\ a_n=3^n-2^n$

（3）

（法一）$\because a_n=3^n-2^n=(3-2)\left(3^{n-1}+3^{n-2}\times 2+3^{n-3}\times 2^2+\ldots+2^{n-1}\right)\geq 3^{n-1}$

$\therefore\ \frac{1}{a_n}\leq\frac{1}{3^{n-1}}$

$$\therefore \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots\frac{1}{a_n}\leq 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{1\times\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}}<\frac{3}{2}$$

（法二）$\because a_{n+1}=3^{n+1}-2^{n+1}>2\times 3^n-2^{n+1}=2a_n$

$\therefore\ \frac{1}{a_{n+1}}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_n}$

当$n\geq 2$时，$\frac{1}{a_3}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_2}$

$\frac{1}{a_4}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_3}$

$\frac{1}{a_5}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_4}$

………

$\frac{1}{a_n}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_{n-1}}$

累乘得：$\frac{1}{a_n}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{a_2}$

$\therefore \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots\frac{1}{a_n}\le 1+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\times\frac{1}{5}<\frac{7}{5}<\frac{3}{2}$

20.

（1）由 $e=\sqrt{\frac{2}{3}}$ 得 $a^2=3b^2$，椭圆方程为 $x^2+3y^2=3b^2$

椭圆上的点到点Q的距离 $d=\sqrt{x^2+\left(y-2\right)^2}=\sqrt{3b^2-3y^2+\left(y-2\right)^2}$

$$=\sqrt{-2y^2-4y+4+3b^2}\left(-b\le y\le b\right)$$

当① $-b\le -1$ 即 $b\ge 1, d_{\max}=\sqrt{6+3b^2}=3$ 得 $b=1$

当② $-b>-1$ 即 $b<1, d_{\max}=\sqrt{b^2+4b+4}=3$ 得 $b=1$（舍）

$\therefore\ b=1$

$\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$

（2）$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\left|OA\right|\cdot\left|OB\right|\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\sin\angle AOB$

当 $\angle AOB=90^\circ$，$S_{\Delta AOB}$ 取最大值 $\frac{1}{2}$，

点O到直线 l 距离 $d=\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore m^2+n^2=2$

又 $\because \frac{m^2}{3}+n^2=1$

解得：$m^2=\frac{3}{2},n^2=\frac{1}{2}$

所以点M的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ΔAOB 的面积为 $\frac{1}{2}$

21.

（1）记 $h\left(x\right)=2x^2-3\left(1+a\right)x+6a\left(a<1\right)$

$\Delta=9\left(1+a\right)^2-48a=\left(3a-1\right)\left(3a-9\right)$

① 当 $\Delta<0$，即 $\frac{1}{3}<a<1$，$D=\left(0,+\infty\right)$

② 当$0<a\le\dfrac{1}{3}$，

$$D=\left(0,\frac{3+3a-\sqrt{9a^2-30a+9}}{4}\right)\cup\left(\frac{3+3a+\sqrt{9a^2-30a+9}}{4},+\infty\right)$$

③ 当$a\le 0$，$D=\left(\dfrac{3+3a+\sqrt{9a^2-30a+9}}{4},+\infty\right)$

（2）由$f'(x)=6x^2-6(1+a)x+6a=0$得x=1，a得

① 当$\dfrac{1}{3}<a<1$，$f(x)$在D内有一个极大值点a，有一个极小值点1

② 当$0<a\le\dfrac{1}{3}$，$\because h(1)=2-3(1+a)+6a=3a-1\le 0$

$$h(a)=2a^2-3(1+a)a+6a=3a-a^2>0$$

$\therefore$ $1\notin D,a\in D$

$\therefore$ $f(x)$在D内有一个极大值点a

③ 当$a\le 0$，则$a\notin D$

又$\because h(1)=2-3(1+a)+6a=3a-1<0$

$\therefore$ $f(x)$在D内有无极值点