# 2010年高考天津卷理科

## 一、选择题

（1）i 是虚数单位，复数$\dfrac{-1+3i}{1+2i}=$

（A）1＋i　　（B）5＋5i　　（C）-5-5i　　（D）-1－i

（2）函数 f（x）$=2^x+3x$ 的零点所在的一个区间是

（A）（－2，－1）　　（B）（－1,0）　　（C）（0,1）　　（D）（1,2）

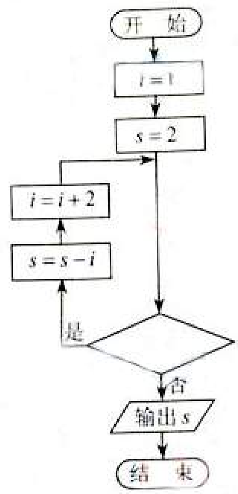
（3）命题“若 f（x）是奇函数，则 f（-x）是奇函数”的否命题是

（A）若 f（x） 是偶函数，则 f（-x）是偶函数　　（B）若 f（x）不是奇函数，则 f（-x）不是奇函数

（C）若 f（-x）是奇函数，则 f（x）是奇函数　　（D）若 f（-x）不是奇函数，则 f（x）不是奇函数

（4）阅读右边的程序框图，若输出 s 的值为-7，则判断框内可填写

（A）i＜3?　　（B）i＜4?　　（C）i＜5?　　（D）i＜6?




（5）已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线方程是 y=$\sqrt{3}x$,它的一个焦点在抛物线$y^2=24x$的准线上，则双曲线的方程为

（A）$\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{108}=1$　（B）$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{27}=1$　（C）$\dfrac{x^2}{108}-\dfrac{y^2}{36}=1$　（D）$\dfrac{x^2}{27}-\dfrac{y^2}{9}=1$

（6）已知$\{a_n\}$是首项为 1 的等比数列，$s_n$是$\{a_n\}$的前 n 项和，且$9s_3=s_6$，则数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$的前 5 项和为

（A）$\dfrac{15}{8}$或 5　（B）$\dfrac{31}{16}$或 5　　（C）$\dfrac{31}{16}$　　（D）$\dfrac{15}{8}$

（7）在△ABC 中，内角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，若$a^2-b^2=\sqrt{3}bc$，$\sin C=2\sqrt{3}\sin B$，则 A=

（A）$30^0$　（B）$60^0$　（C）$120^0$　（D）$150^0$

（8）若函数 f（x）$=\begin{cases}\log_2 x, x>0,\\ \log_{\frac{1}{2}}(-x), x<0\end{cases}$,若 f（a）>f（-a）,则实数 a 的取值范围是

（A）（-1，0）∪（0，1）　　（B）（-∞，-1）∪（1,+∞）

（C）（-1，0）∪（1,+∞）　　（D）（-∞，-1）∪（0,1）

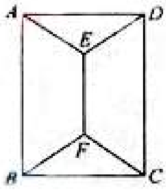
（9）设集合 A=$\{x\,||x-a|<1, x\in R\}$,$B=\{x\,||x-b|>2, x\in R\}$.若 A⊆B,则实数 a,b 必满

足

（A）$|a+b|\le 3$　（B）$|a+b|\ge 3$　　（C）$|a-b|\le 3$　　（D）$|a-b|\ge 3$

（10）如图，用四种不同颜色给图中的 A,B,C,D,E,F 六个点涂色，要求每个点涂一种颜色，且图中每条线段的两个端点涂不同颜色，则不同的涂色方法有

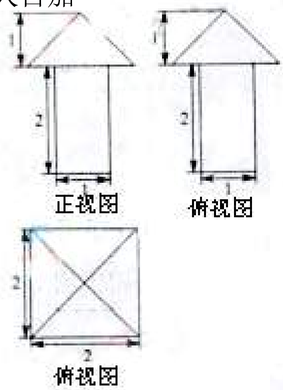
（A）288 种　　（B）264 种　　（C）240 种　　（D）168 种




## 二、填空题

（11）甲、乙两人在 10 天中每天加工零件的个数用茎叶图表示如下图，中间一列的数字表示零件个数的十位数，两边的数字表示零件个数的个位数，则这 10 天甲、乙两人日加工零件的平均数分别为________ 和______。

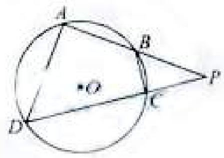
| 甲 | | 乙 |
|---|---|---|
| 9 8 | 1 | 9 7 1 |
| 0 1 3 2 0 | 2 | 1 4 2 4 |
| 1 1 5 | 3 | 0 2 0 |



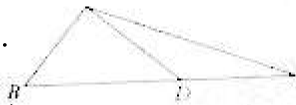

（12）一个几何体的三视图如图所示，则这个几何体的体积为__________

（13）已知圆 C 的圆心是直线 $\begin{cases} x=t, \\ y=1+t \end{cases}$（t 为参数）与 x 轴的交点，且圆 C 与直线 x+y+3=0 相切，则圆 C 的方程为________






（14）如图，四边形 ABCD 是圆 O 的内接四边形，延长 AB 和 DC 相交于点 P，若 $\frac{PB}{PA}=\frac{1}{2},\frac{PC}{PD}=\frac{1}{3}$，则 $\frac{BC}{AD}$ 的值为_____。




（15）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp AB$，$\overrightarrow{BC}=\sqrt{3}\overrightarrow{BD}$，$|\overrightarrow{AD}|=1$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=$_______.

（16）设函数 $f(x)=x^2-1$，对任意 $x\in\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$，$f\left(\frac{x}{m}\right)-4m^2f(x)\le f(x-1)+4f(m)$ 恒成立，则实数 $m$ 的取值范围是_______.

## 三、解答题

（17）（本小题满分 12 分）已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x-1(x\in R)$

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期及在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值；

（Ⅱ）若 $f(x_0)=\frac{6}{5},x_0\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，求 $\cos 2x_0$ 的值。

（18）.（本小题满分 12 分）某射手每次射击击中目标的概率是$\frac{2}{3}$，且各次射击的结果互不影响。

（Ⅰ）假设这名射手射击 5 次，求恰有 2 次击中目标的概率

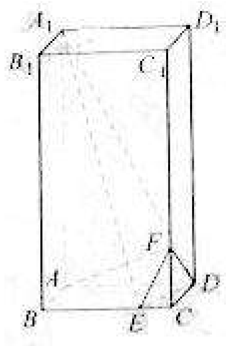
（Ⅱ）假设这名射手射击 5 次，求有 3 次连续击中目标。另外 2 次未击中目标的概率；

（Ⅲ）假设这名射手射击 3 次，每次射击，击中目标得 1 分，未击中目标得 0 分，在 3 次射击中，若有 2 次连续击中，而另外 1 次未击中，则额外加 1 分；若 3 次全击中，则额外加 3 分，记$\xi$为射手射击 3 次后的总的分数，求$\xi$的分布列。

（19）（本小题满分 12 分）如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$E$、$F$分别是棱

$BC,CC_1$

上的点，$CF=AB=2CE,AB:AD:AA_1=1:2:4$




（1）求异面直线$EF$与$A_1D$所成角的余弦值；

（2）证明$AF\perp$平面　$A_1ED$

（3）求二面角$A_1-ED-F$的正弦值。

（20）（本小题满分 12 分）

已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，连接椭圆的四个顶点得到的菱形的面积为 4。

（1）求椭圆的方程；

（2）设直线$l$与椭圆相交于不同的两点$A,B$，已知点$A$的坐标为（$-a,0$），点

$Q(0,y_0)$ 在线段$AB$的垂直平分线上，且$\overrightarrow{QA}\bullet\overrightarrow{QB}=4$，求$y_0$的值

（21）（本小题满分 14 分）

已知函数$f(x)=xc^{-x}(x\in R)$

（Ⅰ）求函数$f(x)$的单调区间和极值；

（Ⅱ）已知函数$y=g(x)$的图象与函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=1$对称，证明当

$x>1$时，$f(x)>g(x)$

（Ⅲ）如果$x_1\neq x_2$，且$f(x_1)=f(x_2)$，证明$x_1+x_2>2$

（22）（本小题满分 14 分）

在数列$\{a_n\}$中，$a_1=0$，且对任意$k\in N^*$．$a_{2k-1}$，$a_{2k}$，$a_{2k+1}$成等差数列，其公差为

$d_k$。

（Ⅰ）若 $d_k=2k$，证明 $a_{2k}$，$a_{2k+1}$，$a_{2k+2}$ 成等比数列（$k\in N^*$）

（Ⅱ）若对任意 $k\in N^*$，$a_{2k}$，$a_{2k+1}$，$a_{2k+2}$ 成等比数列，其公比为 $q_k$。

（i）设 $q_1\neq 1$.证明 $\left\{\dfrac{1}{q_k-1}\right\}$ 是等差数列；

（ii）若 $a_2=2$，证明 $\dfrac{3}{2}<2n-\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k^2}{a_k}\leq 2(n\geq 2)$

# 2010 参考答案

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算。每小题 5 分，满分 50 分。

（1）A （2）B （3）B （4）D （5）B （6）C （7）A （8）C （9）D （10）B

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算，每小题 4 分，满分 24 分。

（11）24:23 （12）$\dfrac{10}{3}$ （13）$(x+1)^2+y^2=2$ （14）$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ （15）$\sqrt{3}$ （16）$\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$

三、解答题

（17）本小题主要考查二倍角的正弦与余弦、两角和的正弦、函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的性质、同角三角函数的基本关系、两角差的余弦等基础知识，考查基本运算能力，满分 12 分。

（1）解：由 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$，得

$f(x)=\sqrt{3}(2\sin x\cos x)+(2\cos^2 x-1)=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\pi$

因为 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$ 上为增函数，在区间 $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上为减函数，又 $f(0)=1,f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2,f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 2，最小值为-1

（Ⅱ）解：由（1）可知 $f(x_0)=2\sin\left(2x_0+\dfrac{\pi}{6}\right)$

又因为 $f(x_0)=\dfrac{6}{5}$，所以 $\sin\left(2x_0+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{5}$

由 $x_0\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$，得 $2x_0+\dfrac{\pi}{6}\in\left[\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{7\pi}{6}\right]$

从而 $\cos\left(2x_0+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(2x_0+\dfrac{\pi}{6}\right)}=-\dfrac{4}{5}$

所以

$$\cos 2x_0=\cos\left[\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$$

18．本小题主要考查二项分布及其概率计算公式、离散型随机变量的分布列、互斥事件和相互独立事件等基础知识，考查运用概率知识解决实际问题的能力，满分 12 分。

（1）解：设 $X$ 为射手在 5 次射击中击中目标的次数，则 $X\sim B\left(5,\frac{2}{3}\right)$． 在 5 次射击中，恰有 2 次击中目标的概率

$$P(X=2)=C_5^{\ 2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}$$

（Ⅱ）解：设“第 $i$ 次射击击中目标”为事件 $A_i(i=1,2,3,4,5)$；“射手在 5 次射击中，有 3 次连续击中目标，另外 2 次未击中目标”为事件 $A$，则

$$P(A)=P(A_1A_2A_3\overline{A_4}\,\overline{A_5})+P(\overline{A_1}A_2A_3A_4\overline{A_5})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3A_4A_5)$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$=\frac{8}{81}$$

（Ⅲ）解：由题意可知，$\xi$ 的所有可能取值为 $0,1,2,3,6$

$$P(\zeta=0)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

$$P(\zeta=1)=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$$

$$=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

$$P(\zeta=2)=P(A_1\overline{A_2}A_3)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$$

$$P(\zeta=3)=P(A_1A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2A_3)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$$

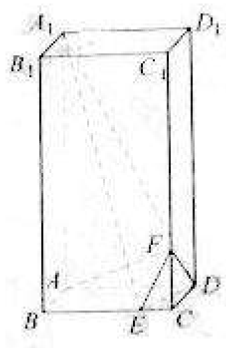
$$P(\zeta=6)=P(A_1A_2A_3)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$$

所以$\xi$的分布列是

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| P | $\frac{1}{27}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{4}{27}$ | $\frac{8}{27}$ | $\frac{8}{27}$ |

（19）本小题主要考查异面直线所成的角、直线与平面垂直、二面角等基础知识，　考查用空间向量解决立体几何问题的方法，考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力，满分 12 分。

方法一：如图所示，建立空间直角坐标系，




点 A 为坐标原点，设 $AB=1$,依题意得 $D(0,2,0)$，

$F(1,2,1)$，$A_1(0,0,4)$，$E\left(1,\frac{3}{2},0\right)$

解：易得 $\overrightarrow{EF}=\left(0,\frac{1}{2},1\right)$，$\overrightarrow{A_1D}=(0,2,-4)$

于是 $\cos\left\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{A_1D}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{EF}\bullet\overrightarrow{A_1D}}{\left|\overrightarrow{EF}\right|\left|\overrightarrow{A_1D}\right|}=-\dfrac{3}{5}$

所以异面直线 $EF$ 与 $A_1D$ 所成角的余弦值为$\dfrac{3}{5}$

证明：易知 $\overrightarrow{AF}=(1,2,1)$，$\overrightarrow{EA_1}=\left(-1,-\frac{3}{2},4\right)$，$\overrightarrow{ED}=\left(-1,\frac{1}{2},0\right)$

于是 $\overrightarrow{AF}$ · $\overrightarrow{EA_1}$=0，$\overrightarrow{AF}$ · $\overrightarrow{ED}$=0．因此，$AF\perp EA_1$，$AF\perp ED$，又 $EA_1\cap ED=E$

所以 $AF\perp$平面 $A_1ED$

（III）解：设平面 $EFD$ 的法向量 $\vec{u}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{u}\bullet\overrightarrow{EF}=0\\ \vec{u}\bullet\overrightarrow{ED}=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}\frac{1}{2}y+z=0\\ -x+\frac{1}{2}y=0\end{cases}$

不妨令 X=1,可得 $\vec{u}=(1,2-1)$。由（2）可知，$\overrightarrow{AF}$ 为平面 $A_1ED$ 的一个法向量。

于是 $\cos\left\langle\vec{u},\overrightarrow{AF}\right\rangle=\dfrac{\vec{u}\bullet\overrightarrow{AF}}{|\vec{u}|\left|\overrightarrow{AF}\right|}=\dfrac{2}{3}$，从而 $\sin\left\langle\vec{u},\overrightarrow{AF}\right\rangle=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

所以二面角 $A_1$-ED-F 的正弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

方法二：（1）解：设 AB=1，可得 AD=2,$AA_1$=4,CF=1．CE=$\frac{1}{2}$

连接 $B_1C$,$BC_1$，设 $B_1C$ 与 $BC_1$ 交于点 M,易知 $A_1D$∥$B_1C$，由

$\frac{CE}{CB}=\frac{CF}{CC_1}=\frac{1}{4}$,可知 EF∥$BC_1$．故$\angle BMC$是异面直线 EF 与

$A_1D$ 所成的角，易知 BM=CM=$\frac{1}{2}B_1C=\sqrt{5}$，所以

$\cos\angle BMC=\frac{BM^2+CM^2-BC^2}{2BM\bullet CM}=\frac{3}{5}$ ,所以异面直线 FE 与 $A_1D$ 所成角的余弦值为

$\frac{3}{5}$

（Ⅱ）证明：连接 AC，设 AC 与 DE 交点 N 因为 $\frac{CD}{BC}=\frac{EC}{AB}=\frac{1}{2}$，所以 $Rt\Delta DCE\sim Rt\Delta CBA$，从而$\angle CDE=\angle BCA$，又由于$\angle CDE+\angle CED=90^\circ$,所以$\angle BCA+\angle CED=90^\circ$，故 AC⊥DE,又因为 $CC_1$⊥DE 且$CC_1\cap AC=C$，所以 DE⊥平面 ACF，从而 AF⊥DE．

连接 BF，同理可证 $B_1C$⊥平面 ABF,从而 AF⊥$B_1C$,所以 AF⊥$A_1D$ 因为 $DE\cap A_1D=D$，所以 AF⊥平面 $A_1ED$

（Ⅲ）解：连接 $A_1N$．FN,由（2）可知 DE⊥平面 ACF,又 NF⊂平面 ACF, $A_1N$⊂平面 ACF，所以 DE⊥NF,DE⊥$A_1N$,故$\angle A_1NF$为二面角 $A_1$-ED-F 的平面角

易知 $Rt\Delta CNE\sim Rt\Delta CBA$，所以 $\frac{CN}{BC}=\frac{EC}{AC}$，又 $AC=\sqrt{5}$所以 $CN=\frac{\sqrt{5}}{5}$，在

$Rt\Delta NCF$中，$NF=\sqrt{CF^2+CN^2}=\frac{30}{5}$在$Rt\vartriangle A_1AN$中

$NA_1=\sqrt{A_1A^2+AN^2}=\frac{4\sqrt{30}}{5}$

连接 $A_1C_1$,$A_1F$ 在$Rt\Delta A_1C_1F$中，$A_1F=\sqrt{A_1C_1{}^2+C_1F^2}=\sqrt{14}$

在$Rt\Delta A_1NF$中，$\cos\angle A_1NF=\frac{A_1N^2+FN^2-A_1F^2}{2A_1N\bullet FN}=\frac{2}{3}$。所以$\sin\angle A_1NF=\frac{\sqrt{5}}{3}$

所以二面角 $A_1$-DE-F 正弦值为$\frac{\sqrt{5}}{3}$

（20）本小题主要考察椭圆的标准方程和几何性质，直线的方程，平面向量等基础知识，考查用代数方法研究圆锥曲线的性质及数形结合的思想，考查运算和推理能力，满分 12 分

（Ⅰ）解：由$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得$3a^2=4c^2$，再由$c^2=a^2-b^2$，得$a=2b$

由题意可知，$\frac{1}{2}\times 2a\times 2b=4$,即$ab=2$

解方程组$\begin{cases}a=2b\\ ab=2\end{cases}$ 得 a=2,b=1

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

（Ⅱ）解：由（1）可知 A（-2,0）。设 B 点的坐标为（$x_1$,$y_1$）,直线 l 的斜率为 k，则直线 l 的方程为 y=k（x+2），

于是 A,B 两点的坐标满足方程组$\begin{cases}y=k(x+2)\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$

由方程组消去 Y 并整理，得$(1+4k^2)x^2+16k^2x+(16k^2-4)=0$

由$-2x_1=\frac{16k^2-4}{1+4k^2}$,得

$x_1=\frac{2-8k^2}{1+4k^2}$,从而$y_1=\frac{4k}{1+4k^2}$,

设线段 AB 是中点为 M，则 M 的坐标为$(-\frac{8k^2}{1+4k^2},\frac{2k}{1+4k^2})$

以下分两种情况：

（1）当 k=0 时，点 B 的坐标为（2,0）。线段 AB 的垂直平分线为 y 轴，于是

$\vec{QA}=(-2,-y_0),\vec{QB}=(2,-y_0)$ 由$\vec{QA}\bullet\vec{QB}=4$，得$y_0=\pm 2\sqrt{2}$

（2）当 $K\neq 0$ 时，线段 AB 的垂直平分线方程为$Y-\frac{2k}{1+4k^2}=\frac{1}{k}(x+\frac{8k^2}{1+4k^2})$

令 x=0，解得 $y_0=\frac{6k}{1+4k^2}$

由$\vec{QA}=(-2,-y_0),\vec{QB}=(x_1,y_1-y_0)$

$\vec{QA}\bullet\vec{QB}=-2x_1-y_0(y_1-y_0)=\frac{-2(2-8k^2)}{1+4k^2}+\frac{6k}{1+4k^2}(\frac{4k}{1+4k^2}+\frac{6k}{1+4k^2})$

$=\dfrac{4(16k^4+15k^2-1)}{(1+4k^2)^2}=4$

整理得 $7k^2=2$, 故 $k=\pm\dfrac{\sqrt{14}}{7}$ 所以 $y_0=\pm\dfrac{2\sqrt{14}}{5}$

综上 $y_0=\pm 2\sqrt{2}$ 或 $y_0=\pm\dfrac{2\sqrt{14}}{5}$

（21）本小题主要考查导数的应用，利用导数研究函数的单调性与极值等基础知识，考查运算能力及用函数思想分析解决问题的能力，满分 14 分

（Ⅰ）解：$f'(x)=(1-x)e^{-x}$

令 f'（x）=0,解得 x=1

当 x 变化时，f'（x），f（x）的变化情况如下表

| X | $(-\infty,1)$ | 1 | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| f'（x） | + | 0 | - |
| f（x） | ↗ | 极大值 | ↘ |

所以 f（x）在 $(-\infty,1)$ 内是增函数，在 $(1,+\infty)$ 内是减函数。

函数 f（x）在 x=1 处取得极大值 f（1）且 f（1）$=\dfrac{1}{e}$

（Ⅱ）证明：由题意可知 g（x）=f（2-x）,得 g（x）=（2-x）$e^{x-2}$

令 F（x）=f（x）-g（x）,即 $F(x)=xe^{-x}+(x-2)e^{x-2}$

于是 $F'(x)=(x-1)(e^{2x-2}-1)e^{-x}$

当 x>1 时，2x-2>0,从而 $e^{2x-2}-1>0$, 又 $e^{-x}>0$, 所以 F'（x）>0,从而函数 F（x）在[1,+∞）是增函数。

又 F（1）$=e^{-1}-e^{-1}=0$，所以 x>1 时，有 F（x）>F（1）=0,即 f（x）>g（x）.

（Ⅲ）证明：（1）

若 $(x_1-1)(x_2-1)=0$, 由（Ⅰ）及 $f(x_1)=f(x_2)$, 则 $x_1=x_2=1$. 与 $x_1\neq x_2$ 矛盾。

（2）若 $(x_1-1)(x_2-1)>0$, 由（Ⅰ）及 $f(x_1)=f(x_2)$, 得 $x_1=x_2$. 与 $x_1\neq x_2$ 矛盾。

根据（1）（2）得 $(x_1-1)(x_2-1)<0$, 不妨设 $x_1<1, x_2>1$.

由（Ⅱ）可知，$f(x_2)>g(x_2)$, 则 $g(x_2)=f(2-x_2)$，所以 $f(x_2)>f(2-x_2)$, 从而 $f(x_1)>$

$f(2-x_2)$. 因为$x_2>1$，所以$2-x_2<1$，又由（Ⅰ）可知函数f（x）在区间（-∞，1）

内事增函数，所以$x_1>2-x_2$,即$x_1+x_2$>2.

（22）本小题主要考查等差数列的定义及通项公式，前n项和公式、等比数列的定义、数列求和等基础知识，考查运算能力、推理论证能力、综合分析和解决问题的能力及分类讨论的思想方法。满分14分。

（Ⅰ）证明：由题设，可得$a_{2k+1}-a_{2k-1}=4k,k\in N^*$。

所以$a_{2k+1}-a_1=(a_{2k+1}-a_{2k-1})+(a_{2k-1}-a_{2k-3})+...+(a_3-a_1)$

$=4k+4(k-1)+...+4\times 1$

=2k（k+1）

由$a_1$=0，得$a_{2k+1}=2k(k+1),$从而$a_{2k}=a_{2k+1}-2k=2k^2,a_{2k+2}=2(k+1)^2.$

于是$\dfrac{a_{2k+1}}{a_{2k}}=\dfrac{k+1}{k},\dfrac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}}=\dfrac{k+1}{k},$所以$\dfrac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}}=\dfrac{a_{2k+1}}{a_{2k}}$。

所以$d_k=2k$时，对任意$k\in N^*,a_{2k},a_{2k+1},a_{2k+2}$成等比数列。

（Ⅱ）证法一：(i）证明：由$a_{2k-1},a_{2k},a_{2k+1}$成等差数列，及$a_{2k},a_{2k+1},a_{2k+2}$

成等比数列，得$2a_{2k}=a_{2k-1}+a_{2k+1},2=\dfrac{a_{2k-1}}{a_{2k}}+\dfrac{a_{2k+1}}{a_{2k}}=\dfrac{1}{q_{k-1}}+q_k$

当$q_1\neq 1$时，可知$q_k\neq 1$，k∈$N^*$

从而$\dfrac{1}{q_{k-1}}=\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{q_{k-1}}-1}=\dfrac{1}{q_{k-1}-1}+1,$即$\dfrac{1}{q_{k-1}}-\dfrac{1}{q_{k-1}-1}=1(k\geq 2)$

所以$\left\{\dfrac{1}{q_k-1}\right\}$是等差数列，公差为1。

（Ⅱ）证明：$a_1=0$，$a_2=2$，可得$a_3=4$，从而$q_1=\dfrac{4}{2}=2,\dfrac{1}{q_1-1}$=1．由（Ⅰ）有

$\dfrac{1}{q_{k-1}}=1+k-1=k,$得$q_k=\dfrac{k+1}{k},k\in N^*$

所以$\dfrac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}}=\dfrac{a_{2k+1}}{a_{2k}}=\dfrac{k+1}{k},$从而$\dfrac{a_{2k+2}}{a_{2k}}=\dfrac{(k+1)^2}{k^2},k\in N^*$

因此，$a_{2k}=\frac{a_{2k}}{a_{2k-2}}\cdot\frac{a_{2k}-2}{a_{2k-4}}\cdots\frac{a_4}{a_2}\cdot a_2=\frac{k^2}{(k-1)^2}\cdot\frac{(k-1)^2}{(k-2)^2}\cdots\frac{2^2}{1^2}\cdot 2=2k^2\cdot a_{2k+1}$

$=a_{2k}\cdot\frac{k+1}{k}=2k(k+1),k\in N*$

以下分两种情况进行讨论：

当 n 为偶数时，设 n=2m（$m\in N^*$）

若 m=1,则 $2n-\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{k^2}{a_k}=2$.

若 m≥2，则

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{a_k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{(2k)^2}{a_{2k}}+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(2k+1)^2}{a_{2k+1}}=\sum_{k=1}^{m}\frac{4k^2}{2k^2}+$$

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{4k^2+4k+1}{2k(k+1)}=2m+\sum_{k=1}^{m-1}\left[\frac{4k^2+4k}{2k(k+1)}+\frac{1}{2k(k+1)}\right]=2m+\sum_{k=1}^{m-1}\left[2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right]$$

$$=2m+2(m-1)+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{m})=2n-\frac{3}{2}-\frac{1}{n.}$$

所以$2n-\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{k^2}{a_k}=\frac{3}{2}+\frac{1}{n}$,从而$\frac{3}{2}<2n-\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{k^2}{a_k}<2,n=4,6,8...$

（2）当 n 为奇数时，设 n=2m+1（$m\in N^*$）

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{a_k}=\sum_{k=2}^{2m}\frac{k^2}{a_k}+\frac{(2m+1)^2}{a_{2m+1}}=4m-\frac{3}{2}-\frac{1}{2m}+\frac{(2m+1)^2}{2m(m+1)}$$

$$=4m+\frac{1}{2}-\frac{1}{2(m+1)}=2n-\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}$$

所以$2n-\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{k^2}{a_k}=\frac{3}{2}+\frac{1}{n+1}$,从而$\frac{3}{2}<2n-\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{k^2}{a_k}<2,n=3,5,7\cdots$

综合（1）（2）可知，对任意$n\geq 2$,$n\in N^*$,有$\frac{3}{2}<2n-\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{k^2}{a_k}\leq 2$

证法二：(i）证明：由题设，可得$d_k=a_{2k+1}-a_{2k}=q_ka_{2k}-a_{2k}=a_{2k}(q_k-1)$,

$d_{k+1}=a_{2k+2}-a_{2k+1}=q_k{}^2a_{2k}-q_ka_{2k}=a_{2k}q_k(q_k-1)$,所以$d_{k+1}=q_kd_k$

$$q_{k+1}=\frac{a_{2k+3}}{a_{2k+2}}=\frac{a_{2k+2}+d_{k+1}}{a_{2k+2}}=1+\frac{d_{k+1}}{q_k^2a_{2k}}=1+\frac{d_k}{q_ka_{2k}}=1+\frac{q_k-1}{q_k}$$

由$q_1 \neq 1$可知$q_k \neq 1, k \in N^*$。可得$\frac{1}{q_{k+1}-1}-\frac{1}{q_k-1}=\frac{q_k}{q_k-1}-\frac{1}{q_k-1}=1$，

所以$\left\{\frac{1}{q_k-1}\right\}$是等差数列，公差为1。

（ii）证明：因为$a_1=0, a_2=2,$所以$d_1=a_2-a_1=2$。

所以$a_3=a_2+d_1=4$，从而$q_1=\frac{a_3}{a_2}=2$，$\frac{1}{q_1-1}=1$。于是，由（i）可知所以$\left\{\frac{1}{q_k-1}\right\}$是公差为1的等差数列。由等差数列的通项公式可得$\frac{1}{q_k-1}= 1+(k-1)=k$，故$q_k=\frac{k+1}{k}$。

从而$\frac{d_{k+1}}{d_k}=q_k=\frac{k+1}{k}$。

所以$\frac{d_k}{d_1}=\frac{d_k}{d_{k-1}}.\frac{d_{k-1}}{d_{k-2}}........\frac{d_2}{d_1}=\frac{k}{k-1}.\frac{k-1}{k-2}......\frac{2}{1}=k$，由$d_1=2$，可得$d_k=2k$。

于是，由（i）可知$a_{2k+1}=2k(k+1), a_{2k}=2k^2, k \in N^*$

以下同证法一。

选择填空解析

# 2010年天津市高考数学试卷（理科）

**参考答案与试题解析**

## 一、选择题（共10小题，每小题5分，满分50分）

1．（5分）（2010•天津）i是虚数单位，复数$\frac{-1+3i}{1+2i}$=（　　）

A．1+i　B．5+5i C．－5－5i　D．－1－i

【考点】复数代数形式的混合运算．

【专题】数系的扩充和复数．

【分析】进行复数的除法的运算，需要分子、分母同时乘以分母的共轭复数，同时将$i^2$改为－1．

【解答】解：进行复数的除法的运算需要分子、分母同时乘以分母的共轭复数，同时将$i^2$改为－1．

$\therefore\frac{-1+3i}{1+2i}=\frac{(-1+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{5+5i}{5}=1+i$．

故选　A．

【点评】本题主要考查复数代数形式的基本运算，2 个复数相除，分母、分子同时乘以分母的共轭复数．

2．（5 分）（2010•天津）函数 f（x）$=2^x+3x$ 的零点所在的一个区间是（　　）

A．（﹣2，﹣1）　B．（﹣1，0）　C．（0，1）　D．（1，2）

【考点】函数的零点与方程根的关系；函数零点的判定定理．

【专题】函数的性质及应用．

【分析】根据函数零点的判定定理求得函数 f（x）$=2^x+3x$ 的零点所在的一个区间．

【解答】解：由 $f(-1)=\frac{1}{2}-3<0$，$f(0)=1>0$，以及及零点定理知，f（x）的零点在区间（﹣1，0）上，

故选 B．

【点评】本题主要考查函数零点的概念与零点定理的应用，属于容易题．

3．（5 分）（2010•天津）命题"若 f（x）是奇函数，则 f（﹣x）是奇函数"的否命题是（　　）

A．若 f（x）是偶函数，则 f（﹣x）是偶函数

B．若 f（x）不是奇函数，则 f（﹣x）不是奇函数

C．若 f（﹣x）是奇函数，则 f（x）是奇函数

D．若 f（﹣x）不是奇函数，则 f（x）不是奇函数

【考点】四种命题．

【专题】函数的性质及应用．

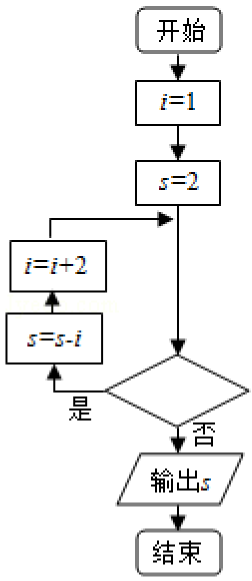
【分析】用否命题的定义来判断．

【解答】解：否命题是同时否定命题的条件结论，故由否命题的定义可知 B 项是正确的．

故选 B

【点评】本题主要考查否命题的概念，注意否命题与命题否定的区别．

4．（5 分）（2010•天津）阅读如图的程序框图，若输出 s 的值为﹣7，则判断框内可填写（　　）



A．i＜3 B．i＜4 C．i＜5 D．i＜6

【考点】设计程序框图解决实际问题．

【专题】算法和程序框图．

【分析】分析程序中各变量、各语句的作用，再根据流程图所示的顺序，可知：该程序的作用是累加变量 i 的值到 S 并输出 S，根据流程图所示，将程序运行过程中各变量的值列表如下：

【解答】解：程序在运行过程中各变量的值如下表示：

是否继续循环　S　i

循环前/2　1

第一圈　　是　1　3

第二圈　　是－2　5

第三圈　　是－7　7

第四圈　　否

所以判断框内可填写“i＜6”，

故选 D．

【点评】算法是新课程中的新增加的内容，也必然是新高考中的一个热点，应高度重视．程序填空也是重要的考试题型，这种题考试的重点有：①分支的条件②循环的条件③变量的赋值④变量的输出．其中前两点考试的概率更大．此种题型的易忽略点是：不能准确理解流程图的含义而导致错误．

5．（5 分）（2010•天津）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的一条渐近线方程是$y=\sqrt{3}x$，它的一个焦点在抛物线 $y^2=24x$ 的准线上，则双曲线的方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{108}=1$ B．$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$

C．$\frac{x^2}{108}-\frac{y^2}{36}=1$ D．$\frac{x^2}{27}-\frac{y^2}{9}=1$

【考点】双曲线的标准方程．

【专题】圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】由抛物线标准方程易得其准线方程为 $x=-6$，而通过双曲线的标准方程可见其焦点在 x 轴上，则双曲线的左焦点为（－6，0），此时由双曲线的性质 $a^2+b^2=c^2$ 可得 a、b 的一个方程；再根据焦点在 x 轴上的双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，可得$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，则得 a、b 的另一个方程．那么只需解 a、b 的方程组，问题即可解决．

【解答】解：因为抛物线 $y^2=24x$ 的准线方程为 $x=-6$，

则由题意知，点 F（－6，0）是双曲线的左焦点，

所以 $a^2+b^2=c^2=36$，

又双曲线的一条渐近线方程是 $y=\sqrt{3}x$，

所以$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，

解得 $a^2=9$，$b^2=27$，

所以双曲线的方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$.

故选 B.

【点评】本题主要考查双曲线和抛物线的标准方程与几何性质.

6.（5 分）（2010•天津）已知$\{a_n\}$是首项为 1 的等比数列，$S_n$是$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $9S_3=S_6$，则数列$\{\frac{1}{a_n}\}$的前 5 项和为（　　）

A．$\frac{15}{8}$或 5　B．$\frac{31}{16}$或 5　C．$\frac{31}{16}$　D．$\frac{15}{8}$

【考点】等比数列的前 n 项和；等比数列的性质.

【专题】等差数列与等比数列.

【分析】利用等比数列求和公式代入 $9s_3=s_6$ 求得 q，进而根据等比数列求和公式求得数列$\{\frac{1}{a_n}\}$的前 5 项和.

【解答】解：显然 q≠1，所以$\frac{9(1-q^3)}{1-q}=\frac{1-q^6}{1-q}\Rightarrow 1+q^3=9\Rightarrow q=2$，

所以$\{\frac{1}{a_n}\}$是首项为 1，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，

前 5 项和$T_5=\frac{1-(\frac{1}{2})^5}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{16}$.

故选：C

【点评】本题主要考查等比数列前 n 项和公式及等比数列的性质，属于中等题．在进行等比数列运算时要注意约分，降低幂的次数，同时也要注意基本量法的应用.

7.（5 分）（2010•天津）在△ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，若 $a^2-b^2=\sqrt{3}bc$，$\sin C=2\sqrt{3}\sin B$，则∠A 的值为（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　B．$\frac{\pi}{3}$　C．$\frac{5\pi}{6}$　D．$\frac{2\pi}{3}$

【考点】余弦定理；正弦定理.

【专题】解三角形.

【分析】先利用正弦定理化简 $\sin C=2\sqrt{3}\sin B$，得到 c 与 b 的关系式，代入$a^2-b^2=\sqrt{3}bc$中得到 $a^2$ 与 $b^2$ 的关系式，然后利用余弦定理表示出 cosA，把表示出的关系式分别代入即可求出 cosA 的值，根据 A 的范围，利用特殊角的三角函数值即可求出 A 的值.

【解答】解：由 $\sin C=2\sqrt{3}\sin B$ 得：$c=2\sqrt{3}b$，

所以 $a^2-b^2=\sqrt{3}bc=\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}b^2$，即 $a^2=7b^2$，

则 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b^2+12b^2-7b^2}{4\sqrt{3}b^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$，

所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$.

故选 A.

【点评】此题考查学生灵活运用正弦定理、余弦定理及特殊角的三角函数值化简求值，根据三角函数的值求角，是一道基础题.

8.（5 分）（2010•天津）若函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, & x>0\\ \log_{\frac{1}{2}}(-x), & x<0\end{cases}$，若 $f(a)>f(-a)$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A.（﹣1，0）∪（0，1）　B.（﹣∞，﹣1）∪（1，+∞）　C.（﹣1，0）∪（1，+∞）　D.（﹣∞，﹣1）∪（0，1）

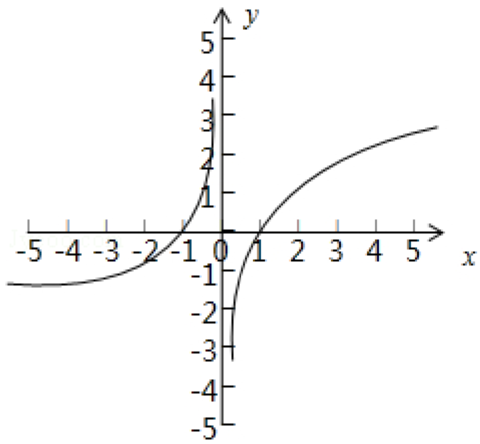
【考点】对数值大小的比较.

【专题】函数的性质及应用.

【分析】由分段函数的表达式知，需要对 a 的正负进行分类讨论.

【解答】解：由题意

$f(a)>f(-a)\Rightarrow\begin{cases}a>0\\ \log_2 a>\log_{\frac{1}{2}}a\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0\\ \log_{\frac{1}{2}}(-a)>\log_2(-a)\end{cases}$




$\Rightarrow\begin{cases}a>0\\ a>\dfrac{1}{a}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0\\ -\dfrac{1}{a}<-a\end{cases}\Rightarrow a>1$ 或 $-1<a<0$.

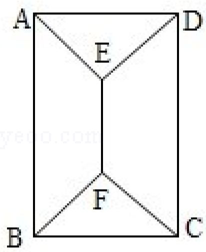
故选 C.

【点评】本题主要考查函数的对数的单调性、对数的基本运算及分类讨论思想，属于中等题．分类函数不等式一般通过分类讨论的方式求解，解对数不等式既要注意真数大于 0，也要注意底数在（0，1）上时，不等号的方向不要写错.

9.（5 分）（2010•天津）设集合 $A=\{x||x-a|<1，x\in R\}$，$B=\{x||x-b|>2，x\in R\}$．若 $A\subseteq B$，则实数 a，b 必满足（　　）

A．$|a+b|\leq 3$　B．$|a+b|\geq 3$　C．$|a-b|\leq 3$　D．$|a-b|\geq 3$
【考点】集合的包含关系判断及应用；绝对值不等式的解法．
【专题】集合．
【分析】先利用绝对值不等式的解法化简集合 A、B，再结合 $A\subseteq B$，观察集合区间的端点之间的关系得到不等式，由不等式即可得到结论．
【解答】解：$\because A=\{x|a-1<x<a+1\}$，$B=\{x|x<b-2$ 或 $x>b+2\}$，
因为 $A\subseteq B$，所以 $b-2\geq a+1$ 或 $b+2\leq a-1$，
即 $a-b\leq -3$ 或 $a-b\geq 3$，
即$|a-b|\geq 3$．
故选 D．
【点评】本题主要考查绝对值不等式的解法与几何与结合之间的关系，属于中等题．温馨提示：处理几何之间的子集、交、并运算时一般利用数轴求解．

10．（5 分）（2010•天津）如图，用四种不同颜色给图中的 A，B，C，D，E，F 六个点涂色，要求每个点涂一种颜色，且图中每条线段的两个端点涂不同颜色，则不同的涂色方法用（　　）




A．288 种　B．264 种　C．240 种　D．168 种
【考点】排列、组合及简单计数问题．
【专题】排列组合．
【分析】由题意知图中每条线段的两个端点涂不同颜色，可以根据所涂得颜色的种类来分类，当 B，D，E，F 用四种颜色，B，D，E，F 用三种颜色，B，D，E，F 用两种颜色，分别写出涂色的方法，根据分类计数原理得到结果．
【解答】解：∵图中每条线段的两个端点涂不同颜色，
可以根据所涂得颜色的种类来分类，
B，D，E，F 用四种颜色，则有 $A_4^4\times1\times1=24$ 种涂色方法；
B，D，E，F 用三种颜色，则有 $A_4^3\times2\times2+A_4^3\times2\times1\times2=192$ 种涂色方法；
B，D，E，F 用两种颜色，则有 $A_4^2\times2\times2=48$ 种涂色方法；
根据分类计数原理知共有 24+192+48=264 种不同的涂色方法．
【点评】本题主要考查排列组合的基础知识与分类讨论思想，属于难题．近两年天津卷中的排列、组合问题均处于压轴题的位置，且均考查了分类讨论思想及排列、组合的基本方法，要加强分类讨论思想的训练．

**二、填空题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）**
11．（4 分）（2010•天津）甲、乙两人在 10 天中每天加工零件的个数用茎叶图表示如图，中间一列的数字表示零件个数的十位数，两边的数字表示零件个数的个位数，则这 10 天甲、乙两人日加工零件的平均数分别为__24__和__23__．

| 甲 | | 乙 |
|---|---|---|
| 9 8 | 1 | 9 7 1 |
| 0 1 3 2 0 | 2 | 1 4 2 4 |
| 1 1 5 | 3 | 0 2 0 |

【考点】茎叶图；众数、中位数、平均数．

【专题】概率与统计．

【分析】茎叶图中共同的数字是数字的十位，这事解决本题的突破口，根据所给的茎叶图看出两组数据，代入平均数个数求出结果，这是一个送分的题目．

【解答】解：由茎叶图知，

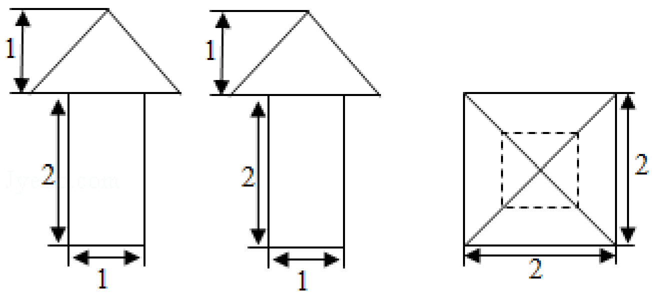
甲加工零件个数的平均数为$\frac{19+18+20\times 2+21+22+23+31\times 2+35}{10}=24$；

乙加工零件个数的平均数为$\frac{19+17+11+21+22+24\times 2+30\times 2+32}{10}=23$.

故答案为：24；23．

【点评】本题主要考查茎叶图的应用，属于容易题．对于一组数据，通常要求的是这组数据的众数，中位数，平均数，题目分别表示一组数据的特征，这样的问题可以出现在选择题或填空题．考查最基本的知识点．

12．（4 分）（2010•天津）一个几何体的三视图如图所示，则这个几何体的体积为__$\frac{10}{3}$__．




正视图　侧视图　俯视图

【考点】由三视图求面积、体积．

【专题】立体几何．

【分析】利用俯视图可以看出几何体底面的形状，结合正视图与侧视图便可得到几何体的形状，求锥体体积时不要丢掉$\frac{1}{3}$.

【解答】解：由三视图可知，该几何体为一个底面边长为 1，高为 2 的正四棱柱与一个底面边长为 2，

高为 1 的正四棱锥组成的组合体，因为正四棱柱的体积为 2，

正四棱锥的体积为$\frac{1}{3}\times 4\times 1=\frac{4}{3}$，

所以该几何体的体积 V=2+$\frac{4}{3}=\frac{10}{3}$，

故答案为：$\frac{10}{3}$.

【点评】本题主要考查三视图的概念与柱体、椎体体积的计算，属于容易题．

13．（4 分）（2010•天津）已知圆 C 的圆心是直线 x﹣y+1=0 与 x 轴的交点，且圆 C 与直线 x+y+3=0 相切．则圆 C 的方程为＿（x+1）$^2$+y$^2$=2＿．

【考点】圆的标准方程．

【专题】直线与圆．

【分析】直线与圆的位置关系通常利用圆心到直线的距离或数形结合的方法求解，欲求圆的方程则先求出圆心和半径，根据圆与直线相切建立等量关系，解之即可．

【解答】解：令 y=0 得 x=﹣1，所以直线 x﹣y+1=0，与 x 轴的交点为（﹣1，0）

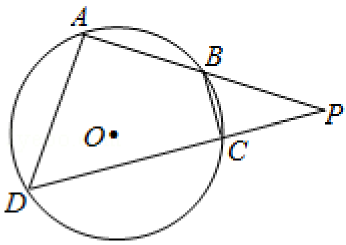
因为直线与圆相切，所以圆心到直线的距离等于半径，

即 $r=\frac{|-1+0+3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，所以圆 C 的方程为（x+1）$^2$+y$^2$=2；

故答案为（x+1）$^2$+y$^2$=2

【点评】本题主要考查直线与圆的位置关系，以及圆的标准方程等基础知识，属于容易题．

14．（4 分）（2010•天津）如图，四边形 ABCD 是圆 O 的内接四边形，延长 AB 和 DC 相交于点 P，若 $\frac{PB}{PA}=\frac{1}{2}$，$\frac{PC}{PD}=\frac{1}{3}$，则 $\frac{BC}{AD}$ 的值为＿$\frac{\sqrt{6}}{6}$＿．




【考点】圆内接多边形的性质与判定．

【专题】直线与圆．

【分析】由题中条件："四边形 ABCD 是圆 O 的内接四边形"可得两角相等，进而得两个三角形相似得比例关系，最后求得比值．

【解答】解：因为 A，B，C，D 四点共圆，

所以∠DAB=∠PCB，∠CDA=∠PBC，

因为∠P 为公共角，

所以△PBC∽△PDA，所以 $\frac{PB}{PD}=\frac{PC}{PA}=\frac{BC}{AD}$．

设 PB=x，PC=y，

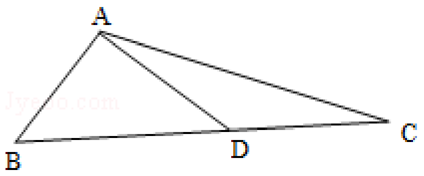
则有 $\frac{x}{3y}=\frac{y}{2x}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{6}y}{2}$，

所以 $\frac{BC}{AD}=\frac{x}{3y}=\frac{\sqrt{6}}{6}$．

故填：$\frac{\sqrt{6}}{6}$．

【点评】本题主要考查四点共圆的性质与相似三角形的性质，属于中等题．温馨提示：四点共圆时四边形对角互补，圆与三角形综合问题是高考中平面几何选讲的重要内容，也是考查的热点．

15．（4 分）（2010•天津）如图，在△ABC 中，AD⊥AB，$\overrightarrow{BC}=\sqrt{3}\overrightarrow{BD}$，$|\overrightarrow{AD}|=1$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=$__$\sqrt{3}$__．




【考点】向量在几何中的应用．
【专题】平面向量及应用．
【分析】本题主要考查平面向量的基本运算与解三角形的基础知识，属于难题．

【解答】解：$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cos\angle DAC$，

$\because|\overrightarrow{AD}|=1$，

$\therefore\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cos\angle DAC=|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\angle DAC$，

$\because\angle BAC=\frac{\pi}{2}+\angle DAC$，

$\therefore\cos\angle DAC=\sin\angle BAC$，

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cos\angle DAC=|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\angle DAC=|\overrightarrow{AC}|\sin\angle BAC$，

在△ABC 中，由正弦定理得$\frac{|AC|}{\sin B}=\frac{|BC|}{\sin\angle BAC}$变形得$|AC|\sin\angle BAC=|BC|\sin B$，

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cos\angle DAC=|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\angle DAC=|\overrightarrow{AC}|\sin\angle BAC$，

$=|BC|\sin B=|BC|\cdot\frac{|AD|}{|BD|}=\sqrt{3}$，

故答案为$\sqrt{3}$．
【点评】近几年天津卷中总可以看到平面向量的身影，且均属于中等题或难题，应加强平面向量的基本运算的训练，尤其是与三角形综合的问题

16．（4 分）（2010•天津）设函数 $f(x)=x^2-1$，对任意 $x\in[\frac{3}{2},+\infty)$，$f(\frac{x}{\pi})-4m^2f(x)\le f(x-1)+4f(m)$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是__$(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty)$__．
【考点】函数恒成立问题．
【专题】函数的性质及应用．

【分析】依据题意得$\frac{x^2}{m^2}-1-4m^2(x^2-1)\leqslant(x-1)^2-1+4(m^2-1)$在$x\in[\frac{3}{2},+\infty)$上恒定成立，即$\frac{1}{m^2}-4m^2\leqslant-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}+1$在$x\in[\frac{3}{2},+\infty)$上恒成立，求出函数函数$y=-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}+1$的最小值即可求出 m 的取值.

【解答】解：依据题意得$\frac{x^2}{m^2}-1-4m^2(x^2-1)\leqslant(x-1)^2-1+4(m^2-1)$在$x\in[\frac{3}{2},+\infty)$上恒定成立，

即$\frac{1}{m^2}-4m^2\leqslant-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}+1$在$x\in[\frac{3}{2},+\infty)$上恒成立.

令$g(x)=-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}+1$，$g'(x)=\frac{6}{x^3}+\frac{2}{x^2}$，

$\because x\in[\frac{3}{2},+\infty)$，

$\therefore g'(x)>0$

$\therefore$当$x=\frac{3}{2}$时，函数$y=-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}+1$取得最小值$-\frac{5}{3}$，

所以$\frac{1}{m^2}-4m^2\leqslant-\frac{5}{3}$，

即$(3m^2+1)(4m^2-3)\geq0$，

解得$m\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$或$m\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，

故答案为：$(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty)$.

【点评】本题是较为典型的恒成立问题，难度较大，解决恒成立问题通常可以利用分离变量转化为最值的方法求解.