1998 年广东高考文科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分，满分 150 分，考试 120 分钟.

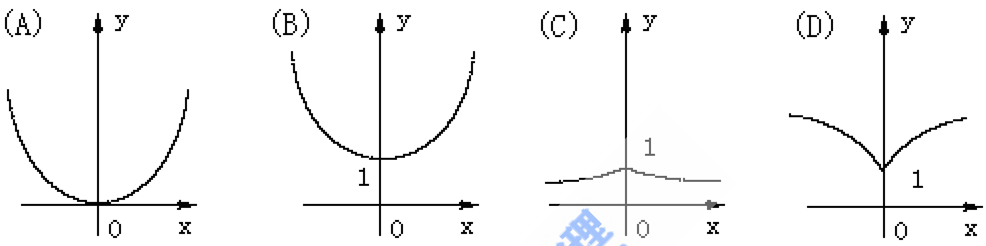
第 I 卷(选择题共 65 分)

一．选择题：本大题共 15 小题；第(1)－(10)题每小题 4 分，第(11)－第(15)题每小题 5 分，65 分．在每小题给出四项选项，只一项符合题目要求的.

(1) $\sin 600^{\circ}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　　)

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $-\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) 函数 $y=a^{|x|}(a>1)$的图像是　　　　　　　　　　　　　　　　(　　)



(3) 已知直线 $x=a(a>0)$和圆$(x-1)^2+y^2=4$ 相切，那么 a 的值是　　　　(　　)

(A) 5　　(B) 4　　(C) 3　　(D) 2

(4) 两条直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2=0$ 垂直的充要条件是　　(　　)

(A) $A_1A_2+B_1B_2=0$　　(B) $A_1A_2-B_1B_2=0$　　(C) $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=-1$　　(D) $\frac{B_1B_2}{A_1A_2}=1$

(5) 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$($x\neq 0$)的反函数 $f^{-1}(x)=$　　　　　　　　(　　)

(A) $x(x\neq 0)$　　(B) $\frac{1}{x}(x\neq 0)$　　(C) $-x(x\neq 0)$　　(D) $-\frac{1}{x}(x\neq 0)$

(6) 已知点 P$(\sin\alpha-\cos\alpha，\mathrm{tg}\,\alpha)$在第一象限，则$[0，2\pi]$内 α 的取值范围是 (　　)

(A) $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})\cup(\pi,\frac{5\pi}{4})$　　(B) $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})\cup(\pi,\frac{5\pi}{4})$

(C) $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})\cup(\frac{5\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$　　(D) $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})\cup(\frac{3\pi}{4},\ \pi)$

(7) 已知圆锥的全面积是底面积的 3 倍，那么该圆锥的侧面积展开图扇形的圆心角为 (　　)

(A) 120°　　(B) 150°　　(C) 180°　　(D) 240°

(8) 复数$-i$ 的一个立方根是 i，它的另外两个立方根是　　　　　　　(　　)

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}I$　　(B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}I$　　(C) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}I$　　(D) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

(9) 如果棱台的两底面积是 S，S'，中截面的面积是 S_0，那么 (　　)

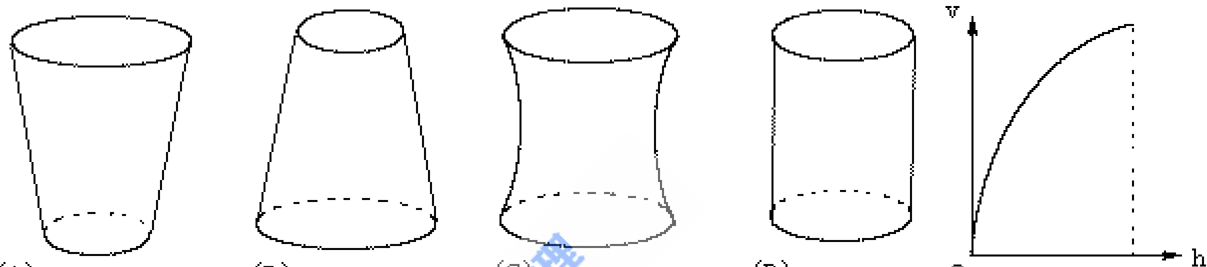
(A) $2\sqrt{S_0}=\sqrt{S}+\sqrt{S'}$　　(B) $S_0=\sqrt{S'S}$

(C) $2S_0=S+S'$　　(D) $S_0^2=2S'S$

(10) 2 名医生和 4 名护士被分配到 2 所学校为学生体检，每校分配 1 名医生和 2 名护士. 不同的分配方法共 (　　)

(A) 6 种　　(B) 12 种　　(C) 18 种　　(D) 24 种

(11) 向高为 H 的水瓶中注水，注满为止，如果注水量 V 与水深 h 的函数关系的图像如右图所示，那么水瓶的形状是 (　　)



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

(12) 椭圆 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点为 F_1，点 P 在椭圆上，如果线段 PF_1 的中点 M 在 y 轴上，那么点 M 的纵坐标是 (　　)

(A) $\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$　　(B) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(C) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(D) $\pm\frac{3}{4}$

(13) 球面上有 3 个点，其中任意两点的球面距离都等于大圆周长为 $\frac{1}{6}$，经过这 3 个点的小圆的周长为 4π，那么这个球的半径为 (　　)

(A) $4\sqrt{3}$　　(B) $2\sqrt{3}$　　(C) 2　　(D) $\sqrt{3}$

(14) 一个直角三角形三内角的正弦值成等比数列，其最小内角的正弦值为 (　　)

(A) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$　　(C) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　(D) $\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+2}}{2}$

(15) 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $-\frac{1}{2}$，前 n 项的和 S_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{a_1}$，那么 $\frac{1}{a_1}$ 的值为 (　　)

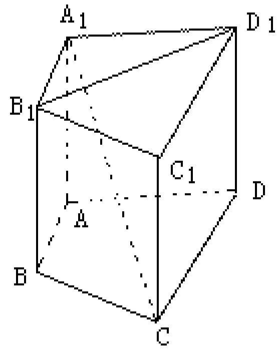
(A) $\pm\sqrt{3}$　　(B) $\pm\frac{3}{2}$　　(C) $\pm\sqrt{2}$　　(D) $\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

二．填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分，把答案填在题中横线上．

(16) 设圆过双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的一个顶点和一个焦点，圆心在双曲线上，则圆心到双曲线中心距离是__________．

(17) $(x+2)^{10}(x^2-1)$ 的展开的 x^{10} 系数为____________（用数字作答）．

(18) 如图，在直四棱柱 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 中，当底面四边形 $ABCD$ 满足条件____________时，有 $A_1C\perp B_1D_1$．(注：填上你认为正确的一种条件即可，不必考试所有可能的情形.)



(19) 关于函数 $f(x)=4\sin(2x+\frac{\pi}{3})(x\in R)$，有下列命题

①$y=f(x)$ 的表达式可改写为 $y=4\cos(2x-\frac{\pi}{6})$；②$y=f(x)$ 是以 2π 为最小正周期的周期函数;

③$y=f(x)$ 的图像关于点 $\left(-\frac{\pi}{6}，0\right)$ 对称；　　④$y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称.

其中正确的命题的序号是______．(注：把你认为正确的命题的序号都填上．)

三．解答题：本大题共 6 小题；共 69 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(20)（本小题满分 10 分）

设 $a\neq b$，解关于 x 的不等式 $a^2x+b^2(1-x)\geq[ax+b(1-x)]^2$.

21)（本小题满分 11 分）

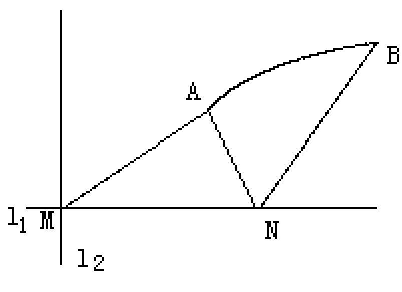
在△ABC 中，a，b，c 分别是角 A，B，C 的对边，设 $a+c=2b$，$A-C=\frac{\pi}{3}$，求 $\sin B$ 的值．以下公式供解题时参考：

$$\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2},\quad \sin\theta-\sin\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2},$$

$$\cos\theta+\cos\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2},\quad \cos\theta-\cos\varphi=-2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}.$$

(22)（本小题满分 12 分）

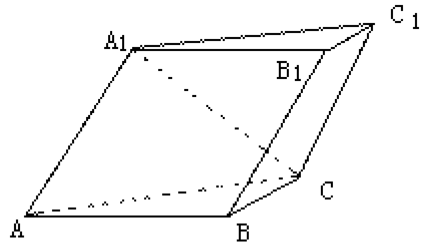
如图，直线 l_1 和 l_2 相交于点 M，$l_1\perp l_2$，点 $N\in l_1$．以 A、B 为端点的曲线段 C 上的任一点到 l_2 的距离与到点 N 的距离相等．若



$\triangle AMN$为锐角三角形，$|AM|=\sqrt{17}$，$|AN|=3$，且$|BN|=6$．建立适当的坐标系，求曲线 C 的方程．

(23)（本小题满分 12 分）

已知斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面 A_1ACC_1 与底面 ABC 垂直，$\angle ABC=90^\circ$，$BC=2$，$AC=2\sqrt{3}$，且 $AA_1\perp A_1C$，$AA_1=A_1C_1$．



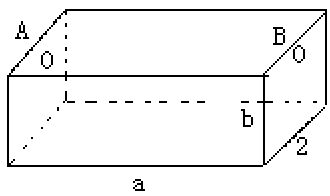
(Ⅰ)求侧棱 A_1A 与底面 ABC 所成角的大小；

(Ⅱ)求侧面 A_1ABB_1 与底面 ABC 所成二面角的大小；

(Ⅲ)求侧棱 B_1B 和侧面 A_1ACC_1 的距离．

(24)（本小题满分 12 分）

如图，为处理含有某种杂质的污水，要制造一底宽为 2 米的无盖长方体沉淀箱．污水从 A 孔流入，经沉淀后从 B 孔流出．设箱体的长度为 a 米，高度为 b 米．已知流出的水中该杂质的质量分数与 a，b 的乘积 ab 成反比．现有制箱材料 60 平方米．问当 a，b 各为多少米时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小(A、B 孔的面积忽略不计)．



(25)（本小题满分 12 分）

已知数列$\{b_n\}$是等差数列，$b_1=1$，$b_1+b_2+\cdots+b_{10}=100$．

(Ⅰ)求数列$\{b_n\}$的能项 b_n；

(Ⅱ)设数列$\{a_n\}$的通项 $a_n=\lg(1+\frac{1}{b_n})$，记 S_n 是数列$\{a_n\}$的前 n 项的和．试比较 S_n 与 $\frac{1}{2}\lg b_{n+1}$ 的大小，并证明你的结论．

1998 年普通高等学校招生全国统一考试

数学试题(文史类)参考解答及评分标准

一．选择题 本题考查基本知识和基本运算．第(1)－(10)题每小题 4 分，第(11)－(15)题

每小题 5 分．满分 65 分．

(1) D　(2) B　(3) C　(4) A　(5) B　(6) B　(7) C　(8) D　(9) A　(10) B　(11) B　(12) A　(13) B　(14) C　(15) D

二．填空题：本题考查基本知识和基本运算．每小题 4 分，满分 16 分．

(16) $\dfrac{16}{3}$　(17) -5120

(18) $AC\perp BD$，或任何能推导出这个条件的其他条件．例如 $ABCD$ 是正方形，菱形等

(19)①，③注：第(19)题多填、漏填的错填均给 0 分．

三．解答题：

（20）本小题主要考查不等式基本知识，不等式的解法．满分 10 分．

解：将原不等式化为

$(a^2-b^2)x+b^2\geqslant(a-b)^2x^2+2(a-b)bx+b^2$，

移项，整理后得　$(a-b)^2(x^2-x)\leqslant0$，

∵ $a\neq b$ 即 $(a-b)^2>0$，

∴ $x^2-x\leqslant0$，

即 $x(x-1)\leqslant0$．

解此不等式，得解集 $\{x|0\leqslant x\leqslant1\}$．

(21) 本小题考查正弦定理，同角三角函数基本公式，诱导公式等基础知识，考查利用三角公式进行恒等变形的技能及运算能力．满分 11 分．

解：由正弦定理和已知条件 $a+c=2b$ 得

$\sin A+\sin C=2\sin B$.

由和差化积公式得 $2\sin\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A-C}{2}=2\sin B$.

由 $A+B+C=\pi$，得 $\dfrac{\sin(A+C)}{2}=\dfrac{\cos B}{2}$，

又 $A-C=\dfrac{\pi}{3}$，得 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\dfrac{B}{2}=\sin B$,

∴ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\dfrac{B}{2}=2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}$.

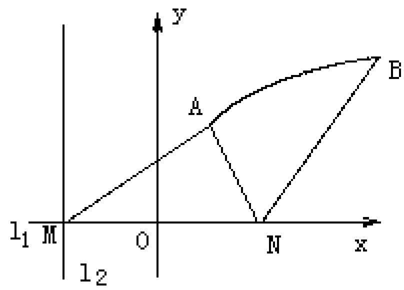
∵ $0<\dfrac{B}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\cos B}{2}\neq0$,

$\therefore \sin\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

从而 $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{1-\sin^2\frac{B}{2}}=\frac{\sqrt{13}}{4}$

$\therefore\ \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{13}}{4}=\frac{\sqrt{39}}{8}$

(22) 本小题主要考查根据所给条件选择适当的坐标系，求曲线方程的解析几何的基本思想．考查抛物线的概念和性质，曲线与方程的关系以及综合运用知识的能力．满分 12 分．



解法一：如图建立坐标系，以 l_1 为 x 轴，MN 的垂直平分线为 y 轴，点 O 为坐标原点．

依题意知：曲线段 C 是以点 N 为焦点，以 l_2 为准线的抛线段的一段，其中 A、B 分别为 C 的端点．

设曲线段 C 的方程为

$y_2=2px$（$p>0$），（$x_A\leqslant x\leqslant x_B$，$y>0$），其中 x_A，x_B 分别为 A，B 的横坐标，$P=|MN|$．

所以 M（$-\frac{P}{2}$，0），N（$\frac{P}{2}$，0）．

由 $|AM|=\sqrt{17}$，$|AN|=3$ 得

$(x_A+\frac{P}{2})^2+2Px_A=17$，　　①

$(x_A-\frac{P}{2})^2+2Px_A=9$．　　②

由①、②两式联立解得 $x_A=\frac{4}{P}$，再将其代入①式并由 $p>0$ 解得

$\begin{cases}p=4\\x_A=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}p=2\\x_A=2\end{cases}$．

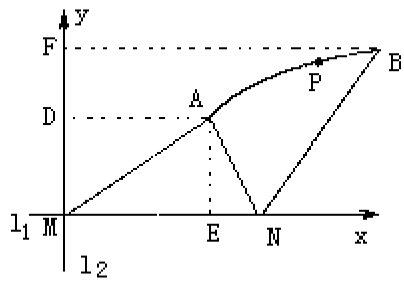
因为△AMN 是锐角三角形，所以 $\frac{P}{2}>x_A$，故舍去 $\begin{cases}p=2\\x_A=2\end{cases}$．

$\therefore\ P=4$，$x_A=1$．

由点 B 在曲线段 C 上，得 $x_B=|BN|-\frac{P}{2}=4$．

综上得曲线段 C 的方程为 $y^2=8x$（$1\leqslant x\leqslant 4$，$y>0$）.

解法二：如图建立坐标系，分别以 l_1、l_2 为 x、y 轴，M 为坐标原点.



作 $AE\perp l_1$，$AD\perp l_2$，$BF\perp l_2$，垂足分别为 E、D、F.

设 A（x_A，y_A）、B（x_B，y_B）、N（x_N，0）.

依题意有

$x_A=|ME|=|DA|=|AN|=3$，

$y_A=|DM|=\sqrt{|AM|^2-|DA|^2}=2\sqrt{2}$，由于△$AMN$ 为锐角三角形，故有

$x_N=|AE|+|EN|=4$.

$=|ME|+\sqrt{|AN|^2-|AE|^2}=4$

$X_B=|BF|=|BN|=6$.

设点 P（x，y）是曲线段 C 上任一点，则由题意知 P 属于集合

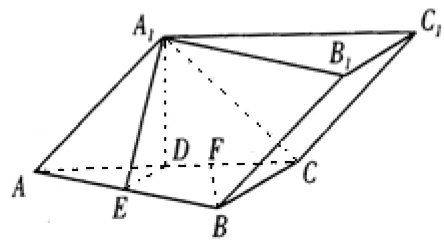
$\{(x,\ y)\mid (x-x_N)^2+y^2=x^2,\ x_A\leqslant x\leqslant x_B,\ y>0\}$.

故曲线段 C 的方程

$y^2=8(x-2)$（$3\leqslant x\leqslant 6$，$y>0$）.

(23) 本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系，棱柱的性质，空间的角和距离的概念，逻辑思维能力、空间想象能力及运算能力．满分 12 分.

注：题中赋分为得到该结论时所得分值，不给中间分.



解：(Ⅰ)作 $A_1D\perp AC$，垂足为 D，由面 $A_1ACC_1\perp$ 面 ABC，得 $A_1D\perp$ 面 ABC，

∴ $\angle A_1AD$ 为 A_1A 与面 ABC 所成的角.

∵ $AA_1\perp A_1C$，$AA_1=A_1C$，

∴ $\angle A_1AD=45°$ 为所求.

(Ⅱ)作 $DE\perp AB$，垂足为 E，连 A_1E，则由 $A_1D\perp$ 面 ABC，得 $A_1E\perp AB$.

∴$\angle A_1ED$ 是面 A_1ABB_1 与面 ABC 所成二面角的平面角.

由已知，$AB\perp BC$，得 $ED/\!/BC$．又 D 是 AC 的中点，$BC=2$，$AC=2\sqrt{3}$，

∴ $DE=1$，$AD=A_1D=\sqrt{3}$，$\mathrm{tg}A_1ED=\dfrac{A_1D}{DE}=\sqrt{3}$.

故$\angle A_1ED=60^\circ$为所求．

(III) 作 $BF\perp AC$，F为垂足，由面 $A_1ACC_1\perp$面 ABC，知 $BF\perp$面 A_1ACC_1．

$\because$ $B_1B//$面 A_1ACC_1，

$\therefore$ BF的长是 B_1B和面 A_1ACC_1的距离．

在 Rt△ABC中，$AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore$ $BF=\dfrac{AB\cdot BC}{AC}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$为所求．

(24) 本小题主要考查综合应用所学数学知识、思想和方法解决实际问题的能力，考查建立函数关系、不等式性质、最大值、最小值等基础知识．满分 12 分．

解法一：设 y为流出的水中杂质的质量分数，则 $y=\dfrac{k}{ab}$，其中 $k>0$为比例系数，依题意，即所求的 a，b值使 y值最小．

根据题设，有 $4b+2ab+2a=60(a>0，b>0)$，

得 $b=\dfrac{30-a}{2+a}$ (0＜a＜30＝， ①

于是 $y=\dfrac{k}{ab}=\dfrac{k}{\dfrac{30a-a^2}{2+a}}$

$$=\frac{k}{-a+32-\dfrac{64}{a+2}}$$

$$=\frac{k}{34-\left(a+2+\dfrac{64}{a+2}\right)}$$

$$\geq\frac{k}{34-2\sqrt{(a+2)\cdot\dfrac{64}{a+2}}}$$

$$=\frac{k}{18}$$

当 $a+2=\dfrac{64}{a+2}$时取等号，y达最小值．

这时 $a=6$，$a=-10$(舍去)．

将 $a=6$ 代入①式得 $b=3$．

故当 a 为 6 米，b 为 3 米时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小.

解法二：依题意，即所求的 a，b 的值使 ab 最大.

由题设知　$4a+2ab+2a=60$　（$a>0$，$b>0$）

即　　$a+2b+ab=30$　（$a>0$，$b>0$）.

∵ $a+2b\geqslant 2\sqrt{ab}$，

∴ $2\sqrt{2}\sqrt{ab}+ab\leqslant 30$，

当且仅当 $a=2b$ 时，上式取等号.

由 $a>0$，$b>0$，解得 $0<ab\leqslant 18$.

即当 $a=2b$ 时，ab 取得最大值，其最大值 18.

∴ $2b^2=18$．解得 $b=3$，$a=6$.

故当 a 为 6 米，b 为 3 米时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小.

(25) 本小题主要考查等差数列基本概念及其通项求法，考查对数函数性质，考查归纳，推理能力以及用数学归纳法进行论证的能力．满分 12 分.

解：(Ⅰ)设数列工$\{b_n\}$的公差为 d，由题意得

$$\begin{cases} b_1=1, \\ 10b_1+\dfrac{10(10-1)}{2d}=100. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} b_1=1, \\ d=2. \end{cases}$

∴ $b_n=2n-1$.

(Ⅱ)由 $b_n=2n-1$，知

$$S_n=\lg(1+1)+\lg(1+\frac{1}{3})+\cdots+\lg(1+\frac{1}{2n-1})$$

$$=\lg[(1+1)(1+\frac{1}{3})\cdot\ \cdots\ \cdot(1+\frac{1}{2n-1})],$$

$$\frac{1}{2}\lg b_{n+1}=\lg\sqrt{2n+1}.$$

因此要比较 S_n 与 $\frac{1}{2}\lg b_{n+1}$ 的大小，可先比较 $(1+1)(1+\frac{1}{3})\cdot\ \cdots\ \cdot(1+\frac{1}{2n-1})$ 与 $\sqrt{2n+1}$ 的大小.

取 $n=1$ 有 $(1+1)>\sqrt{2\cdot 1+1}$，

取 $n=2$ 有 $(1+1)(1+\frac{1}{3})>\sqrt{2\cdot 1+1}$

由此推测 $(1+1)(1+\frac{1}{3})\cdot\cdots\cdot(1+\frac{1}{2n-1})>\sqrt{2n+1}$.　　①

若①式成立，则由对数函数性质可判定：

$S_n>\frac{1}{2}\lg b_{n+1}$.

下面用数学归纳法证明①式.

(i)当 $n=1$ 时已验证①式成立.

(ii)假设当 $n=k$ ($k\geqslant 1$)时，①式成立，即

$(1+1)(1+\frac{1}{3})\cdot\cdots\cdot(1+\frac{1}{2k-1})>\sqrt{2k+1}$，

那么，当 $n=k+1$ 时，

$(1+1)(1+\frac{1}{3})\cdot\cdots\cdot(1+\frac{1}{2k-1})(1+\frac{1}{2(k+1)-1})$

$>\sqrt{2k+1}(1+\frac{1}{2k+1})$

$=\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+1}(2k+2)$.

$\because$ $[\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+1}(2k+2)]^2-[\sqrt{2k+3}]^2$

$=\frac{4k^2+8k+4k^2+8k+3}{2k+1}$

$=\frac{1}{2k+1}>0$,

$\therefore$ $\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+1}(2k+2)>\sqrt{2k+3}=\sqrt{2(k+1)+1}$.

因而 $(1+1)(1+\frac{1}{3})\cdot\cdots\cdot(1+\frac{1}{2k-1})(1+\frac{1}{2k+1})>\sqrt{2(k+1)+1}$.

这就是说①式当 $n=k+1$ 时也成立.

由(i)，(ii)知①式对任何正整数 n 都成立．由此证得：$S_n>\frac{1}{2}\lg b_{n+1}$.