

1993年北京高考文科数学真题及答案

一. 选择题: 本题共 18 个小题; 每小题 3 分, 共 54 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。把所选项前的字母填在题后括号内。

(1) 若双曲线实半轴长为 2, 焦距为 6, 那么离心率是 (C)

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2

(2) 函数 $y = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 2x}{1 + \operatorname{tg}^2 2x}$ 的最小正周期是 (B)

- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) 2π

(3) 当圆锥的侧面积和底面积的比值是 $\sqrt{2}$ 时, 圆锥的轴截面顶角是

- (A) 45° (B) 60° (C) 90° (D) 120° (C)

(4) 当 $z = -\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ 时, $z^{100} + z^{50} + 1$ 的值等于 (D)

- (A) 1 (B) -1 (C) i (D) -i

(5) 若正棱锥的底面边长与侧棱长相等, 则该棱锥一定不是

- (A) 三棱锥 (B) 四棱锥 (C) 五棱锥 (D) 六棱锥 (D)

(6) 在直角三角形中两锐角为 A 和 B, 则 $\sin A \sin B$ (B)

- (A) 有最大值 $\frac{1}{2}$ 和最小值 0 (B) 有最大值 $\frac{1}{2}$, 但无最小值

(C) 即无最大值也无最小值 (D) 有最大值 1, 但无最小值

(7) 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_5 a_6 = 9$, 则

$\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \cdots + \log_3 a_{10} =$ (B)

- (A) 12 (B) 10 (C) 8 (D) $2 + \log_3 5$

(8) $F(x) = (1 + \frac{2}{2^x - 1})f(x) (x \neq 0)$ 是偶函数, 且 $f(x)$ 不恒等于零, 则 $f(x)$

(A)

- (A) 是奇函数 (B) 是偶函数

(C) 可能是奇函数也可能是偶函数 (D) 不是奇函数也不是偶函数

(9) 设直线 $2x - y - \sqrt{3} = 0$ 与 y 轴的交点为 P , 点 P 把圆 $(x+1)^2 + y^2 = 25$ 的直径分为两段, 则其长度之比为 (A)

(A) $\frac{7}{3}$ 或 $\frac{3}{7}$ (B) $\frac{7}{4}$ 或 $\frac{4}{7}$ (C) $\frac{7}{5}$ 或 $\frac{5}{7}$ (D) $\frac{7}{6}$ 或 $\frac{6}{7}$

(10) 若 a, b 是任意实数, 且 $a > b$, 则 (D)

(A) $a^2 > b^2$ (B) $\frac{b}{a} < 1$ (C) $\lg(a-b) > 0$ (D) $(\frac{1}{2})^a < (\frac{1}{2})^b$

(11) 已知集合 $E = \{\theta | \cos \theta < \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, $F = \{\theta | \tan \theta < \sin \theta\}$, 那么 $E \cap F$ 为区间 (A)

(A) $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ (B) $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ (C) $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ (D) $(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$

(12) 一动圆与两圆: $x^2 + y^2 = 1$ 和 $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ 都外切, 则动圆圆心的轨迹为

(C)

(A) 抛物线 (B) 圆 (C) 双曲线的一支 (D) 椭圆

(13) 若直线 $ax + by + c = 0$ 在第一、二、三象限, 则 (D)

(A) $ab > 0, bc > 0$ (B) $ab > 0, bc < 0$ (C) $ab < 0, bc > 0$ (D) $ab < 0, bc < 0$

(14) 如果圆柱轴截面的周长 l 为定值, 那么圆柱体积的最大值是

(A)

(A) $(\frac{l}{6})^3 \pi$ (B) $(\frac{l}{3})^3 \pi$ (C) $(\frac{l}{4})^3 \pi$ (D) $\frac{1}{4}(\frac{l}{4})^3 \pi$

(15) 由 $(\sqrt{3}x + \sqrt[3]{2})^{100}$ 展开所得的 x 的多项式中, 系数为有理数的共有

(B)

(A) 50 项 (B) 17 项 (C) 16 项 (D) 15 项

(16) 设 a, b, c 都是正数, 且 $3^a = 4^b = 6^c$, 那么 (B)

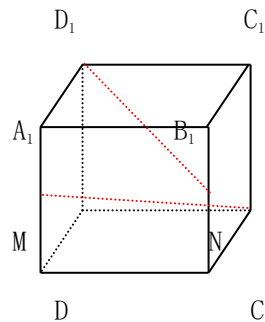
(A) $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (B) $\frac{2}{c} = \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$ (C) $\frac{1}{c} = \frac{2}{a} + \frac{2}{b}$ (D) $\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$

(17) 同室四人各写一张贺年卡, 先集中起来, 然后每人从中拿一张别人送出的贺年卡, 则四张贺年卡不同的分配方式有 (B)

(A) 6 种 (B) 9 种 (C) 11 种 (D) 23 种

(18) 在正方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 中, M 、 N 分别为棱 A_1A 和 B_1B 的中点 (如图)。若 θ 为直线 CM 与 D_1N 所成的角, 则 $\sin \theta =$ (D)

- (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{2}{3}$
 (C) $\frac{2\sqrt{5}}{9}$ (D) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$



二. 填空题: 本大题共 6 小题; 每小题 3 分, 共 18 分。把答案填在题中横线上。

(19) 抛物线 $y^2=4x$ 的弦 AB 垂直于 x 轴, 若 AB 的长为 $4\sqrt{3}$, 则焦点到 AB 的距离为_____。

[答]: 2

(20) 在半径为 30m 的圆形广场中央上空, 设置一个照明光源, 射向地面的光呈圆锥形, 且其轴截面顶角为 120° 。若要光源恰好照亮整个广场, 则其高度应为_____m (精确到)。

[答]:

(21) 在 50 件产品中有 4 件是次品, 从中任意抽出 5 件, 至少有 3 件是次品的抽法共_____种 (用数字作答)。

[答]: 4186

(22) 建造一个容积为 $8m^3$, 深为 2m 的长方体无盖水池。如果池底和池壁的造价每平方米分别为 120 元和 80 元, 那么水池的最低造价为_____元。

[答]: 1760

(23) 设 $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$, 则 $f^{-1}(0) =$ _____

[答]: 1

(24) 设 $a > 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 + a^{n+1}} =$ _____

[答]: -1

三. 解答题: 本大题共 5 小题; 共 48 分. 解答应写出文字说明、演算步骤。

(25) (本小题满分 8 分)

解方程 $\lg(x^2 + 4x - 26) - \lg(x - 3) = 1$.

解：原方程可化为 $\lg \frac{x^2 + 4x - 26}{x - 3} = \lg 10$,

$$\frac{x^2 + 4x - 26}{x - 3} = 10 \text{ 解得 } x_1 = 3 - \sqrt{5}; x_2 = 3 + \sqrt{5}$$

检验： $x = 3 - \sqrt{5}$ 时， $x - 3 = -\sqrt{5} < 0$ 所以是增根

$x = 3 + \sqrt{5}$ 时，满足方程，

所以原方程的根是 $x = 3 + \sqrt{5}$

(26) (本小题满分 8 分)

已知数列 $\frac{8 \cdot 1}{1^2 \cdot 3^2}, \frac{8 \cdot 2}{3^2 \cdot 5^2}, \dots, \frac{8n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}, \dots$ S_n 为其前 n 项和，计算得

$S_1 = \frac{8}{9}, S_2 = \frac{24}{25}, S_3 = \frac{48}{49}, S_4 = \frac{80}{81}$. 观察上述结果，推测出计算 S_n 的公式，并用数学归纳

法加以证明。

解： $S_n = \frac{(2n+1)^2 - 1}{(2n+1)^2} (n \in N)$

证明如下：

(1) 当 $n=1$ 时， $S_1 = \frac{3^2 - 1}{3^2} = \frac{8}{9}$, 等式成立。

(2) 设 $n=k$ 时等式成立，即 $S_k = \frac{(2k+1)^2 - 1}{(2k+1)^2}$

$$\begin{aligned} \text{则 } S_{k+1} &= S_k + \frac{8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2} \\ &= \frac{(2k+1)^2 - 1}{(2k+1)^2} + \frac{8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2} \\ &= \frac{[(2k+1)^2 - 1](2k+3)^2 + 8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2} \\ &= \frac{(2k+1)^2(2k+3)^2 - (2k+3)^2 + 8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2k+1)^2(2k+3)^2 - (2k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2} \\
&= \frac{(2k+3)^2 - 1}{(2k+3)^2} \\
&= \frac{[2(k+1)+1]^2 - 1}{[2(k+1)+1]^2}
\end{aligned}$$

由此可知，当 $n=k+1$ 时等式也成立

根据 (1)，(2) 可知，等式对任何 $n \in N$ 都成立。

(27) (本小题满分 10 分)

如图， $A_1B_1C_1-ABC$ 是直三棱柱，过点 A_1 、 B 、 C_1 的平面和平面 ABC 的交线记作 L 。

(I) 判定直线 A_1C_1 和 L 的位置关系，并加以证明；

(II) 若 $A_1A=1$ ， $AB=4$ ， $BC=3$ ， $\angle ABC=90^\circ$ ，求顶点 A_1 到直线 L 的距离。

解：(I) $L \parallel A_1C_1$ 证明如下：

根据棱柱的定义知

平面 $A_1B_1C_1$ 和平面 ABC 平行。

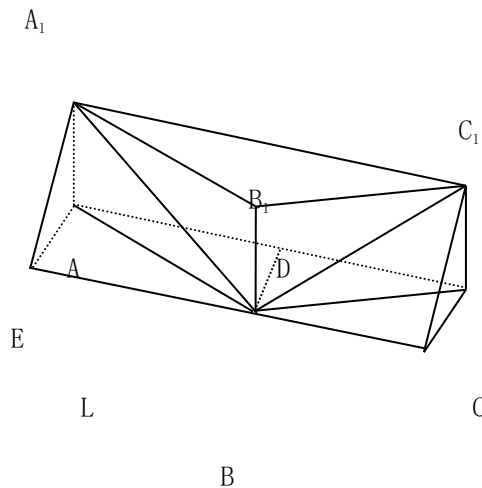
由题设知直线

$A_1C_1 = \text{平面 } A_1B_1C_1 \cap \text{平面 } A_1BC_1$ ，

直线 $L = \text{平面 } A_1B_1C_1 \cap \text{平面 } A_1BC_1$ ，根

据两平面平行的性质定理

有 $L \parallel A_1C_1$



(II) 过点 A_1 作 $A_1E \perp L$ 于 E ，则 A_1E

的长为点 A_1 到 L 的距离。连接 AE ，由直棱柱的定义知 $A_1A \perp$ 平面 ABC

\therefore 直线 AE 是直线 A_1E 在平面 ABC 上的射影。

又 L 在平面 ABC 上，根据三垂线定理的逆定理有 $AE \perp L$

由棱柱的定义质 $A_1C_1 \parallel AC$ ，又 $L \parallel A_1C_1$ ， $\therefore L \parallel AC$

作 $BD \perp AC$ 于 D ，

则 BD 是 $Rt\triangle ABC$ 斜边 AC 上的高，且 $BD=AE$ ，

$$\text{从而 } AE = BD = \frac{AB \times BC}{AC} = \frac{12}{5}$$

在 $Rt\triangle A_1AE$ 中, $\because A_1A=1, \angle A_1AE=90^\circ,$

$$\therefore A_1E = \sqrt{AE^2 + A_1A^2} = \frac{13}{5}.$$

故点 A_1 到直线 L 的距离为 $\frac{13}{5}$.

(28) (本小题满分 10 分)

在面积为 1 的 $\triangle PMN$ 中, $tgM = \frac{1}{2}, tgN = -2$. 建立适当的坐标系, 求出以 M, N 为焦点且过点 P 的椭圆方程.

解: 建立直角坐标系如图:

以 MN 所在直线为 x 轴, 线段 MN 的垂直平分线为 y 轴

$$\text{设所求的椭圆方程为 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

分别记 M, N, P 点的坐标为

$$(-c, 0), (c, 0) \text{ 和 } (x_0, y_0)$$

$$\because tg \alpha = tg(\pi - \angle N) = 2$$

\therefore 由题设知

$$\begin{cases} y_0 = \frac{1}{2}(x_0 + c) \\ y_0 = 2(x_0 - c) \end{cases} \text{ 解得}$$

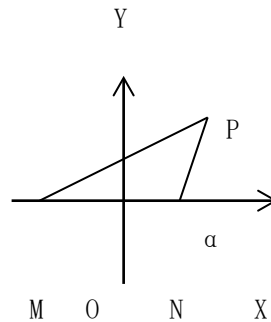
$$\begin{cases} x_0 = \frac{5}{3}c \\ y_0 = \frac{4}{3}c \end{cases} \text{ 即 } P\left(\frac{5}{3}c, \frac{4}{3}c\right)$$

在 $\triangle PMN$ 中, $MN=2c$ MN 上的高为 $\frac{4}{3}c$

$$\therefore S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} \times 2c \times \frac{4}{3}c = 1 \therefore c = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 即 } P\left(\frac{5\sqrt{3}}{6}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$|PM| = \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$$

$$|PN| = \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$



$$\therefore a = \frac{1}{2}(|PM| + |PN|) = \frac{\sqrt{15}}{2} \text{ 从而 } b^2 = a^2 - c^2 = 3$$

$$\text{故所求椭圆方程为 } \frac{4x^2}{15} + \frac{y^2}{3} = 1$$

(29) (本小题满分 12 分)

设复数 $z = \cos \theta + i \sin \theta (0 < \theta < \pi)$, $\omega = \frac{1 - (\bar{z})^4}{1 + z^4}$, 已知 $|\omega| = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\arg \omega < \frac{\pi}{2}$, 求 θ 。

$$\text{解: } \omega = \frac{1 - [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]^4}{1 + [\cos \theta + i \sin \theta]^4} = \frac{1 - \cos(-4\theta) - i(-4\theta)}{1 + \cos 4\theta + i \sin 4\theta}$$

$$= \frac{2 \sin^2 2\theta + 2i \sin 2\theta \cos 2\theta}{2 \cos^2 2\theta + 2i \sin 2\theta \cos 2\theta} = \operatorname{tg} 2\theta (\sin 4\theta + i \cos 4\theta)$$

$$|\omega| = |\operatorname{tg} 2\theta| = \frac{\sqrt{3}}{3} \because 0 < \theta < \pi, \text{ 故有}$$

$$(1) \text{ 当 } \operatorname{tg} 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 时, 得 } \theta = \frac{\pi}{12} \text{ 或 } \theta = \frac{7\pi}{12},$$

这时都有 $\omega = \frac{\sqrt{3}}{3} (\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$, 得 $\arg \omega = \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$, 适合题意

$$(2) \text{ 当 } \operatorname{tg} 2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 时, 得 } \theta = \frac{5\pi}{12} \text{ 或 } \theta = \frac{1\pi}{12},$$

这时都有 $\omega = \frac{\sqrt{3}}{3} (\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6})$, 得 $\arg \omega = \frac{11\pi}{6} > \frac{\pi}{2}$, 不适合题意, 舍去

综合(1),(2)可知 $\theta = \frac{\pi}{12}$ 或 $\theta = \frac{7\pi}{12}$.