

2021年普通高等学校招生全国统一 考试（全国乙卷）

数学（文）

一、选择题

1. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，集合 $M = \{1, 2\}$ ， $N = \{3, 4\}$ ，则 $C_U(M \cup N) = (\quad)$

- A. $\{5\}$
- B. $\{1, 2\}$
- C. $\{3, 4\}$
- D. $\{1, 2, 3, 4\}$

答案A

【解析】首先进行并集运算，然后进行补集运算即可.

由题意可得： $M \cup N = \{1, 2, 3, 4\}$ ，则 $C_U(M \cup N) = \{5\}$.

故选：A.

2. 设 $iz = 4 + 3i$ ，则 $z = (\quad)$

- A. $-3 - 4i$
- B. $-3 + 4i$
- C. $3 - 4i$
- D. $3 + 4i$

答案C

【解析】由题意结合复数的运算法则即可求得 z 的值.

由题意可得： $z = \frac{4 + 3i}{i} = \frac{(4 + 3i)i}{i^2} = \frac{4i - 3}{-1} = 3 - 4i$.

故选：C.

3. 已知命题 $p: \exists x \in R, \sin x < 1$; 命题 $q: \forall x \in R, e^{|x|} \geq 1$, 则下列命题中为真命题的是 ()

- A. $p \wedge q$
- B. $\neg p \wedge q$
- C. $p \wedge \neg q$
- D. $\neg(p \vee q)$

答案:

A

解析:

根据正弦函数的值域 $\sin x \in [-1, 1]$, $\sin x < 1$, 故 $\exists x \in R$, p 为真命题, 而函数 $y = e^{|x|}$ 为偶函数, 且 $x \geq 0$ 时, $y = e^x \geq 1$, 故 $\forall x \in R$, $y = e^{|x|} \geq 1$ 恒成立. 则 q 也为真命题, 所以 $p \wedge q$ 为真, 选A.

4. 函数 $f(x) = \sin \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{3}$ 的最小正周期和最大值分别是 ()

- A. 3π 和 $\sqrt{2}$
- B. 3π 和 2
- C. 6π 和 $\sqrt{2}$
- D. 6π 和 2

答案:

C

解析:

$$f(x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(x)_{\max} = \sqrt{2}, \quad T = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi.$$

故选C.

5. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \geq 4, \\ x - y \leq 2, \\ y \leq 3, \end{cases}$ 则 $z = 3x + y$ 的最小值为 ()

- A. 18
- B. 10
- C. 6
- D. 4

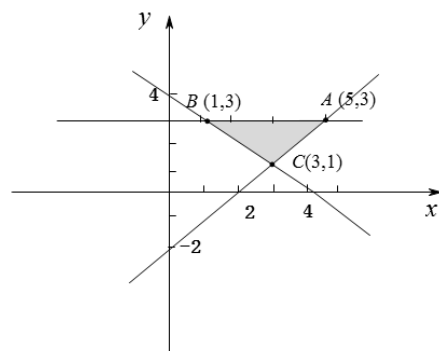
答案:

C

解析:

根据约束条件可得图像如下， $z = 3x + y$ 的最小值，即 $y = -3x + z$ ， y 轴截距最小值. 根

据图像可知 $y = -3x + z$ 过点 $B(1,3)$ 时满足题意，即 $z_{\min} = 3 + 3 = 6$.



6. $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{5\pi}{12} = ()$

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

答案:

D

解析:

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{5\pi}{12} = \cos^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \text{选D.}$$

7. 在区间 $(0, \frac{1}{2})$ 随机取1个数, 则取到的数小于 $\frac{1}{3}$ 的概率为 ()

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{6}$

答案:

B

解析:

在区间 $(0, \frac{1}{2})$ 随机取1个数, 可知总长度 $d = \frac{1}{2}$, 取到的数小于 $\frac{1}{3}$, 可知取到的长度范围

$$d' = \frac{1}{3}, \text{ 根据几何概型公式 } p = \frac{d'}{d} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \therefore \text{选B.}$$

8. 下列函数中最小值为4的是 ()

A. $y = x^2 + 2x + 4$

B. $y = |\sin x| + \frac{4}{|\sin x|}$

C. $y = 2^x + 2^{2-x}$

D. $y = \ln x + \frac{4}{\ln x}$

答案:

C

解析:

对于A, $y = x^2 + 2x + 4 = x^2 + 2x + 1 + 3 = (x+1)^2 + 3 \geq 3$. 不符合,

对于B, $y = |\sin x| + \frac{4}{|\sin x|}$, 令 $t = |\sin x| \in [0, 1]$, $\therefore y = t + \frac{4}{t}$,

根据对勾函数 $y_{\min} = 1 + 4 = 5$ 不符合，

对于C, $y = 2^x + 2^{2-x} = 2^x + \frac{4}{2^x}$, 令 $t = 2^x > 0$,

$$\therefore y = t + \frac{4}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{4}{t}} = 2 \times 2 = 4,$$

当且仅当 $t = 2$ 时取等，符合，

对于D, $y = \ln x + \frac{4}{\ln x}$, 令 $t = \ln x \in \mathbb{R}$, $y = t + \frac{4}{t}$.

根据对勾函数 $y \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$, 不符合.

9. 设函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 则下列函数中为奇函数的是 ()

A. $f(x-1)-1$

B. $f(x-1)+1$

C. $f(x+1)-1$

D. $f(x+1)+1$

答案:

B

解析:

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x},$$

$f(x)$ 向右平移一个单位, 向上平移一个单位得到 $g(x) = \frac{2}{x}$ 为奇函数.

所以选B.

10. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为 B_1D_1 的中点, 则直线 PB 与 AD_1 所成的角为

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{6}$

答案:

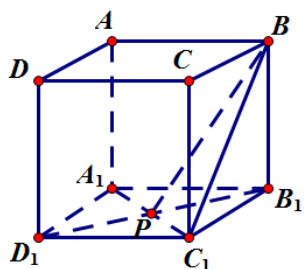
D

解析:

做出图形, $AD_1 // BC_1$, 所以 $\angle PBC_1$ 为异面直线所成角, 设棱长为1.

$$BC_1 = \sqrt{2}, \quad B_1P = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad PC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad BP = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\cos \angle PBC_1 = \frac{BC_1^2 + BP^2 - C_1P^2}{2BP \cdot BC_1} = \frac{2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{2 \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{即 } \angle PBC_1 = \frac{\pi}{6}, \quad \text{故选D.}$$



11. 设 B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 的上顶点, 点 P 在 C 上, 则 $|PB|$ 的最大值为

A. $\frac{5}{2}$

B. $\sqrt{6}$

C. $\sqrt{5}$

D. 2

答案:

A

解析:

方法一: 由 $C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$, $B(0,1)$

$$\text{则 } C \text{ 的参数方程: } \begin{cases} x = \sqrt{5} \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}.$$

$$|PB| = \sqrt{(\sin \theta - 1)^2 + (\sqrt{5} \cos \theta)^2}$$

$$= \sqrt{-4 \sin^2 \theta - 2 \sin \theta + 6}$$

$$= \sqrt{-4\left(\sin\theta + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{25}{4}} \geq \frac{5}{2}.$$

$\therefore |PB|_{\max} = \frac{5}{2}$, 故选A.

方法二: 设 $P(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{5} + y_0^2 = 1 (y_0 \in [-1, 1])$ ①, $B(0, 1)$.

$$\text{因此 } |PB|^2 = x_0^2 + (y_0 - 1)^2 \text{ ②}$$

将①式代入②式化简得:

$$|PB|^2 = -4\left(y_0 + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{25}{4} \geq \frac{25}{4}, \text{ 当且仅当 } y_0 = -\frac{1}{4} \text{ 时 } |PB| \text{ 的最大值为 } \frac{5}{2}, \text{ 故选A.}$$

12. 设 $a \neq 0$, 若 $x = a$ 为函数 $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点, 则

- A. $a < b$
- B. $a > b$
- C. $ab < a^2$
- D. $ab > a^2$

答案:

D

解析:

$$f'(x) = 2a(x-a)(x-b) + a(x-a)^2 = a(x-a)(3x-2b-a)$$

当 $a > 0$ 时, 原函数先增再减后增.

原函数在 $f'(x) = 0$ 的较小零点时取得极大值.

$$\text{即 } a < \frac{a+2b}{3}, \text{ 即 } a < b, \therefore a^2 < ab.$$

当 $a < 0$ 时, 原函数先减再增后减.

原函数在 $f'(x) = 0$ 的较大零点时取得极大值.

$$\text{即 } a > \frac{a+2b}{3}, a > b, a^2 < ab, \text{ 故选D.}$$

二、填空题

13. 已知向量 $\vec{a} = (2, 5)$, $\vec{b} = (\lambda, 4)$, 若 $\vec{a} // \vec{b}$, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案:

$$\frac{8}{5}$$

解析:

由已知 $\vec{a} // \vec{b}$ 可得 $2 \times 4 = 5\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{8}{5}$.

14. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的右焦点到直线 $x + 2y - 8 = 0$ 的距离为_____.

答案:

$$\sqrt{5}$$

解析:

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的右焦点为 $(3, 0)$, 到直线 $x + 2y - 8 = 0$ 的距离 $d = \frac{|3 - 8|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$.

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 面积为 $\sqrt{3}$, $B = 60^\circ$,

$a^2 + c^2 = 3ac$, 则 $b =$ _____.

答案:

$$2\sqrt{2}$$

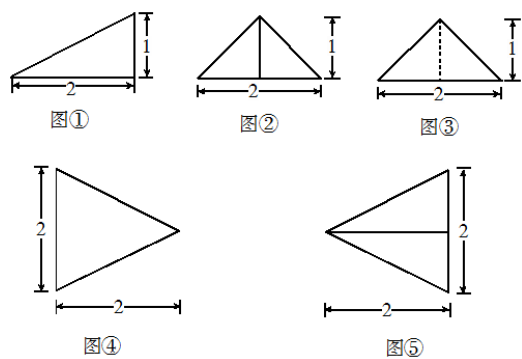
解析:

由面积公式 $S = \frac{1}{2}ac \sin B = \sqrt{3}$, 且 $B = 60^\circ$, 解得 $ac = 4$,

又由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, $a^2 + c^2 = 3ac$, 且 $b > 0$

解得 $b = 2\sqrt{2}$.

16. 以图①为正视图, 在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图, 组成某个三棱锥的三视图, 则所选侧视图和俯视图的编号依次为_____ (写出符合要求的一组答案即可).



答案：

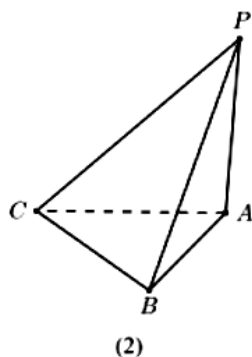
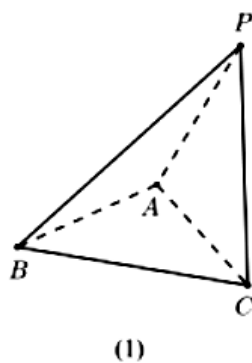
②⑤或③④

解析：

由高度可知，侧视图只能为②或③.

侧视图为②，如图（1），平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ， $PA = PC = \sqrt{2}$ ， $BA = BC = \sqrt{5}$ ， $AC = 2$ ，俯视图为⑤.

俯视图为③，如图（2）， $PA \perp$ 平面 ABC ， $PA = 1$ ， $AC = AB = \sqrt{5}$ ， $BC = 2$ ，俯视图为④.



17. 某厂研制了一种生产高精产品的设备，为检验新设备生产产品的某项指标有无提高，用一台旧设备和一台新设备各生产了10件产品，得到各件产品该项指标数据如下：

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为 \bar{x} 和 \bar{y} ，样本方差分别记为 s_1^2 和 s_2^2 。

(1) 求 \bar{x} ， \bar{y} ， s_1^2 ， s_2^2 ；

(2) 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高（如果

$\bar{y} - \bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{10}}$ ，则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高，否则

不认为有显著提高）。

答案：

见解析

解析：

$$\bar{x} = \frac{9.8 + 10.3 + 10 + 10.2 + 9.9 + 9.8 + 10 + 10.1 + 10.2 + 9.7}{10} = 10;$$

$$\bar{y} = \frac{10.1 + 10.4 + 10.1 + 10 + 10.1 + 10.3 + 10.6 + 10.5 + 10.4 + 10.5}{10} = 10.3.$$

$$s_1^2 = \frac{1}{10}(0.04 + 0.09 + 0.04 + 0.01 + 0.04 + 0.01 + 0.04 + 0.09)$$

$$= \frac{1}{10} \times 0.36 = 0.036$$

$$s_2^2 = \frac{1}{10}(0.04 + 0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.04 + 0.09 + 0.04 + 0.01 + 0.04)$$

$$= \frac{1}{10} \times 0.4 = 0.04.$$

$$(2) \bar{y} - \bar{x} = 10.3 - 10 = 0.3$$

$$2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{10}} = 2\sqrt{\frac{0.036 + 0.04}{10}} = 2\sqrt{0.0076}.$$

$$\because 0.3 = \sqrt{0.09} > 2\sqrt{0.0076} = \sqrt{0.0304}$$

，所以可判断新设备生产产品的该项指标的均值

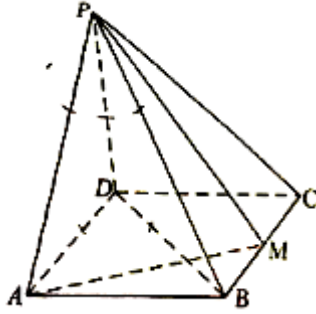
较旧设备有显著提高；

没有显著提高.

18. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形， $PD \perp$ 底面 $ABCD$ ， M 为 BC 的中点，且 $PB \perp AM$ 。

(1) 证明：平面 $PAM \perp$ 平面 PBD ；

(2) 若 $PD = DC = 1$ ，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积。



答案：

见解析

解析：

19. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{na_n}{3}$ 。已知 $a_1, 3a_2, 9a_3, \dots$ 成等差数列。

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 记 S_n 和 T_n 分别为 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和。证明： $T_n < \frac{S_n}{2}$ 。

答案：

见解析

解析：

设 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，则 $a_n = q^{n-1}$ ，

因为 $a_1, 3a_2, 9a_3$ 成等差数列，所以 $1 + 9q^2 = 2 \times 3q$ ，解得 $q = \frac{1}{3}$ ，

$$\text{故 } a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \quad S_n = \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right).$$

$$\text{又 } b_n = \frac{n}{3^n}, \quad \text{则 } T_n = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n-1}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^n},$$

$$\text{两边同乘 } \frac{1}{3}, \quad \text{则 } \frac{1}{3}T_n = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \dots + \frac{n-1}{3^n} + \frac{n}{3^{n+1}},$$

两式相减，得 $\frac{2}{3}T_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}}$ ，

$$\text{即 } \frac{2}{3}T_n = \frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^n}) - \frac{n}{3^{n+1}}$$

$$\text{整理得 } T_n = \frac{3}{4}(1-\frac{1}{3^n}) - \frac{n}{2 \times 3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2 \times 3^n}$$

$$2T_n - S_n = 2(\frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2 \times 3^n}) - \frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^n}) = -\frac{4n+3}{2 \times 3^n} < 0,$$

$$\text{故 } T_n < \frac{S_n}{2}.$$

20. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 到准线的距离为 2.

(1) 求 C 的方程，

(2) 已知 O 为坐标原点，点 P 在 C 上，点 Q 满足 $\overrightarrow{PQ} = 9\overrightarrow{QF}$ ，求直线 OQ 斜率的最大值

.

答案：

见解析

解析：

(1) 由焦点到准线的距离为 p ，则 $p = 2$.

抛物线 c 的方程： $y^2 = 4x$.

(2) 设点 $P(\frac{y_0^2}{4}, y_0)$ ， $Q(x_Q, y_Q)$ ， $F(1, 0)$.

$$\because \overrightarrow{PQ} = 9\overrightarrow{QF}.$$

$$\therefore (x_Q - \frac{y_0^2}{4}, y_Q - y_0) = 9(1 - x_Q, -y_Q) \Rightarrow \begin{cases} x_Q - \frac{y_0^2}{4} = 9 - 9x_Q \\ y_Q - y_0 = -9y_Q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_Q = \frac{9 + \frac{y_0^2}{4}}{10} \\ y_Q = \frac{y_0}{10} \end{cases}$$

$$\text{则 } k_{OQ} = \frac{y_Q}{x_Q} = \frac{y_0}{9 + \frac{y_0^2}{4}} = \frac{1}{\frac{9}{y_0} + \frac{y_0}{4}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{1}{3}.$$

∴直线 OQ 斜率的最大值为 $\frac{1}{3}$.

21. 已知函数 $f(x) = x^3 - x^2 + ax + 1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 求曲线 $y = f(x)$ 过坐标原点的切线与曲线 $y = f(x)$ 的公共点的坐标.

答案:

见解析

解析:

$$(1) f'(x) = 3x^2 - 2x + a$$

(i) 当 $\Delta = 4 - 12a \leq 0$, 即 $a \geq \frac{1}{3}$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 即 $f(x)$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上单调递增.

(ii) 当 $\Delta = 4 - 12 > 0$, 即 $a < \frac{1}{3}$ 时, $f'(x) = 0$ 解得, $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 3a}}{3}$,

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 3a}}{3}.$$

x	$(-\infty, \frac{1 - \sqrt{1 - 3a}}{3})$	$\frac{1 - \sqrt{1 - 3a}}{3}$	$(\frac{1 - \sqrt{1 - 3a}}{3}, \frac{1 + \sqrt{1 - 3a}}{3})$	$\frac{1 + \sqrt{1 - 3a}}{3}$	$(\frac{1 + \sqrt{1 - 3a}}{3}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

∴ $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1 - \sqrt{1 - 3a}}{3})$, $(\frac{1 + \sqrt{1 - 3a}}{3}, +\infty)$ 单调递增, 在 $(\frac{1 - \sqrt{1 - 3a}}{3}, \frac{1 + \sqrt{1 - 3a}}{3})$ 单

调递减, 综上所述: 当 $a \geq \frac{1}{3}$ 时, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增; 当 $a < \frac{1}{3}$ 时, $f(x)$ 在

$(\frac{1 - \sqrt{1 - 3a}}{3}, \frac{1 + \sqrt{1 - 3a}}{3})$ 单调递减.

(2) 设可原点切线的切点为 $(t, t^3 - t^2 + at + 1)$, 切线斜率 $k = f'(t) = 3t^2 - 2t + a$. 又

$k = \frac{t^3 - t^2 + at + 1}{t}$, 可得 $\frac{t^3 - t^2 + at + 1}{t} = 3t^2 - 2t + a$. 化简得 $(t - 1)(2t^2 + t + 1) = 0$, 即

$t = 1$. ∴切点为 $(1, a + 1)$, 斜率 $k = a + 1$, 切线方程为 $y = (a + 1)x$, 将 $y = (a + 1)x$,

$y = x^3 - x^2 + ax + 1$ 联立可得 $x^3 - x^2 + ax + 1 = (a+1)x$ ，化简得 $(x-1)^2(x+1) = 0$ ，解得 $x_1 = 1$ ， $x_2 = -1$ 。∴过原点的切线与 $y = f(x)$ 公共点坐标为 $(1, a+1)$ ， $(-1, -a-1)$ 。

22. 在直角坐标系 xOy 中， $\odot C$ 的圆心为 $C(2,1)$ ，半径为 1。

(1) 写出 $\odot C$ 的一个参数方程；

(2) 过点 $F(4,1)$ 作 $\odot C$ 的两条切线. 以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立坐标系，

求这两条切线的极坐标方程.

答案：

见解析

解析：

(1) $\odot C$ 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 2 + \cos \theta \\ y = 1 + \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数})$$

(2) $\odot C$ 的方程为 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

①当直线斜率不存在时，直线方程为 $x = 4$ ，此时圆心到直线距离为 $2 > r$ ，舍去；

②当直线斜率存在时，设直线方程为 $y-1 = k(x-4)$ ，化简为 $kx - y - 4k + 1 = 0$ ，

此时圆心 $C(2,1)$ 到直线的距离为 $d = \frac{|2k - 1 - 4k + 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = r = 1$ ，

化简得 $2|k| = \sqrt{k^2 + 1}$ ，

两边平方有 $4k^2 = k^2 + 1$ ，所以 $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

代入直线方程并化简得 $x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} - 4 = 0$ 或 $x + \sqrt{3}y - \sqrt{3} - 4 = 0$ 化为极坐标方程为

$$\rho \cos \theta - \sqrt{3} \rho \sin \theta = 4 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \rho \sin(\theta + \frac{5\pi}{6}) = 4 - \sqrt{3}$$

$$\text{或 } \rho \cos \theta + \sqrt{3} \rho \sin \theta = 4 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \rho \sin(\theta + \frac{\pi}{6}) = 4 + \sqrt{3}.$$

23. 已知函数 $f(x) = |x-a| + |x+3|$ 。

(1) 当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x) \geq 6$ 的解集；

(2) 若 $f(x) > -a$, 求 a 的取值范围.

答案:

见解析

解析:

当 $a=1$ 时, $f(x) \geq 6 \Leftrightarrow |x-1| + |x+3| \geq 6$,

当 $x \leq -3$ 时, 不等式 $\Leftrightarrow 1-x-x-3 \geq 6$, 解得 $x \leq -4$;

当 $-3 < x < 1$ 时, 不等式 $\Leftrightarrow 1-x+x+3 \geq 6$, 解得 $x \in \emptyset$;

当 $x \geq 1$ 时, 不等式 $\Leftrightarrow x-1+x+3 \geq 6$, 解得 $x \geq 2$.

综上, 原不等式的解集为 $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$.

(2) 若 $f(x) > -a$, 即 $f(x)_{\min} > -a$,

因为 $f(x) = |x-a| + |x+3| \geq |(x-a) - (x+3)| = |a+3|$ (当且仅当 $(x-a)(x+3) \leq 0$ 时,

等号成立), 所以 $f(x)_{\min} = |a+3|$, 所以 $|a+3| > -a$, 即 $a+3 < a$ 或 $a+3 > -a$, 解得

$a \in (-\frac{3}{2}, +\infty)$.