

2022年上海市高考数学试卷

一、填空题（本大题共有12题，满分54分，第1~6题每题4分，第7~12题每题5分）

1. 双曲线 $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$ 的实轴长为 .

2. 函数 $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + 1$ 的周期为 .

3. 已知 $a \in R$ ，行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ 的值与行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ 的值相等，则 $a =$.

4. 已知圆柱的高为4，底面积为 9π ，则圆柱的侧面积为 .

5. $x - y \leq 0$ ， $x + y - 1 \geq 0$ ，求 $z = x + 2y$ 的最小值 .

6. 二项式 $(3 + x)^n$ 的展开式中， x^2 项的系数是常数项的5倍，则 $n =$.

7. 若函数 $f(x) = \begin{cases} a^2x - 1 & x < 0 \\ x + a & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ，为奇函数，求参数 a 的值为 .

8. 为了检测学生的身体素质指标，从游泳类1项，球类3项，田径类4项共8项项目中随机抽取4项进行检测，则每一类都被抽到的概率为 .

9. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为零， S_n 为其前 n 项和，若 $S_5 = 0$ ，则 $S_i (i = 0, 1, 2, \dots, 100)$ 中不同的数值有 个.

10. 若平面向量 $\begin{vmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{vmatrix} = \lambda$ ，且满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ， $\vec{a} \cdot \vec{c} = 2$ ， $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1$ ，则 $\lambda =$.

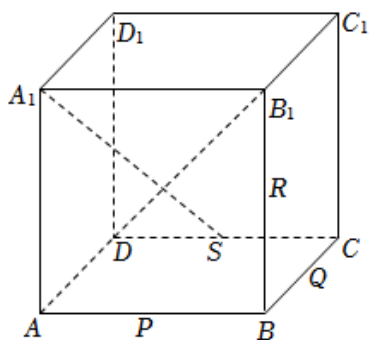
11. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f\left(\frac{1}{1+x}\right)$ 对任意 $x \in [0, +\infty)$ 都成立，其值域是 A_f ，已知对任何满足上述条件的 $f(x)$ 都有 $\{y | y = f(x), 0 \leq x \leq a\} = A_f$ ，则 a 的取值范围为 .

二、选择题（本题共有4题，满分20分，每题5分）每题有且只有一个正确选项.

1. 若集合 $A = [-1, 2)$ ， $B = Z$ ，则 $A \cap B =$ ()
 A. $\{-2, -1, 0, 1\}$ B. $\{-1, 0, 1\}$ C. $\{-1, 0\}$ D. $\{-1\}$

2. 若实数 a, b 满足 $a > b > 0$ ，下列不等式中恒成立的是 ()
 A. $a + b > 2\sqrt{ab}$ B. $a + b < 2\sqrt{ab}$ C. $\frac{a}{2} + 2b > 2\sqrt{ab}$ D. $\frac{a}{2} + 2b < 2\sqrt{ab}$

3. 如图正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， P, Q, R, S 分别为棱 AB, BC, BB_1, CD 的中点，联结 A_1S, B_1D . 空间任意两点 M, N ，若线段 MN 上不存在点在线段 A_1S, B_1D 上，则称 MN 两点可视，则下列选项中与点 D_1 可视的为 ()



A.点P B.点B C.点R D.点Q

4. 设集合 $\Omega = \{(x,y) | (x-k)^2 + (y-k^2)^2 = 4 |k|, k \in \mathbb{Z}\}$

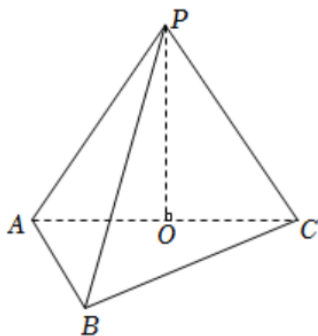
①存在直线 l , 使得集合 Ω 中不存在点在 l 上, 而存在点在 l 两侧;

②存在直线 l , 使得集合 Ω 中存在无数点在 l 上; ()

- A.①成立②成立 B.①成立②不成立
C.①不成立②成立 D.①不成立②不成立

三、解答题 (本大题共有 5 题, 满分 76 分).

1. 如图所示三棱锥, 底面为等边 $\triangle ABC$, O 为 AC 边中点, 且 $PO \perp$ 底面 ABC , $AP = AC = 2$.



支点
物理
曹亚辉高中物理
www.zhidianwuli.com

(1) 求三棱锥体积 V_{P-ABC} ;

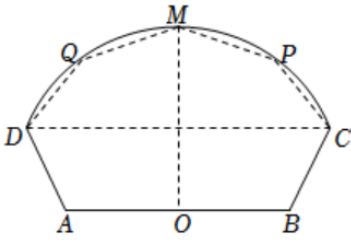
(2) 若 M 为 BC 中点, 求 PM 与面 PAC 所成角大小.

2. $f(x) = \log_3(a+x) + \log_3(6-x)$.

(1) 若将函数 $f(x)$ 图像向下移 $m(m > 0)$ 后, 图像经过 $(3,0)$, $(5,0)$, 求实数 a , m 的值.

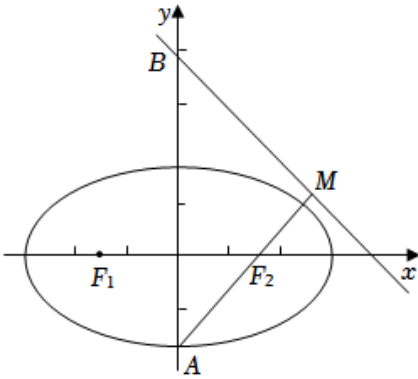
(2) 若 $a > -3$ 且 $a \neq 0$, 求解不等式 $f(x) \leq f(6-x)$.

3. 如图, 在同一平面上, $AD = BC = 6$, $AB = 20$, O 为 AB 中点, 曲线 CD 上任一点到 O 距离相等, $\angle DAB = \angle ABC = 120^\circ$, P, Q 关于 OM 对称, $MO \perp AB$;



- (1) 若点 P 与点 C 重合, 求 $\angle POB$ 的大小;
- (2) P 在何位置, 求五边形 $MQABP$ 面积 S 的最大值.

4. 设有椭圆方程 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 直线 $l: x + y - 4\sqrt{2} = 0$, Γ 下端点为 A , M 在 l 上, 左、右焦点分别为 $F_1(-\sqrt{2}, 0)$ 、 $F_2(\sqrt{2}, 0)$.



- (1) $a=2$, AM 中点在 x 轴上, 求点 M 的坐标;
- (2) 直线 l 与 y 轴交于 B , 直线 AM 经过右焦点 F_2 , 在 $\triangle ABM$ 中有一内角余弦值为 $\frac{3}{5}$, 求 b ;
- (3) 在椭圆 Γ 上存在一点 P 到 l 距离为 d , 使 $|PF_1| + |PF_2| + d = 6$, 随 a 的变化, 求 d 的最小值.

5. 数列 $\{a_n\}$ 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 且 $n \geq 2$, 均存在正整数 $i \in [1, n-1]$, 满 $a_{n+1} = 2a_n - a_i$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$.

- (1) 求 a_4 可能值;
- (2) 命题 p : 若 a_1, a_2, \dots, a_8 成等差数列, 则 $a_9 < 30$, 证明 p 为真, 同时写出 p 逆命题 q , 并判断命题 q 是真还是假, 说明理由;
- (3) 若 $a_{2m} = 3^m$, ($m \in \mathbb{N}^*$) 成立, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

参考答案与试题解析

2022 年上海市高考数学试卷

一、填空题（本大题共有 12 题，满分 54 分，第 1~6 题每题 4 分，第 7~12 题每题 5 分）

1.

【答案】

6

【考点】

双曲线的简单几何性质

【解析】

根据双曲线的性质可得 $a=3$ ，实轴长为 $2a=6$.

【解答】

解：由双曲线 $\frac{x^2}{9}-y^2=1$ ，可知： $a=3$ ，

所以双曲线的实轴长 $2a=6$.

故答案为：6.

2.

【答案】

π

【考点】

三角函数的周期性

【解析】

由三角函数的恒等变换化简函数可得 $f(x)=\cos 2x+1$ ，从而根据周期公式即可求值.

【解答】

解： $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x+1$

$=\cos^2 x-\sin^2 x+\cos^2 x+\sin^2 x=\cos 2x+1$,

$$T=\frac{2\pi}{2}=\pi.$$

故答案为： π .

3.

【答案】

3

【考点】

二阶行列式的定义

【解析】

根据行列式所表示的值求解即可.

【解答】

解：因为 $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=2a-3$ ， $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=a$ ，

所以 $2a-3=a$ ，解得 $a=3$.

故答案为：3.

4.

【答案】

24π

【考点】

棱柱、棱锥、棱台的侧面积和表面积
旋转体（圆柱、圆锥、圆台）

【解析】

由底面积为 9π 解出底面半径 $R=3$ ，再代入侧面积公式求解即可。

【解答】

解：因为圆柱的底面积为 9π ，即 $\pi R^2=9\pi$ ，

所以 $R=3$ ，

所以 $S_{\text{侧}}=2\pi Rh=24\pi$ 。

故答案为： 24π 。

5.

【答案】

$$\frac{3}{2}$$

【考点】

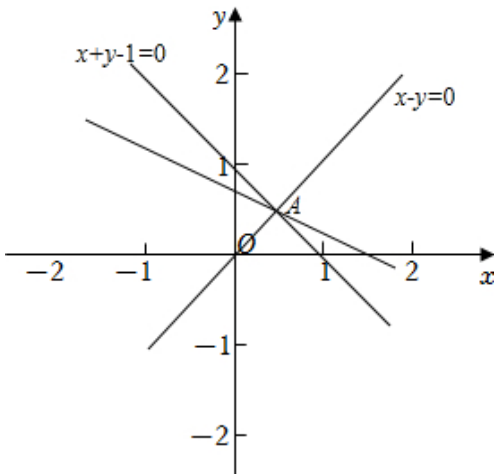
简单线性规划

【解析】

根据已知条件作出可行域，再求目标函数的最小值即可。

【解答】

解：如图所示：



由 $x-y \leq 0$ ， $x+y-1 \geq 0$ ，可知可行域为直线 $x-y=0$ 的左上方和 $x+y-1=0$ 的右上方的公共部分，

联立 $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$ ，可得 $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ ，即图中点 $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ，

当目标函数 $z=x+2y$ 沿着与正方向向量 $\vec{a}=(1,2)$ 的相反向量平移时，离开区间时取最小值，

即目标函数 $z=x+2y$ 过点 $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 时，取最小值： $\frac{1}{2}+2 \times \frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 。

故答案为： $\frac{3}{2}$ 。

6.

【答案】

【考点】

二项式定理及相关概念

【解析】由题意，利用二项式展开式的通项公式，求得 n 的值.**【解答】**解： \because 二项式 $(3+x)^n$ 的展开式中， x^2 项的系数是常数项的5倍，

$$\text{即 } C_n^2 \times 3^{n-2} = 5C_n^0 \times 3^n, \text{ 即 } \frac{n(n-1)}{2} = 5 \times 9,$$

$$\therefore n=10,$$

故答案为：10.

7.

【答案】

1

【考点】

分段函数的应用

函数奇偶性的性质

【解析】(1) 由题意，利用奇函数的定义可得 $f(-x) = -f(x)$ ，故有 $f(-1) = -f(1)$ ，由此求得 a 的值.**【解答】**

$$\text{解：} \because \text{函数 } f(x) = \begin{cases} a^2x-1 & x < 0 \\ x+a & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \text{ 为奇函数，} \therefore f(-x) = -f(x),$$

$$\therefore f(-1) = -f(1), \therefore -a^2-1 = -(a+1), \text{ 即 } a(a-1) = 0, \text{ 求得 } a = 0 \text{ 或 } a = 1.$$

$$\text{当 } a = 0 \text{ 时，} f(x) = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ x, x > 0 \end{cases}, \text{ 不是奇函数，故 } a \neq 0;$$

$$\text{当 } a = 1 \text{ 时，} f(x) = \begin{cases} x-1, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ x+1, x > 0 \end{cases}, \text{ 是奇函数，故满足条件，}$$

综上， $a = 1$ ，

故答案为：1.

8.

【答案】 $\frac{3}{7}$ **【考点】**

古典概型及其概率计算公式

【解析】

由题意，利用古典概率的计算公式，计算求得结果.

【解答】

解：从游泳类1项，球类3项，田径类4项共8项项目中随机抽取4项进行检测，则每一类都被抽到的方法共有 $C_1^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^2 + C_1^1 \cdot C_3^2 \cdot C_4^1$ 种，
而所有的抽取方法共有 C_8^4 种，

故每一类都被抽到的概率为 $\frac{C_1^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^2 + C_1^1 \cdot C_3^2 \cdot C_4^1}{C_8^3} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$,

故答案为: $\frac{3}{7}$.

9.

【答案】

98

【考点】

等差数列的前 n 项和

【解析】

由等差数列前 n 项和公式求出 $a_1 = -2d$, 从而 $S_n = \frac{d}{2}(n^2 - 5n)$, 由此能求出结果.

【解答】

解: \because 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不为零, S_n 为其前 n 项和, $S_5 = 0$,

$$\therefore S_5 = 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d = 0, \text{ 解得 } a_1 = -2d,$$

$$\therefore S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = -2nd + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}(n^2 - 5n),$$

$$\therefore d \neq 0, \therefore S_i (i = 0, 1, 2, \dots, 100) \text{ 中 } S_0 = S_5 = 0,$$

$$S_2 = S_3 = -3d, S_1 = S_4 = -2d,$$

其余各项均不相等,

$$\therefore S_i (i = 0, 1, 2, \dots, 100) \text{ 中不同的数值有: } 101 - 3 = 98.$$

故答案为: 98.

10.

【答案】

$\sqrt[4]{5}$

【考点】

平面向量数量积的性质及其运算

【解析】

利用平面向量的数量积进行分析, 即可得出结果.

【解答】

解: 由题意, 有 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 则 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 设 $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \theta$,

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{c} = 2 \\ \vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left| \vec{a} \right| \left| \vec{c} \right| \cos \theta = 2, \textcircled{1} \\ \left| \vec{b} \right| \left| \vec{c} \right| \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = 1, \textcircled{2} \end{cases} \text{ 则 } \frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}} \text{ 得, } \tan \theta = \frac{1}{2},$$

由同角三角函数的基本关系得: $\cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$$\text{则 } \vec{a} \cdot \vec{c} = \left| \vec{a} \right| \left| \vec{c} \right| \cos \theta = \lambda \cdot \lambda \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = 2,$$

$$\lambda^2 = \sqrt{5}, \text{ 则 } \lambda = \sqrt[4]{5}.$$

故答案为: $\sqrt[4]{5}$.

11.

【答案】

$$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty\right)$$

【考点】

函数的值域及其求法

函数的定义域及其求法

【解析】

由题可得 $\{y|y=f(x), 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}\} = A_f$, 再根据 $a < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时不合题意, 进而即得; 或等价于 $\frac{1}{1+x+a} \leq a$ 恒成

立, 即 $\frac{1}{a} - (1+a) \leq x$ 恒成立, 进而即得.

【解答】

解: 法一: 令 $x = \frac{1}{x+1}$, 解得 $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (负值舍去),

当 $x_1 \in [0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}]$ 时, $x_2 = \frac{1}{x_1+1} \in [\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1]$,

当 $x_1 \in (\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty)$ 时, $x_2 = \frac{1}{x_1+1} \in (0, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$,

且当 $x_1 \in (\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty)$ 时, 总存在 $x_2 = \frac{1}{x_1+1} \in (0, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$, 使得 $f(x_1) = f(x_2)$,

故 $\{y|y=f(x), 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}\} = A_f$,

若 $a < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 易得 $f(\frac{\sqrt{5}-1}{2}) \notin \{y|y=f(x), 0 \leq x \leq a\}$,

所以 $a \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

即实数 a 的取值范围为 $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty)$;

法二: 原命题等价于任意 $a > 0$, $f(x+a) = f(\frac{1}{1+x+a})$,

所以 $\frac{1}{1+x+a} \leq a \Rightarrow x \geq \frac{1}{a} - (1+a)$ 恒成立,

即 $\frac{1}{a} - (1+a) \leq 0$ 恒成立, 又 $a > 0$,

所以 $a \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

即实数 a 的取值范围为 $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty)$.

故答案为: $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty)$.

二、选择题 (本题共有 4 题, 满分 20 分, 每题 5 分) 每题有且只有一个正确选项.

1.

【答案】

B

【考点】

交集及其运算

【解析】

根据集合的运算性质计算即可.

【解答】

解: $\because A = [-1, 2), B = Z,$

$\therefore A \cap B = \{-1, 0, 1\},$

故选: B.

2.

【答案】

A

【考点】

基本不等式及其应用

【解析】

利用已知条件以及基本不等式化简即可判断求解.

【解答】

解: 因为 $a > b > 0,$ 所以 $a + b \geq 2\sqrt{ab},$ 当且仅当 $a = b$ 时取等号,

又 $a > b > 0,$ 所以 $a + b > 2\sqrt{ab},$ 故 A 正确, B 错误,

$\frac{a}{2} + 2b \geq 2\sqrt{\frac{a}{2} \times 2b} = 2\sqrt{ab},$ 当且仅当 $\frac{a}{2} = 2b,$ 即 $a = 4b$ 时取等号, 故 CD 错误,

故选: A.

3.

【答案】

D

【考点】

空间中直线与直线之间的位置关系

【解析】

线段 MN 上不存在点在线段 $A_1S、B_1D$ 上, 即直线 MN 与线段 $A_1S、B_1D$ 不相交, 因此所求与 D_1 可视的点, 即求哪条线段不与线段 $A_1S、B_1D$ 相交, 再利用共面定理, 异面直线的判定定理即可判断.

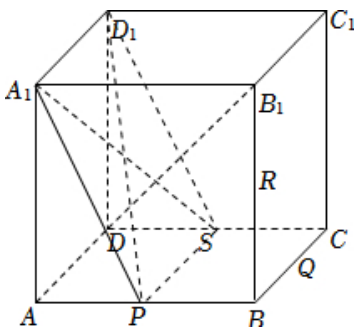
【解答】

解: 线段 MN 上不存在点在线段 $A_1S、B_1D$ 上, 即直线 MN 与线段 $A_1S、B_1D$ 不相交,

因此所求与 D_1 可视的点, 即求哪条线段不与线段 $A_1S、B_1D$ 相交,

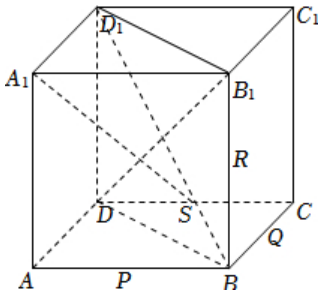
对 A 选项, 如图, 连接 $A_1P、PS、D_1S,$ 因为 $P、S$ 分别为 $AB、CD$ 的中点,

\therefore 易证 $A_1D_1 // PS,$ 故 $A_1、D_1、P、S$ 四点共面, $\therefore D_1P$ 与 A_1S 相交, \therefore A 错误;



对 B、C 选项, 如图, 连接 $D_1B、DB,$ 易证 $D_1、B_1、B、D$ 四点共面,

故 $D_1B、D_1R$ 都与 B_1D 相交, \therefore B、C 错误;



对 D 选项, 连接 D_1Q , 由 A 选项分析知 A_1, D_1, P, S 四点共面记为平面 A_1D_1PS ,

$\because D_1 \in$ 平面 $A_1D_1PS, Q \notin$ 平面 A_1D_1PS , 且 $A_1S \subset$ 平面 A_1D_1PS , 点 $D_1 \notin A_1S$,

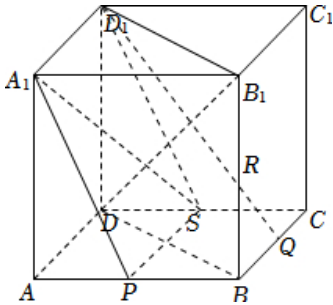
$\therefore D_1Q$ 与 A_1S 为异面直线,

同理由 B, C 选项的分析知 D_1, B_1, B, D 四点共面记为平面 D_1B_1BD ,

$\because D_1 \in$ 平面 $D_1B_1BD, Q \notin$ 平面 D_1B_1BD , 且 $B_1D \subset$ 平面 D_1B_1BD , 点 $D_1 \notin B_1D$,

$\therefore D_1Q$ 与 B_1D 为异面直线,

故 D_1Q 与 A_1S, B_1D 都没有公共点, \therefore D 选项正确.



故选: D.

4.

【答案】

B

【考点】

直线与圆的位置关系

【解析】

分 $k=0, k>0, k<0$, 求出动点的轨迹, 即可判定.

【解答】

解: 当 $k=0$ 时, 集合 $\Omega = \{(x,y) | (x-k)^2 + (y-k^2)^2 = 4 |k|, k \in Z\} = \{(0,0)\}$,

当 $k>0$ 时, 集合 $\Omega = \{(x,y) | (x-k)^2 + (y-k^2)^2 = 4 |k|, k \in Z\}$,

表示圆心为 (k, k^2) , 半径为 $r = 2\sqrt{k}$ 的圆,

圆的圆心在直线 $y = x^2$ 上, 半径 $r = f(k) = 2\sqrt{k}$ 单调递增,

相邻两个圆的圆心距 $d = \sqrt{(k+1-k)^2 + [(k+1)^2 - k^2]^2} = \sqrt{4k^2 + 4k + 2}$, 相邻两个圆的半径之和为 $l = 2\sqrt{k} + 2\sqrt{k+1}$,

因为 $d > l$ 有解, 故相邻两个圆之间的位置关系可能相离,

当 $k < 0$ 时, 同 $k > 0$ 的情况, 故存在直线 l , 使得集合 Ω 中不存在点在 l 上, 而存在点在 l 两侧, 故 ① 正确,

若直线 l 斜率不存在, 显然不成立,

设直线 $l: y = mx + n$, 若考虑直线 l 与圆 $(x-k)^2 + (y-k^2)^2 = 4 |k|$ 的焦点个数,

$$d = \frac{|mk+n-k^2|}{\sqrt{m^2+1}}, r = 2\sqrt{|k|},$$

给定 m, n , 当 k 足够大时, 均有 $d > r$,
故直线 l 只与有限个圆相交, ② 错误.

故选: B.

三、解答题 (本大题共有 5 题, 满分 76 分).

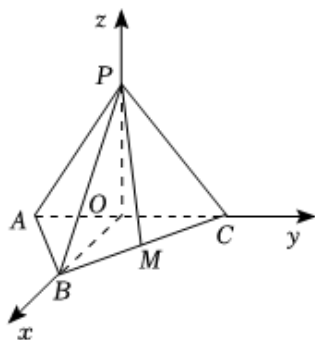
1.

【答案】

解: (1) 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 因为 $PO \perp$ 底面 ABC , 所以 $PO \perp AC$,
又 O 为 AC 边中点, 所以 $\triangle PAC$ 为等腰三角形,
又 $AP=AC=2$. 所以 $\triangle PAC$ 是边长为 2 的为等边三角形,

$$\therefore PO = \sqrt{3}, \text{ 三棱锥体积 } V_{P-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot PO = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \times \sqrt{3} = 1.$$

(2) 以 O 为坐标原点, OB 为 x 轴, OC 为 y 轴, OP 为 z 轴, 建立空间直角坐标系,



$$\text{则 } P(0,0,\sqrt{3}), B(\sqrt{3},0,0), C(0,1,0), M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),$$

$$\vec{PM} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{3}\right),$$

$$\text{平面 } PAC \text{ 的法向量 } \vec{OB} = (\sqrt{3}, 0, 0),$$

设直线 PM 与平面 PAC 所成角为 θ ,

$$\text{则直线 } PM \text{ 与平面 } PAC \text{ 所成角的正弦值为 } \sin\theta = \frac{|\vec{PM} \cdot \vec{OB}|}{|\vec{PM}| \cdot |\vec{OB}|} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3} \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

所以 PM 与面 PAC 所成角大小为 $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$.

【考点】

棱柱、棱锥、棱台的体积

直线与平面所成的角

【解析】

(1) 直接利用体积公式求解;

(2) 以 O 为坐标原点, OB 为 x 轴, OC 为 y 轴, OP 为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 求得平面 PAC 的法向量, 即可求解.

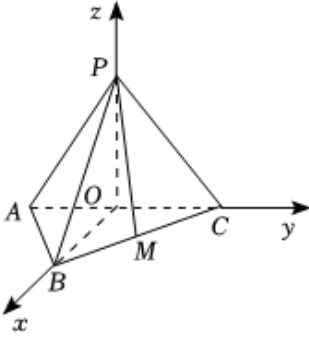
【解答】

解: (1) 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 因为 $PO \perp$ 底面 ABC , 所以 $PO \perp AC$,

又 O 为 AC 边中点，所以 $\triangle PAC$ 为等腰三角形，
 又 $AP=AC=2$ 。所以 $\triangle PAC$ 是边长为2的为等边三角形，

$$\therefore PO = \sqrt{3}, \text{ 三棱锥体积 } V_{P-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot PO = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \times \sqrt{3} = 1.$$

(2) 以 O 为坐标原点， OB 为 x 轴， OC 为 y 轴， OP 为 z 轴，建立空间直角坐标系，



$$\text{则 } P(0,0,\sqrt{3}), B(\sqrt{3},0,0), C(0,1,0), M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),$$

$$\vec{PM} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{3}\right),$$

$$\text{平面 } PAC \text{ 的法向量 } \vec{OB} = (\sqrt{3}, 0, 0),$$

设直线 PM 与平面 PAC 所成角为 θ ,

$$\text{则直线 } PM \text{ 与平面 } PAC \text{ 所成角的正弦值为 } \sin\theta = \frac{\left| \frac{\vec{PM} \cdot \vec{OB}}{|\vec{PM}| \cdot |\vec{OB}|} \right|}{\sqrt{3} \times 2} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3} \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

所以 PM 与面 PAC 所成角大小为 $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$.

2.

【答案】

解：(1) 因为函数 $f(x) = \log_3(a+x) + \log_3(6-x)$,

将函数 $f(x)$ 图像向下移 $m(m > 0)$ 后，得 $y = f(x) - m = \log_3(a+x) + \log_3(6-x) - m$ 的图像，

由函数图像经过点 $(3,0)$ 和 $(5,0)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \log_3(3+a) + 1 - m = 0 \\ \log_3(5+a) + 0 - m = 0 \end{cases}$$

解得 $a = -2, m = 1$.

(2) $a > -3$ 且 $a \neq 0$ 时，不等式 $f(x) \leq f(6-x)$ 可化为 $\log_3(a+x) + \log_3(6-x) \leq \log_3(a+6-x) + \log_3 x$,

$$\text{等价于 } \begin{cases} a+x > 0 \\ 6-x > 0 \\ a+6-x > 0 \\ x > 0 \\ (a+x)(6-x) \leq x(a+6-x) \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} x > -a \\ x < 6 \\ x < a+6 \\ x > 0 \\ a(x-3) \geq 0 \end{cases}$$

当 $-3 < a < 0$ 时， $0 < -a < 3, 3 < a+6 < 6$ ，解不等式得 $-a < x \leq 3$,

当 $a > 0$ 时， $-a < 0, a+6 > 6$ ，解不等式得 $3 \leq x < 6$;

综上知， $-3 < a < 0$ 时，不等式 $f(x) \leq f(6-x)$ 的解集是 $(-a, 3]$,

$a > 0$ 时，不等式 $f(x) \leq f(6-x)$ 的解集是 $[3,6)$ 。

【考点】

对数函数的图象与性质

不等式恒成立的问题

【解析】

(1) 写出函数图像下移 m 个单位后的解析式，把点的坐标代入求解即可得出 m 和 a 的值。

(2) 不等式化为 $\log_3(a+x) + \log_3(6-x) \leq \log_3(a+6-x) + \log_3x$ ，写出等价不等式组，求出解集即可。

【解答】

解：(1) 因为函数 $f(x) = \log_3(a+x) + \log_3(6-x)$ ，

将函数 $f(x)$ 图像向下移 $m(m > 0)$ 后，得 $y = f(x) - m = \log_3(a+x) + \log_3(6-x) - m$ 的图像，

由函数图像经过点 $(3,0)$ 和 $(5,0)$ ，

$$\text{所以} \begin{cases} \log_3(3+a) + 1 - m = 0 \\ \log_3(5+a) + 0 - m = 0 \end{cases}$$

解得 $a = -2, m = 1$ 。

(2) $a > -3$ 且 $a \neq 0$ 时，不等式 $f(x) \leq f(6-x)$ 可化为 $\log_3(a+x) + \log_3(6-x) \leq \log_3(a+6-x) + \log_3x$ ，

$$\text{等价于} \begin{cases} a+x > 0 \\ 6-x > 0 \\ a+6-x > 0 \\ x > 0 \\ (a+x)(6-x) \leq x(a+6-x) \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x > -a \\ x < 6 \\ x < a+6 \\ x > 0 \\ a(x-3) \geq 0 \end{cases},$$

当 $-3 < a < 0$ 时， $0 < -a < 3, 3 < a+6 < 6$ ，解不等式得 $-a < x \leq 3$ ，

当 $a > 0$ 时， $-a < 0, a+6 > 6$ ，解不等式得 $3 \leq x < 6$ ；

综上知， $-3 < a < 0$ 时，不等式 $f(x) \leq f(6-x)$ 的解集是 $(-a, 3]$ ，

$a > 0$ 时，不等式 $f(x) \leq f(6-x)$ 的解集是 $[3,6)$ 。

3.

【答案】

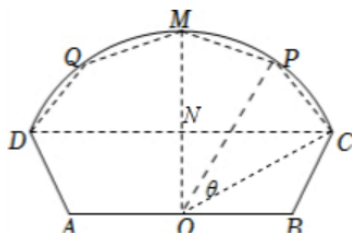
解：(1) 点 P 与点 C 重合，由题意可得 $OB = 10, BC = 6, \angle ABC = 120^\circ$ ，

由余弦定理可得 $OP^2 = OB^2 + BC^2 - 2OB \cdot BC \cos \angle ABC = 36 + 100 - 2 \times 6 \times 10 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 196$ ，

所以 $OP = 14$ ，在 $\triangle OBP$ 中，由正弦定理得 $\frac{OP}{\sin 120^\circ} = \frac{BP}{\sin \angle POB}$ ，

$$\text{所以} \frac{14}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{\sin \angle POB}, \text{解得} \sin \angle POB = \frac{3\sqrt{3}}{14},$$

所以 $\angle POB$ 的大小为 $\arcsin \frac{3\sqrt{3}}{14}$ ；



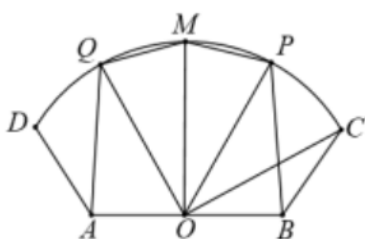
(2) 如图, 连结 QA, PB, OQ, OP ,
 \because 曲线 CMD 上任意一点到 O 距离相等,
 $\therefore OP = OQ = OM = OC = 14$,
 $\because P, Q$ 关于 OM 对称,
 $\therefore P$ 点在劣弧 CM 中点或劣弧 DM 的中点位置, $S_{\triangle QOM} = S_{\triangle POM} = \alpha$,

$$\text{则 } \angle AOQ = \angle BOP = S_{\triangle BOP} = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

$$\begin{aligned} \text{则五边形面积 } S &= 2(S_{\triangle AOQ} + S_{\triangle QOM}) \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} \cdot OQ \cdot OA \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot OM \cdot \sin \alpha \right] = 28\sqrt{74} \sin(\alpha + \varphi), \text{ 其中 } \tan \varphi = \frac{5}{7}, \end{aligned}$$

当 $\sin(\alpha + \varphi) = 1$ 时, $S_{\text{五边形}MQABP}$ 取最大值 $28\sqrt{74}$,

\therefore 五边形 $MQABP$ 面积 S 的最大值为 $28\sqrt{74}$.



【考点】

余弦定理

正弦定理

扇形面积公式

【解析】

(1) 在 $\triangle OBP$ 中, 直接利用余弦定理求出 OP , 再结合正弦定理求解;

(2) 利用五边形 $CDQMP$ 的对称性, 将所求的面积化为四边形 $PMNC$ 的面积计算问题, 充分利用圆弧的性质, 找到最大值点, 从而解决问题.

【解答】

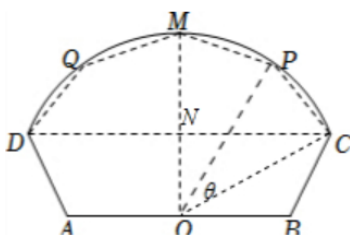
解: (1) 点 P 与点 C 重合, 由题意可得 $OB = 10, BC = 6, \angle ABC = 120^\circ$,

$$\text{由余弦定理可得 } OP^2 = OB^2 + BC^2 - 2OB \cdot BC \cos \angle ABC = 36 + 100 - 2 \times 6 \times 10 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 196,$$

所以 $OP = 14$, 在 $\triangle OBP$ 中, 由正弦定理得 $\frac{OP}{\sin 120^\circ} = \frac{BP}{\sin \angle POB}$,

$$\text{所以 } \frac{14}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{\sin \angle POB}, \text{ 解得 } \sin \angle POB = \frac{3\sqrt{3}}{14},$$

所以 $\angle POB$ 的大小为 $\arcsin \frac{3\sqrt{3}}{14}$;



(2) 如图, 连结 QA, PB, OQ, OP ,

∵ 曲线CMD上任意一点到O距离相等,

∴ $OP=OQ=OM=OC=14$,

∵ P, Q关于OM对称,

∴ P点在劣弧CM中点或劣弧DM的中点位置, $S_{\triangle QOM} = S_{\triangle POM} = \alpha$,

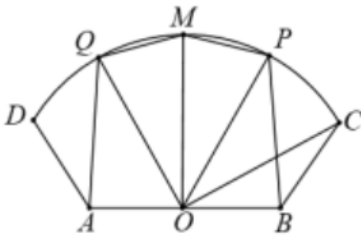
则 $\angle AOQ = \angle BOP = S_{\triangle BOP} = \frac{\pi}{2} - \alpha$,

则五边形面积 $S = 2(S_{\triangle AOQ} + S_{\triangle QOM})$

$= 2 \left[\frac{1}{2} \cdot OQ \cdot OA \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot OM \cdot \sin \alpha \right] = 28\sqrt{74} \sin(\alpha + \varphi)$, 其中 $\tan \varphi = \frac{5}{7}$,

当 $\sin(\alpha + \varphi) = 1$ 时, $S_{\text{五边形MQABP}}$ 取最大值 $28\sqrt{74}$,

∴ 五边形MQABP面积S的最大值为 $28\sqrt{74}$.



4.

【答案】

解: (1) 由题意可得 $a = 2, b = c = \sqrt{2}$,

$\Gamma: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, A(0, -\sqrt{2})$,

∵ AM的中点在x轴上,

∴ M的纵坐标为 $\sqrt{2}$,

代入 $x + y - 4\sqrt{2} = 0$ 得 $M(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(2) 由直线方程可知 $B(0, 4\sqrt{2})$,

① 若 $\cos \angle BAM = \frac{3}{5}$, 则 $\tan \angle BAM = \frac{4}{3}$, 即 $\tan \angle OAF_2 = \frac{4}{3}$,

∴ $OA = \frac{3}{4}OF_2 = \frac{3}{4}\sqrt{2}$,

∴ $b = \frac{3}{4}\sqrt{2}$.

② 若 $\cos \angle BMA = \frac{3}{5}$, 则 $\sin \angle BMA = \frac{4}{5}$,

∵ $\angle MBA = \frac{\pi}{4}$, ∴ $\cos(\angle MBA + \angle AMB) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4}{5} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$,

∴ $\cos \angle BAM = \frac{\sqrt{2}}{10}$, ∴ $\tan \angle BAM = 7$.

即 $\tan \angle OAF_2 = 7$, ∴ $OA = \frac{\sqrt{2}}{7}$, ∴ $b = \frac{\sqrt{2}}{7}$,

综上 $b = \frac{3}{4}\sqrt{2}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{7}$.

(3) 设 $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$,

由点到直线距离公式可得 $\frac{|a\cos\theta + b\sin\theta - 4\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 6 - 2a$,

很明显椭圆在直线的左下方, 则 $-\frac{a\cos\theta + b\sin\theta - 4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 6 - 2a$,

即 $4\sqrt{2} - \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\theta + \varphi) = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}a$,

$\therefore a^2 = b^2 + 2$, $\therefore \sqrt{2a^2 - 2}\sin(\theta + \varphi) = 2\sqrt{2}a - 2\sqrt{2}$,

据此可得 $\sqrt{a^2 - 1}\sin(\theta + \varphi) = 2a - 2$, $|\sin(\theta + \varphi)| = \frac{|2a - 2|}{\sqrt{a^2 - 1}} \leq 1$,

整理可得 $(a - 1)(3a - 5) \leq 0$, 即 $1 \leq a \leq \frac{5}{3}$,

从而 $d = 6 - 2a \geq 6 - 2 \times \frac{5}{3} = \frac{8}{3}$.

即 d 的最小值为 $\frac{8}{3}$.

【考点】

直线与圆锥曲线的关系

椭圆的定义和性质

直线与椭圆结合的最值问题

点到直线的距离公式

【解析】

(1) 由题意可得椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, 从而确定 M 点的纵坐标, 进一步可得点 M 的坐标;

(2) 由直线方程可知 $B(0, 4\sqrt{2})$, 分类讨论 $\cos\angle BAM = \frac{3}{5}$ 和 $\cos\angle BMA = \frac{3}{5}$ 两种情况确定 b 的值即可;

(3) 设 $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$, 利用点到直线距离公式和椭圆的定义可得 $\frac{|a\cos\theta + b\sin\theta - 4\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 6 - 2a$, 进一步整理计算, 结合三角函数的有界性求得 $1 \leq a \leq \frac{5}{3}$ 即可确定 d 的最小值.

【解答】

解: (1) 由题意可得 $a = 2$, $b = c = \sqrt{2}$,

$\Gamma: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, $A(0, -\sqrt{2})$,

$\therefore AM$ 的中点在 x 轴上,

$\therefore M$ 的纵坐标为 $\sqrt{2}$,

代入 $x + y - 4\sqrt{2} = 0$ 得 $M(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(2) 由直线方程可知 $B(0, 4\sqrt{2})$,

① 若 $\cos\angle BAM = \frac{3}{5}$, 则 $\tan\angle BAM = \frac{4}{3}$, 即 $\tan\angle OAF_2 = \frac{4}{3}$,

$\therefore OA = \frac{3}{4}OF_2 = \frac{3}{4}\sqrt{2}$,

$\therefore b = \frac{3}{4}\sqrt{2}$.

② 若 $\cos\angle BMA = \frac{3}{5}$, 则 $\sin\angle BMA = \frac{4}{5}$,

$$\because \angle MBA = \frac{\pi}{4}, \therefore \cos(\angle MBA + \angle AMB) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4}{5} = -\frac{\sqrt{2}}{10},$$

$$\therefore \cos \angle BAM = \frac{\sqrt{2}}{10}, \therefore \tan \angle BAM = 7.$$

$$\text{即 } \tan \angle OAF_2 = 7, \therefore OA = \frac{\sqrt{2}}{7}, \therefore b = \frac{\sqrt{2}}{7},$$

$$\text{综上 } b = \frac{3}{4}\sqrt{2} \text{ 或 } \frac{\sqrt{2}}{7}.$$

(3) 设 $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$,

$$\text{由点到直线距离公式可得 } \frac{|a\cos\theta + b\sin\theta - 4\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 6 - 2a,$$

$$\text{很明显椭圆在直线的左下方, 则 } -\frac{a\cos\theta + b\sin\theta - 4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 6 - 2a,$$

$$\text{即 } 4\sqrt{2} - \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\theta + \varphi) = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}a,$$

$$\therefore a^2 = b^2 + 2, \therefore \sqrt{2a^2 - 2}\sin(\theta + \varphi) = 2\sqrt{2}a - 2\sqrt{2},$$

$$\text{据此可得 } \sqrt{a^2 - 1}\sin(\theta + \varphi) = 2a - 2, |\sin(\theta + \varphi)| = \frac{|2a - 2|}{\sqrt{a^2 - 1}} \leq 1,$$

$$\text{整理可得 } (a - 1)(3a - 5) \leq 0, \text{ 即 } 1 \leq a \leq \frac{5}{3},$$

$$\text{从而 } d = 6 - 2a \geq 6 - 2 \times \frac{5}{3} = \frac{8}{3}.$$

即 d 的最小值为 $\frac{8}{3}$.

5.

【答案】

解: (1) $a_3 = 2a_2 - a_1 = 5, a_4 = 2a_3 - a_2 = 7$ 或 $a_4 = 2a_3 - a_1 = 9$.

(2) $\because a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ 为等差数列,

$$\therefore d = 2, a_n = 2n - 1 (n \in [1, 8], n \in \mathbb{N}^*),$$

$$a_9 = 2a_8 - a_i = 30 - a_i < 30.$$

逆命题 q : 若 $a_9 < 30$, 则 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ 为等差数列是假命题,

举例: $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, a_5 = 9, a_6 = 11, a_7 = 13,$

$$a_8 = 2a_7 - a_5 = 17, a_9 = 2a_8 - a_7 = 21.$$

(3) 因为 $a_{2m} = 3^m$,

$$\therefore a_{2m+2} = 3^{m+1}, a_{2m+1} = 2a_{2m} - a_j (j \leq 2m-1), a_{2m+2} = 2a_{2m+1} - a_i (i \leq 2m),$$

$$\therefore a_{2m+2} = 4a_{2m} - 2a_j - a_i,$$

$$\therefore 2a_j + a_i = 4a_{2m} - a_{2m+2} = 4 \times 3^m - 3^{m+1} = 3^m = a_{2m},$$

以下用数学归纳法证明数列单调递增, 即证明 $a_{n+1} > a_n$ 恒成立:

当 $n = 1$, $a_2 > a_1$ 明显成立,

假设 $n = k$ 时命题成立, 即 $a_k > a_{k-1} > a_{k-2} \cdots > a_2 > a_1 > 0$,

则 $a_{k+1} - a_k = 2a_k - a_i - a_k = a_k - a_i > 0$, 则 $a_{k+1} > a_k$, 命题得证.

回到原题, 分类讨论求解数列的通项公式:

1. 若 $j = 2m - 1$, 则 $a_{2m} = 2a_j + a_i = 2a_{2m-1} + a_i > a_{2m-1} - a_i$ 矛盾,

2. 若 $j = 2m - 2$, 则 $a_j = 3^{m-1}$, $\therefore a_i = 3^m - 2a_j = 3^{m-1}$, $\therefore i = 2m - 2$,

$$\text{此时 } a_{2m+1} = 2a_{2m} - a_j = 2 \times 3^m - 3^{m-1} = 5 \times 3^{m-1},$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 5 \times 3^{\frac{n-3}{2}} & n=2k+1, k \in N^* \\ 3^{\frac{n}{2}} & n=2k, k \in N^* \end{cases} \text{若 } j < 2m-2, \text{ 则 } 2a_j < 2 \times 3^{m-1},$$

$$\therefore a_i = 3^m - 2a_j > 3^{m-1}, \therefore j = 2m-1,$$

$$\therefore a_{2m+2} = 2a_{2m+1} - a_{2m-1} \text{ (由(2)知对任意 } m \text{ 成立),}$$

$$a_6 = 2a_5 - a_3,$$

事实上: $a_6 = 2a_5 - a_2$ 矛盾.

$$\text{综上可得 } a_n = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 5 \times 3^{\frac{n-3}{2}} & n=2k+1, k \in N^* \\ 3^{\frac{n}{2}} & n=2k, k \in N^* \end{cases}$$

【考点】

数列递推式

命题的真假判断与应用

数列的应用

数学归纳法

【解析】

(1) 利用递推关系式可得 $a_3 = 5$, 然后计算 a_4 的值即可;

(2) 由题意可得 $a_n = 2n-1 (n \in [1, 8], n \in N^*)$, 则 $a_9 = 2a_8 - a_i < 30$, 从而命题为真命题, 给出反例可得命题 q 为假命题.

(3) 由题意可得 $a_{2m+2} = 2a_{2m+1} - a_i (i \leq 2m)$, $a_{2m+1} = 2a_{2m} - a_j (j \leq 2m-1)$, 然后利用数学归纳法证明数列单调递增, 最后分类讨论即可确定数列的通项公式.

【解答】

解: (1) $a_3 = 2a_2 - a_1 = 5$, $a_4 = 2a_3 - a_2 = 7$ 或 $a_4 = 2a_3 - a_1 = 9$.

(2) $\because a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ 为等差数列,

$$\therefore d = 2, a_n = 2n-1 (n \in [1, 8], n \in N^*),$$

$$a_9 = 2a_8 - a_i = 30 - a_i < 30.$$

逆命题 q : 若 $a_9 < 30$, 则 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ 为等差数列是假命题,

举例: $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, a_5 = 9, a_6 = 11, a_7 = 13,$

$$a_8 = 2a_7 - a_5 = 17, a_9 = 2a_8 - a_7 = 21.$$

(3) 因为 $a_{2m} = 3^m$,

$$\therefore a_{2m+2} = 3^{m+1}, a_{2m+1} = 2a_{2m} - a_j (j \leq 2m-1), a_{2m+2} = 2a_{2m+1} - a_i (i \leq 2m),$$

$$\therefore a_{2m+2} = 4a_{2m} - 2a_j - a_i,$$

$$\therefore 2a_j + a_i = 4a_{2m} - a_{2m+2} = 4 \times 3^m - 3^{m+1} = 3^m = a_{2m},$$

以下用数学归纳法证明数列单调递增, 即证明 $a_{n+1} > a_n$ 恒成立:

当 $n = 1$, $a_2 > a_1$ 明显成立,

假设 $n = k$ 时命题成立, 即 $a_k > a_{k-1} > a_{k-2} \cdots > a_2 > a_1 > 0$,

则 $a_{k+1} - a_k = 2a_k - a_i - a_k = a_k - a_i > 0$, 则 $a_{k+1} > a_k$, 命题得证.

回到原题, 分类讨论求解数列的通项公式:

1. 若 $j = 2m-1$, 则 $a_{2m} = 2a_j + a_i = 2a_{2m-1} + a_i > a_{2m-1} - a_i$ 矛盾,

2. 若 $j = 2m-2$, 则 $a_j = 3^{m-1}$, $\therefore a_i = 3^m - 2a_j = 3^{m-1}$, $\therefore i = 2m-2$,

$$\text{此时 } a_{2m+1} = 2a_{2m} - a_j = 2 \times 3^m - 3^{m-1} = 5 \times 3^{m-1},$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 5 \times 3^{\frac{n-3}{2}} & n = 2k + 1, k \in N^* \\ 3^{\frac{n}{2}} & n = 2k, k \in N^* \end{cases} \quad \text{若 } j < 2m - 2, \text{ 则 } 2a_j < 2 \times 3^{m-1},$$

$$\therefore a_i = 3^m - 2a_j > 3^{m-1}, \quad \therefore j = 2m - 1,$$

$$\therefore a_{2m+2} = 2a_{2m+1} - a_{2m-1} \quad (\text{由 (2) 知对任意 } m \text{ 成立}),$$

$$a_6 = 2a_5 - a_3,$$

事实上: $a_6 = 2a_5 - a_2$ 矛盾.

$$\text{综上可得 } a_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 5 \times 3^{\frac{n-3}{2}} & n = 2k + 1, k \in N^* \\ 3^{\frac{n}{2}} & n = 2k, k \in N^* \end{cases}$$

