绝密★启用前

2007年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷（理工农医类）

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页.
2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位. 在试卷上作答一律不得分.
4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

一．填空题（本大题满分44分）本大题共有11题，只要求直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分.

1．函数 $y=\dfrac{\lg(4-x)}{x-3}$ 的定义域是__________.

2．若直线 l_1：$2x+my+1=0$ 与直线 l_2：$y=3x-1$ 平行，则 $m=$__________.

曹亚辉高中物理 www.zhidianwuli.com 支点物理

3．函数 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$__________.

4．方程 $9^x-6\bullet 3^x-7=0$ 的解是__________.

5．已知 x，$y\in\mathbf{R}^+$，且 $x+4y=1$，则 $x\bullet y$ 的最大值是__________.

6．函数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期 $T=$__________.

7．在五个数字 $1,2,3,4,5$ 中，若随机取出三个数字，则剩下两个数字都是奇数的概率是__________（结果用数值表示）.

8．以双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的中心为焦点，且以该双曲线的左焦点为顶点的抛物线方程是____________________.

9．对于非零实数a，b，以下四个命题都成立：

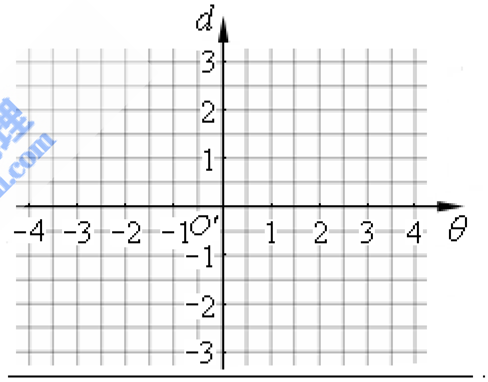
① $a+\frac{1}{a}\neq 0$；　　② $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；

③ 若$|a|=|b|$，则$a=\pm b$；　　④ 若$a^2=ab$，则$a=b$．

那么，对于非零复数a，b，仍然成立的命题的所有序号是_________．

10．在平面上，两条直线的位置关系有相交、平行、重合三种．已知α，β是两个相交平面，空间两条直线l_1，l_2在α上的射影是直线s_1，s_2，l_1，l_2在β上的射影是直线t_1，t_2．用s_1与s_2，t_1与t_2的位置关系，写出一个总能确定l_1与l_2是异面直线的充分条件：________________________．

11．已知P为圆$x^2+(y-1)^2=1$上任意一点（原点O除外），直线OP的倾斜角为θ弧度，记$d=|OP|$．在右侧的坐标系中，画出以(θ,d)为坐标的点的轨迹的大致图形为



曹亚辉高中物理 www.zhidianwuli.com

二．选择题（本大题满分16分）本大题共有4题，每题都给出代号为A，B，C，D的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得4分，不选、选错或者选出的代号超过一个（不论是否都写在圆括号内），一律得零分．

12．已知a，$b\in\mathbf{R}$，且$2+a\mathrm{i}$，$b+\mathrm{i}$（i是虚数单位）是实系数一元二次方程$x^2+px+q=0$的两个根，那么p，q的值分别是（　　）

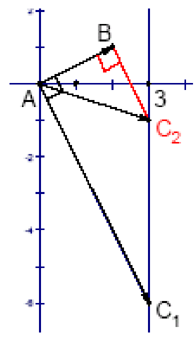
A．$p=-4$，$q=5$　　B．$p=-4$，$q=3$

C．$p=4$，$q=5$　　D．$p=4$，$q=3$

13．设 a，b 是非零实数，若 $a<b$，则下列不等式成立的是（　　）

A．$a^2<b^2$　　B．$ab^2<a^2b$　　C．$\dfrac{1}{ab^2}<\dfrac{1}{a^2b}$　　D．$\dfrac{b}{a}<\dfrac{a}{b}$

14．直角坐标系 xOy 中，$\vec{i}$，$\vec{j}$ 分别是与 x，y 轴正方向同向的单位向量．在直角三角形 ABC 中，若 $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+\vec{j}$，$\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+k\vec{j}$，则 k 的可能值个数是（　　）



A．1　　B．2　　C．3　　D．4

15．设 $f(x)$ 是定义在正整数集上的函数，且 $f(x)$ 满足："当 $f(k)\geqslant k^2$ 成立时，总可推出 $f(k+1)\geqslant(k+1)^2$ 成立"．那么，下列命题总成立的是（　　）

A．若 $f(3)\geqslant 9$ 成立，则当 $k\geqslant 1$ 时，均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立

B．若 $f(5)\geqslant 25$ 成立，则当 $k\leqslant 5$ 时，均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立

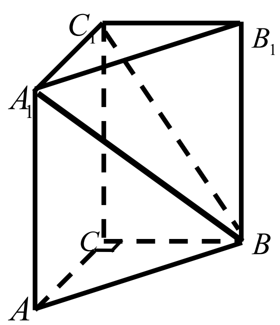
C．若 $f(7)<49$ 成立，则当 $k\geqslant 8$ 时，均有 $f(k)<k^2$ 成立

D．若 $f(4)=25$ 成立，则当 $k\geqslant 4$ 时，均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立

三．解答题（本大题满分90分）本大题共有6题，解答下列各题必须写出必要的步骤．

16．（本题满分12分）

如图，在体积为1的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC=1$．求直线 A_1B 与平面 BB_1C_1C 所成角的大小（结果用反三角函数值表示）．



17．（本题满分14分）

在$\triangle ABC$中，a，b，c分别是三个内角A，B，C的对边．若$a=2$，$C=\dfrac{\pi}{4}$，

$\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，求$\triangle ABC$的面积$S$．

18．（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分．

近年来，太阳能技术运用的步伐日益加快．2002年全球太阳电池的年生产量达到670兆瓦，年生产量的增长率为34%．以后四年中，年生产量的增长率逐年递增2%（如，2003年的年生产量的增长率为36%）．

（1）求2006年全球太阳电池的年生产量（结果精确到0.1兆瓦）；

（2）目前太阳电池产业存在的主要问题是市场安装量远小于生产量，2006年的实际安装量为1420兆瓦．假设以后若干年内太阳电池的年生产量的增长率保持在42%，到2010年，要使年安装量与年生产量基本持平（即年安装量不少于年生产量的95%），这四年中太阳电池的年安装量的平均增长率至少应达到多少（结果精确到0.1%）？

19．（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分7分，第2小题满分7分．

已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{a}{x}$　（$x\neq 0$，常数 $a\in\mathbf{R}$）．

（1）讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性，并说明理由；

（2）若函数 $f(x)$ 在 $x\in[2,+\infty)$ 上为增函数，求 a 的取值范围．

20．（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分6分，第3小题满分9分．

如果有穷数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$（n 为正整数）满足条件 $a_1=a_n$，$a_2=a_{n-1}$，…，$a_n=a_1$，即 $a_i=a_{n-i+1}$（$i=1,2,\cdots,n$），我们称其为“对称数列”．例如，由组合数组成的数列 $C_m^0,C_m^1,\cdots,C_m^m$ 就是“对称数列”．

（1）设 $\{b_n\}$ 是项数为7的“对称数列”，其中 b_1,b_2,b_3,b_4 是等差数列，且 $b_1=2$，$b_4=11$．依次写出 $\{b_n\}$ 的每一项；

（2）设 $\{c_n\}$ 是项数为 $2k-1$(正整数 $k>1$)的“对称数列”，其中 $c_k,c_{k+1},\cdots,c_{2k-1}$ 是首项为 50，公差为 -4 的等差数列．记 $\{c_n\}$ 各项的和为 S_{2k-1}．当 k 为何值时，S_{2k-1} 取得最大值？并求出 S_{2k-1} 的最大值；

（3）对于确定的正整数 $m>1$，写出所有项数不超过 $2m$ 的“对称数列”，使得 $1,2,2^2,\cdots,2^{m-1}$ 依次是该数列中连续的项；当 $m>1500$ 时，

求其中一个“对称数列”前 2008 项的和 S_{2008}.

21．（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分6分，
第3小题满分8分．

我们把由半椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (x\geqslant 0)$ 与半椭圆 $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2}{c^2}=1\ (x\leqslant 0)$

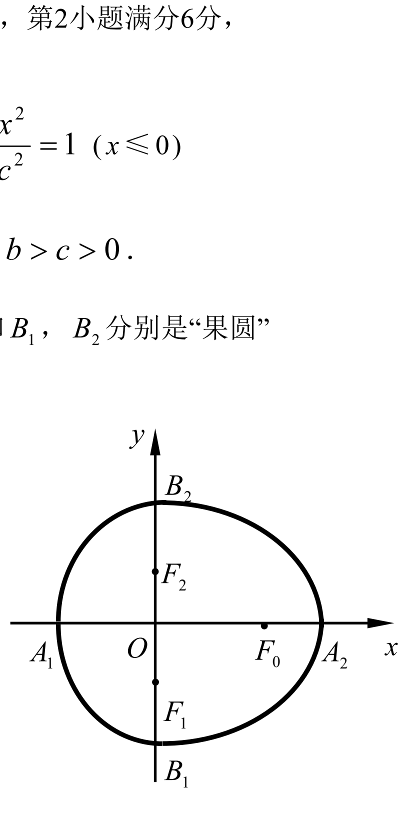
合成的曲线称作“果圆”，其中 $a^2=b^2+c^2$，$a>0$，$b>c>0$.

如图，点 F_0，F_1，F_2 是相应椭圆的焦点，A_1，A_2 和 B_1，B_2 分别是“果圆”

与 x，y 轴的交点．

（1） 若 $\triangle F_0F_1F_2$ 是边长为1的等边三角形，

求“果圆”的方程；



（2）当$\left|A_1A_2\right|>\left|B_1B_2\right|$时，求$\dfrac{b}{a}$的取值范围；

（3）连接“果圆”上任意两点的线段称为“果圆”的弦．

试研究：是否存在实数k，使斜率为k的“果圆”平行弦的中点轨迹总是落在某个椭圆上？若存在，求出所有可能的k值；若不存在，说明理由．

绝密★启用前

2007年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷（理工农医类）

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页.
2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位. 在试卷上作答一律不得分.
4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

一．填空题（本大题满分44分）本大题共有11题，只要求直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分.

1．函数 $y=\dfrac{\lg(4-x)}{x-3}$ 的定义域是__________.

【答案】 $\{x|x<4 且 x\neq 3\}$

【解析】 $\begin{cases}4-x>0\\x-3\neq 0\end{cases}\Rightarrow \{x|x<4 且 x\neq 3\}$

2．若直线 l_1：$2x+my+1=0$ 与直线 l_2：$y=3x-1$ 平行，则 $m=$__________.

【答案】 $-\dfrac{2}{3}$

【解析】 $\dfrac{2}{3}=\dfrac{m}{-1}\neq\dfrac{1}{-1}\Rightarrow m=-\dfrac{2}{3}$

3．函数 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$__________.

【答案】 $\dfrac{x}{x-1}$（$x\neq 1$）

【解析】由 $y=\dfrac{x}{x-1}\Rightarrow x=\dfrac{y}{y-1}(y\neq 1)\Rightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{x}{x-1}$（$x\neq 1$）

4．方程 $9^x-6\bullet 3^x-7=0$ 的解是__________.

【答案】 $x=\log_3 7$

【解析】 $(3^x)^2-6\cdot 3^x-7=0\Rightarrow 3^x=7或3^x=-1$（舍去），$\therefore x=\log_3 7$。

5．已知 x，$y\in\mathbf{R}^+$，且 $x+4y=1$，则 $x\bullet y$ 的最大值是__________.

【答案】$\frac{1}{16}$

【解析】$xy=\frac{1}{4}x\cdot 4y\le\frac{1}{4}(\frac{x+4y}{2})^2=\frac{1}{16}$，当且仅当x=4y=$\frac{1}{2}$时取等号.

6．函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期 $T=$__________.

【答案】π

【解析】$y=\sin(x+\frac{\pi}{3})\sin(x+\frac{\pi}{2})=(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3})\cos x$

$$=\frac{1}{2}\sin x\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 x=\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{3})\qquad\therefore T=\pi$$。

7．在五个数字 $1,2,3,4,5$ 中，若随机取出三个数字，则剩下两个数字都是奇数的

概率是_________（结果用数值表示）.

【答案】0.3

【解析】$\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}$

8．以双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 的中心为焦点，且以该双曲线的左焦点为顶点的抛物线方程

是____________________.

【答案】$y^2=12(x+3)$

【解析】双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 的中心为O（0,0），该双曲线的左焦点为F（－3,0），则抛物线的顶点为（－3,0），焦点为（0,0），所以p=6，所以抛物线方程是) $y^2=12(x+3)$

9．对于非零实数 a，b，以下四个命题都成立：

① $a+\frac{1}{a}\neq 0$；　　② $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；

③ 若 $|a|=|b|$，则 $a=\pm b$；　　④ 若 $a^2=ab$，则 $a=b$.

那么，对于非零复数 a，b，仍然成立的命题的所有序号是_________.

【答案】②④

【解析】对于①：解方程 $a+\frac{1}{a}=0$ 得 $a=\pm i$，所以非零复数 $a=\pm i$ 使得 $a+\frac{1}{a}=0$，

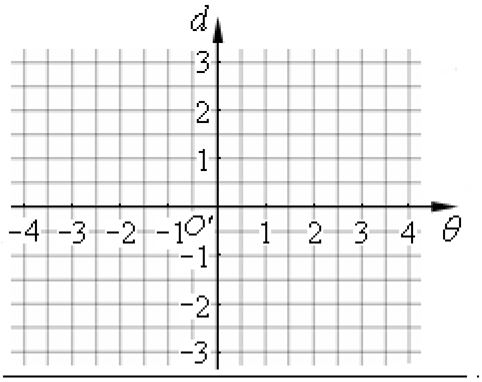
①不成立；②显然成立；对于③：在复数集C中，$|1|=|i|$，则 $|a|=|b|$ ↲ $a=\pm b$，所以③不成立；④显然成立。则对于任意非零复数 a,b，上述命题仍然成立的所有序号是②④

10．在平面上，两条直线的位置关系有相交、平行、重合三种．已知 α，β 是两个相交平面，空间两条直线 l_1，l_2 在 α 上的射影是直线 s_1，s_2，l_1，l_2 在 β 上的射影是直线 t_1，t_2．用 s_1 与 s_2，t_1 与 t_2 的位置关系，写出一个总能确定 l_1 与 l_2 是异面直线的充分条件：________________________.

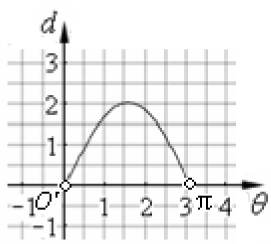
【答案】 $s_1 // s_2$，并且 t_1 与 t_2 相交（$t_1 // t_2$，并且 s_1 与 s_2 相交）

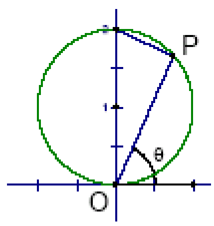
【解析】 作图易得“能成为 l_1,l_2 是异面直线的充分条件”的是“$s_1 // s_2$，并且 t_1 与 t_2 相交”或“$t_1 // t_2$，并且 s_1 与 s_2 相交”。

11．已知 P 为圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 上任意一点（原点 O 除外），直线 OP 的倾斜角为 θ 弧度，记 $d=|OP|$．在右侧的坐标系中，画出以 (θ,d) 为坐标的点的轨迹的大致图形为________________________.



【答案】





【解析】 $|OP|=2\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=2\sin\theta,\theta\in(0,\pi)$

二．选择题（本大题满分16分）本大题共有4 题，每题都给出代号为A，B，C，D 的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得4分，不选、选错或者选出的代号超过一个（不论是否都写在圆括号内），一律得零分．

12．已知 a，$b\in\mathbf{R}$，且 $2+a\mathrm{i}$，$b+\mathrm{i}$（i 是虚数单位）是实系数一元二次方程

$x^2+px+q=0$ 的两个根，那么 p，q 的值分别是（　　）

A．$p=-4$，$q=5$　　　　B．$p=-4$，$q=3$

C．$p=4$，$q=5$　　　　D．$p=4$，$q=3$

【答案】A

【解析】 因为2+ a i，b+i（ i 是虚数单位）是实系数一元二次方程 $x^2+px+q=0$

的两个根，所以a=－1，b=2，所以实系数一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两个

根是 $2\pm i$ 所以 $p=-[(2+i)+(2-i)]=-4,q=(2+i)(2-i)=5.$。

13．设 a，b 是非零实数，若 $a<b$，则下列不等式成立的是（　　）

A．$a^2<b^2$　B．$ab^2<a^2b$　C．$\frac{1}{ab^2}<\frac{1}{a^2b}$　D．$\frac{b}{a}<\frac{a}{b}$

【答案】C

【解析】 若$a<b<0\Rightarrow a^2>b^2$，A不成立；若 $\begin{cases}ab>0\\a<b\end{cases}\Rightarrow a^2b<ab^2$，B不成立；

若a=1，b=2，则 $\frac{b}{a}=2,\frac{a}{b}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$，所以D不成立，故选C。

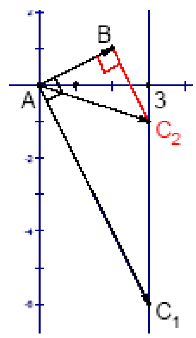
14．直角坐标系 xOy 中，$\vec{i}$，$\vec{j}$ 分别是与 x，y 轴正方向同向的单位向量．在直角三角形

ABC 中，若 $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+\vec{j}$，$\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+k\vec{j}$，则 k 的可能值个数是（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【答案】B

【解析】解法一： $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{i}+k\vec{j}=\vec{i}+(k-1)\vec{j}$



（1） 若A为直角，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(2\vec{i}+\vec{j})(3\vec{i}+k\vec{j})=6+k=0\Rightarrow k=-6$；

（2） 若B为直角，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(2\vec{i}+\vec{j})[\vec{i}+(k-1)\vec{j}]=1+k=0\Rightarrow k=-1$；

（3） 若C为直角，则

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(3\vec{i}+k\vec{j})[\vec{i}+(k-1)\vec{j}]=k^2-k+3=0\Rightarrow k\in\phi$。

所以 k 的可能值个数是2，选B

解法二： 数形结合．如图，将A放在坐标原点，则B点坐标为(2,1)，C点坐标为(3,k)，所以C点在直线x=3上，由图知，只可能A、B为直角，C不可能为直角．所以 k 的可能值个数是2，选B

15．设 $f(x)$ 是定义在正整数集上的函数，且 $f(x)$ 满足："当 $f(k)\geqslant k^2$ 成立时，

总可推出 $f(k+1)\geqslant (k+1)^2$ 成立"．那么，下列命题总成立的是（　　）

A．若 $f(3)\geqslant 9$ 成立，则当 $k\geqslant 1$ 时，均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立

B．若 $f(5)\geqslant 25$ 成立，则当 $k\leqslant 5$ 时，均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立

C．若 $f(7)<49$ 成立，则当 $k\geqslant 8$ 时，均有 $f(k)<k^2$ 成立

D．若 $f(4)=25$ 成立，则当 $k\geqslant 4$ 时，均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立

【答案】D

【解析】 对A，当k=1或2时，不一定有 $f\left(k\right)\geq k^2$ 成立；对B，应有 $f\left(k\right)\geq k^2$ 成立；

对C，只能得出：对于任意的 $k\geq 7$，均有 $f\left(k\right)\geq k^2$ 成立，不能得出：任意的 $k<7$，

均有 $f\left(k\right)<k^2$ 成立；对D，$\because f\left(4\right)=25\geq 16,\therefore$ 对于任意的 $k\geq 4$，

均有 $f\left(k\right)\geq k^2$ 成立。故选D。

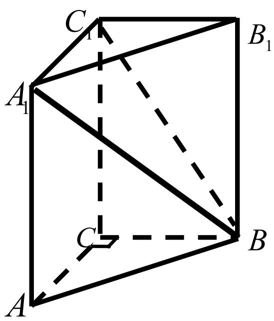
三．解答题（本大题满分90分）本大题共有6题，解答下列各题必须写出必要的步骤．

16．（本题满分12分）

如图，在体积为1的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

$\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC=1$．求直线 A_1B 与

平面 BB_1C_1C 所成角的大小（结果用反三角函数值表示）．



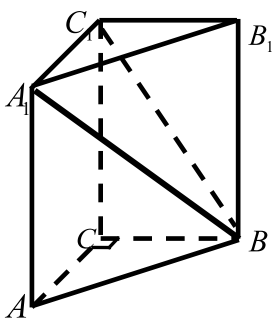
【解析】法一： 由题意，可得体积 $V=CC_1\bullet S_{\triangle ABC}=CC_1\bullet\frac{1}{2}\bullet AC\bullet BC=\frac{1}{2}CC_1=1$，

$\therefore AA_1=CC_1=2$．连接 BC_1．$\because$ $A_1C_1\perp B_1C_1$，$A_1C_1\perp CC_1$，

$\therefore$ $A_1C_1\perp$ 平面 BB_1C_1C，

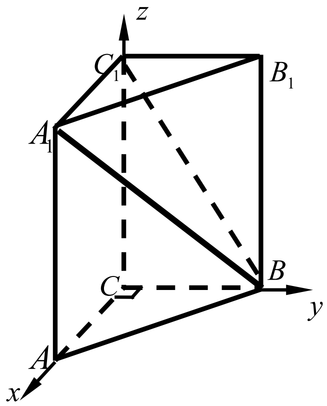
$\therefore$ $\angle A_1BC_1$ 是直线 A_1B 与平面 BB_1C_1C 所成的角．

$BC_1=\sqrt{CC_1{}^2+BC^2}=\sqrt{5}$，$\therefore$ $\tan\angle A_1BC_1=\frac{A_1C_1}{BC_1}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，



则 $\angle A_1BC_1 = \arctan\frac{\sqrt{5}}{5}$．即直线 A_1B 与平面 BB_1C_1C 所成角的大小为 $\arctan\frac{\sqrt{5}}{5}$．

法二： 由题意，可得



体积 $V = CC_1 \cdot S_{\triangle ABC} = CC_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2}CC_1 = 1$，

$\therefore \quad CC_1 = 2$，

如图，建立空间直角坐标系．得点 $B(0,1,0)$，

$C_1(0,0,2)$，$A_1(1,0,2)$．则 $\overrightarrow{A_1B} = (-1,1,-2)$，

平面 BB_1C_1C 的法向量为 $\vec{n} = (1,0,0)$．

设直线 A_1B 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 θ，$\overrightarrow{A_1B}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角为 φ，

则 $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{A_1B} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{A_1B}| \cdot |\vec{n}|} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$，　$\therefore \quad \sin\theta = |\cos\varphi| = \frac{\sqrt{6}}{6}$，　$\theta = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$，

即直线 A_1B 与平面 BB_1C_1C 所成角的大小为 $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$．

17．（本题满分14分）

在△ABC 中，a，b，c 分别是三个内角 A，B，C 的对边．若 $a = 2$，$C = \frac{\pi}{4}$，

$\cos\frac{B}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$，求△$ABC$ 的面积 S．

【解析】 由题意，得 $\cos B = \frac{3}{5}$，B 为锐角，$\sin B = \frac{4}{5}$，

$\sin A = \sin(\pi - B - C) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} - B\right) = \frac{7\sqrt{2}}{10}$，

由正弦定理得 $c = \frac{10}{7}$，　$\therefore \quad S = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{10}{7} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{7}$．

18．（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分．

近年来，太阳能技术运用的步伐日益加快．2002年全球太阳电池的年生产量达到670兆

瓦，年生产量的增长率为34%．以后四年中，年生产量的增长率逐年递增2%

（如，2003年的年生产量的增长率为36%）．

（1）求2006年全球太阳电池的年生产量（结果精确到0.1兆瓦）；

（2）目前太阳电池产业存在的主要问题是市场安装量远小于生产量，2006年的实际安装量为1420兆瓦．假设以后若干年内太阳电池的年生产量的增长率保持在42%，到2010年，要使年安装量与年生产量基本持平（即年安装量不少于年生产量的95%），这四年中太阳电池的年安装量的平均增长率至少应达到多少（结果精确到0.1%）？

【解析】（1）由已知得2003，2004，2005，2006年太阳电池的年生产量的增长率依次为

36%，38%，40%，42%．

则2006年全球太阳电池的年生产量为 $670\times1.36\times1.38\times1.40\times1.42\approx2499.8$ (兆瓦).

（2）设太阳电池的年安装量的平均增长率为 x，则 $\dfrac{1420(1+x)^4}{2499.8(1+42\%)^4}\geqslant 95\%$．解得 $x\geqslant 0.615$

.

因此，这四年中太阳电池的年安装量的平均增长率至少应达到 61.5%．

19．（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分7分，第2小题满分7分．

已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{a}{x}$ （$x\neq 0$，常数 $a\in\mathbf{R}$）．

（1）讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性，并说明理由；

（2）若函数 $f(x)$ 在 $x\in[2,+\infty)$ 上为增函数，求 a 的取值范围．

【解析】（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=x^2$，

对任意 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$，$\therefore$ $f(x)$ 为偶函数．

当 $a\neq 0$ 时，$f(x)=x^2+\dfrac{a}{x}(a\neq 0, x\neq 0)$，

取 $x=\pm1$，得 $f(-1)+f(1)=2\neq 0$，$f(-1)-f(1)=-2a\neq 0$，

$\therefore$ $f(-1)\neq -f(1)$，$f(-1)\neq f(1)$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 既不是奇函数，也不是偶函数．

（2）解法一：设 $2\leqslant x_1<x_2$，

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2+\dfrac{a}{x_1}-x_2^2-\dfrac{a}{x_2}=\dfrac{(x_1-x_2)}{x_1x_2}[x_1x_2(x_1+x_2)-a]$，

要使函数 $f(x)$ 在 $x\in[2,+\infty)$ 上为增函数，必须 $f(x_1)-f(x_2)<0$ 恒成立.

$\because$ $x_1-x_2<0$，$x_1x_2>4$，即 $a<x_1x_2(x_1+x_2)$ 恒成立.

又$\because$ $x_1+x_2>4$，$\therefore$ $x_1x_2(x_1+x_2)>16$． $\therefore$ a 的取值范围是 $(-\infty,16]$．

解法二：当 $a=0$ 时，$f(x)=x^2$，显然在 $[2,+\infty)$ 为增函数.

当 $a<0$ 时，反比例函数 $\dfrac{a}{x}$ 在 $[2,+\infty)$ 为增函数，$\therefore$ $f(x)=x^2+\dfrac{a}{x}$ 在 $[2,+\infty)$ 为增函数

.

当 $a>0$ 时，同解法一.

20．（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分6分，第3小题满分9分．

如果有穷数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$（n 为正整数）满足条件 $a_1=a_n$，$a_2=a_{n-1}$，…，$a_n=a_1$，即 $a_i=a_{n-i+1}$（$i=1,2,\cdots,n$），我们称其为“对称数列”．例如，由组合数组成的数列 $C_m^0,C_m^1,\cdots,C_m^m$ 就是“对称数列”．

（1）设 $\{b_n\}$ 是项数为7的“对称数列”，其中 b_1,b_2,b_3,b_4 是等差数列，且 $b_1=2$，$b_4=11$．依次写出 $\{b_n\}$ 的每一项；

（2）设 $\{c_n\}$ 是项数为 $2k-1$(正整数 $k>1$)的“对称数列”，其中 $c_k,c_{k+1},\cdots,c_{2k-1}$ 是首项为 50，公差为 -4 的等差数列．记 $\{c_n\}$ 各项的和为 S_{2k-1}．当 k 为何值时，S_{2k-1} 取得最大值？并求出 S_{2k-1} 的最大值；

（3）对于确定的正整数 $m>1$，写出所有项数不超过 $2m$ 的“对称数列”，使得 $1,2,2^2,\cdots,2^{m-1}$ 依次是该数列中连续的项；当 $m>1500$ 时，求其中一个“对称数列”前 2008 项的和 S_{2008}．

【解析】（1）设 $\{b_n\}$ 的公差为 d，则 $b_4=b_1+3d=2+3d=11$，解得 $d=3$，

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 为 $2,5,8,11,8,5,2$．

（2）$S_{2k-1}=c_1+c_2+\cdots+c_{k-1}+c_k+c_{k+1}+\cdots+c_{2k-1}=2(c_k+c_{k+1}+\cdots+c_{2k-1})-c_k$，

$S_{2k-1}=-4(k-13)^2+4\times13^2-50$，

$\therefore$ 当 $k=13$ 时，S_{2k-1} 取得最大值．S_{2k-1} 的最大值为626．

（3）所有可能的“对称数列”是：

① $1,2,2^2,\cdots,2^{m-2},2^{m-1},2^{m-2},\cdots,2^2,2,1$；

② $1,2,2^2,\cdots,2^{m-2},2^{m-1},2^{m-1},2^{m-2},\cdots,2^2,2,1$；

③ $2^{m-1},2^{m-2},\cdots,2^2,2,1,2,2^2,\cdots,2^{m-2},2^{m-1}$；

④ $2^{m-1},2^{m-2},\cdots,2^2,2,1,1,2,2^2,\cdots,2^{m-2},2^{m-1}$．

对于①，当 $m\geqslant 2008$ 时，$S_{2008}=1+2+2^2+\cdots+2^{2007}=2^{2008}-1$．

当 $1500<m\leqslant 2007$ 时，$S_{2008}=1+2+\cdots+2^{m-2}+2^{m-1}+2^{m-2}+\cdots+2^{2m-2009}$

$=2^m-1+2^{m-1}-2^{2m-2009}=2^m+2^{m-1}-2^{2m-2009}-1$．

对于②，当 $m\geqslant 2008$ 时，$S_{2008}=2^{2008}-1$．

当 $1500<m\leqslant 2007$ 时，$S_{2008}=2^{m+1}-2^{2m-2008}-1$．

对于③，当 $m\geqslant 2008$ 时，$S_{2008}=2^m-2^{m-2008}$．

当 $1500<m\leqslant 2007$ 时，$S_{2008}=2^m+2^{2009-m}-3$．

对于④，当 $m\geqslant 2008$ 时，$S_{2008}=2^m-2^{m-2008}$．

当 $1500<m\leqslant 2007$ 时，$S_{2008}=2^m+2^{2008-m}-2$．

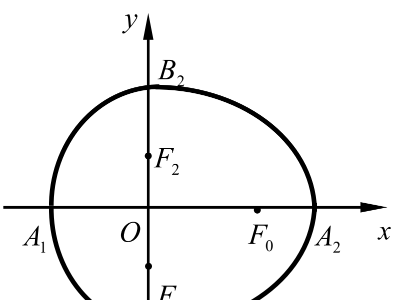
21．（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分8分．

我们把由半椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (x\geqslant 0)$ 与半椭圆 $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2}{c^2}=1\ (x\leqslant 0)$

合成的曲线称作“果圆”，其中 $a^2=b^2+c^2$，$a>0$，$b>c>0$．

如图，点 F_0，F_1，F_2 是相应椭圆的焦点，A_1，A_2 和 B_1，B_2 分别是“果圆”与 x，y 轴的交点．

（2） 若 $\triangle F_0F_1F_2$ 是边长为1的等边三角形，

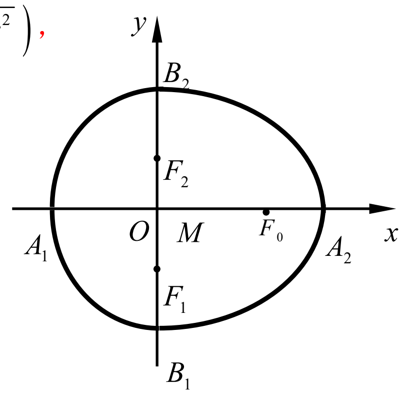


求“果圆”的方程；

（2）当$|A_1A_2|>|B_1B_2|$时，求$\dfrac{b}{a}$的取值范围；

（3）连接“果圆”上任意两点的线段称为“果圆”的弦．

试研究：是否存在实数k，使斜率为k的“果圆”平行弦的中点轨迹总是落在某个椭圆上？若存在，求出所有可能的k值；若不存在，说明理由．



【解析】（1）∵ $F_0(c,0)$，$F_1\left(0,-\sqrt{b^2-c^2}\right)$，$F_2\left(0,\sqrt{b^2-c^2}\right)$，

∴ $|F_0F_2|=\sqrt{(b^2-c^2)+c^2}=b=1$，$|F_1F_2|=2\sqrt{b^2-c^2}=1$，

于是$c^2=\dfrac{3}{4}$，$a^2=b^2+c^2=\dfrac{7}{4}$，所求“果圆”方程为

$\dfrac{4}{7}x^2+y^2=1\ (x\geqslant 0)$，$y^2+\dfrac{4}{3}x^2=1\ (x\leqslant 0)$

（2）由题意，得 $a+c>2b$，即$\sqrt{a^2-b^2}>2b-a$．

∵ $(2b)^2>b^2+c^2=a^2$，∴ $a^2-b^2>(2b-a)^2$，得$\dfrac{b}{a}<\dfrac{4}{5}$．

又$b^2>c^2=a^2-b^2$，∴ $\dfrac{b^2}{a^2}>\dfrac{1}{2}$． ∴ $\dfrac{b}{a}\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{4}{5}\right)$．

（3）设“果圆”C的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (x\geqslant 0)$，$\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2}{c^2}=1\ (x\leqslant 0)$．

记平行弦的斜率为k．

当$k=0$时，直线$y=t\,(-b\leqslant t\leqslant b)$与半椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (x\geqslant 0)$的交点是

$P\left(a\sqrt{1-\dfrac{t^2}{b^2}},t\right)$，与半椭圆$\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2}{c^2}=1\ (x\leqslant 0)$的交点是$Q\left(-c\sqrt{1-\dfrac{t^2}{b^2}},t\right)$．

∴ P，Q的中点$M\ (x,y)$满足$\begin{cases}x=\dfrac{a-c}{2}\cdot\sqrt{1-\dfrac{t^2}{b^2}},\\ y=t,\end{cases}$ 得$\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$．

∵ $a<2b$，∴ $\left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2-b^2=\dfrac{a-c-2b}{2}\cdot\dfrac{a-c+2b}{2}\neq 0$．

综上所述，当$k=0$时，“果圆”平行弦的中点轨迹总是落在某个椭圆上．

当$k>0$时，以k为斜率过B_1的直线l与半椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (x\geqslant 0)$

的交点是$\left(\dfrac{2ka^2b}{k^2a^2+b^2},\dfrac{k^2a^2b-b^3}{k^2a^2+b^2}\right)$．

由此，在直线l右侧，以k为斜率的平行弦的中点轨迹在直线$y=-\dfrac{b^2}{ka^2}x$上，

即不在某一椭圆上．

当$k<0$时，可类似讨论得到平行弦中点轨迹不都在某一椭圆上．