

## 2015 年高考天津市文科数学真题

### 一、选择题

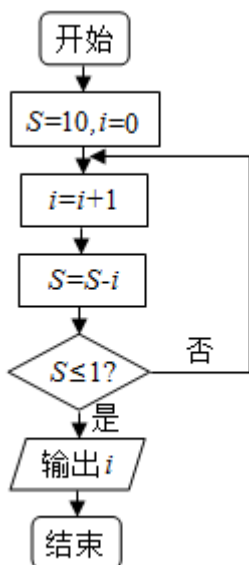
1. 已知全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，集合  $A = \{2, 3, 5\}$ ，集合  $B = \{1, 3, 4, 6\}$ ，则集合  $A \cap C_U B = ( \quad )$

- A.  $\{3\}$                       B.  $\{2, 5\}$                       C.  $\{1, 4, 6\}$                       D.  $\{2, 3, 5\}$

2. 设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ x - 2y \leq 0 \\ x + 2y - 8 \leq 0 \end{cases}$ ，则目标函数的最大值为  $z = 3x + y$  ( )

- A. 7                      B. 8                      C. 9                      D. 14

3. 阅读下边的程序框图，运行相应的程序，则输出  $i$  的值为 ( )



- A. 2                      B. 3                      C. 4                      D. 5

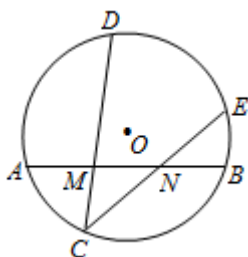
4. 设  $x \in \mathbb{R}$ ，则“ $1 < x < 2$ ”是“ $|x - 2| < 1$ ”的 ( )

- A. 充分而不必要条件                      B. 必要而不充分条件  
C. 充要条件                      D. 既不充分也不必要条件

5. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的一个焦点为  $F(2, 0)$ ，且双曲线的渐近线与圆  $(x - 2)^2 + y^2 = 3$  相切，则双曲线的方程为 ( )

- A.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{13} = 1$     B.  $\frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{9} = 1$     C.  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$     D.  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

6. 如图，在圆  $O$  中， $M, N$  是弦  $AB$  的三等分点，弦  $CD, CE$  分别经过点  $M, N$ ，若  $CM=2, MD=4, CN=3$ ，则线段  $NE$  的长为 ( )



- A.  $\frac{8}{3}$       B. 3      C.  $\frac{10}{3}$       D.  $\frac{5}{2}$

7. 已知定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x) = 2^{|x-m|} - 1$  ( $m$  为实数) 为偶函数,

记  $a = f(\log_{0.5} 3)$ ,  $b = f(\log_2 5)$ ,  $c = f(2m)$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )

- A.  $a < b < c$       B.  $c < a < b$       C.  $a < c < b$       D.  $c < b < a$

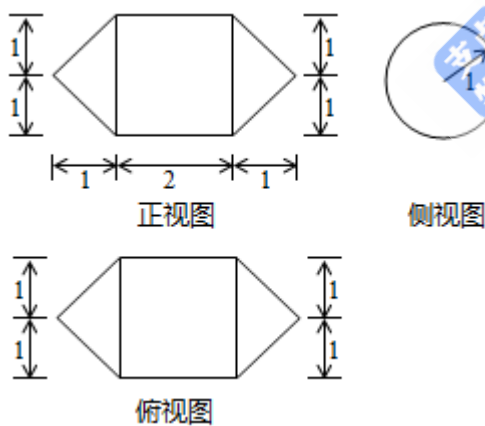
8. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2 - |x|, & x \leq 2 \\ (x-2)^2, & x > 2 \end{cases}$ , 函数  $g(x) = 3 - f(2-x)$ , 则函数  $y = f(x) - g(x)$  的零点的个数为

- ( )  
A. 2      B. 3      C. 4      D. 5

## 二、填空题

9.  $i$  是虚数单位, 计算  $\frac{1-2i}{2+i}$  的结果为\_\_\_\_\_.

10. 一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则该几何体的体积为\_\_\_\_\_.



11. 已知函数  $f(x) = ax \ln x, x \in (0, +\infty)$ , 其中  $a$  为实数,  $f'(x)$  为  $f(x)$  的导函数, 若  $f'(1) = 3$ , 则  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

12. 已知  $a > 0, b > 0, ab = 8$ , 则当  $a$  的值为\_\_\_\_\_时  $\log_2 a \cdot \log_2 (2b)$  取得最大值.

13. 在等腰梯形  $ABCD$  中, 已知  $AB \parallel DC, AB = 2, BC = 1, \angle ABC = 60^\circ$ , 点  $E$  和点  $F$  分别在线段  $BC$  和

$CD$  上, 且  $\overline{BE} = \frac{2}{3} \overline{BC}, \overline{DF} = \frac{1}{6} \overline{DC}$ , 则  $\overline{AE} \cdot \overline{AF}$  的值为\_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = \sin \omega x + \cos \omega x (\omega > 0), x \in \mathbf{R}$ , 若函数  $f(x)$  在区间  $(-\omega, \omega)$  内单调递增, 且函数  $f(x)$  的图像关于直线  $x = \omega$  对称, 则  $\omega$  的值为\_\_\_\_\_.

### 三、解答题

15. 设甲、乙、丙三个乒乓球协会的运动员人数分别为 27,9,18, 先采用分层抽样的方法从这三个协会中抽取 6 名运动员参加比赛。

(I) 求应从这三个协会中分别抽取的运动员人数;

(II) 将抽取的 6 名运动员进行编号, 编号分别为  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ , 从这 6 名运动员中随机抽取 2 名参加双打比赛。

(i) 用所给编号列出所有可能的结果;

(ii) 设 A 为事件“编号为  $A_5, A_6$  的两名运动员至少有一人被抽到”, 求事件 A 发生的概率。

16.  $\triangle ABC$  中, 内角 A,B,C 所对的边分别为 a, b, c, 已知  $\triangle ABC$  的面积为  $3\sqrt{15}$ ,  $b - c = 2, \cos A = -\frac{1}{4}$ ,

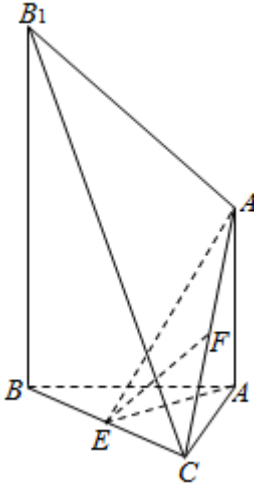
(I) 求 a 和  $\sin C$  的值;

(II) 求  $\cos\left(2A + \frac{\pi}{6}\right)$  的值。

17. 如图, 已知  $AA_1 \perp$  平面 ABC,  $BB_1 \parallel AA_1$ ,  $AB=AC=3$ ,  $BC = 2\sqrt{5}, AA_1 = \sqrt{7}$ ,  $BB_1 = 2\sqrt{7}$ , 点 E, F 分别是 BC,  $A_1C$  的中点,

(I) 求证:  $EF \parallel$  平面  $A_1B_1BA$ ; (II) 求证: 平面  $AEA_1 \perp$  平面  $BCB_1$ 。

(III) 求直线  $A_1B_1$  与平面  $BCB_1$  所成角的大小。



18. 已知  $\{a_n\}$  是各项均为正数的等比数列,  $\{b_n\}$  是等差数列, 且  $a_1 = b_1 = 1, b_2 + b_3 = 2a_3,$   
 $a_5 - 3b_2 = 7.$

(I) 求  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式;

(II) 设  $c_n = a_n b_n, n \in \mathbb{N}^*$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和.

19. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的上顶点为  $B$ , 左焦点为  $F$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{5}}{5}.$

(I) 求直线  $BF$  的斜率;

(II) 设直线  $BF$  与椭圆交于点  $P$  ( $P$  异于点  $B$ ), 过点  $B$  且垂直于  $BF$  的直线与椭圆交于点  $Q$  ( $Q$  异于点  $B$ ) 直线  $PQ$  与  $x$  轴交于点  $M$ ,  $|PM| = \lambda |MQ|.$

(i) 求  $\lambda$  的值;

(ii) 若  $|PM| \sin \angle BQP = \frac{7\sqrt{5}}{9}$ , 求椭圆的方程.

20. 已知函数  $f(x) = 4x - x^4, x \in \mathbb{R}$ , 其中  $n \in \mathbb{N}^*$ , 且  $n \geq 2.$

(I) 求  $f(x)$  的单调区间;

(II) 设曲线  $y = f(x)$  与  $x$  轴正半轴的交点为  $P$ , 曲线在点  $P$  处的切线方程为  $y = g(x)$ , 求证: 对于任意的实数  $x$ , 都有  $f(x) \leq g(x);$

(III) 若方程  $f(x)=a$  ( $a$  为实数) 有两个正实数根  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ , 求证:  $x_2 - x_1 < -\frac{a}{3} + 4^{\frac{1}{3}}$ .

## 2015 年高考天津市文科数学真题

### 一、选择题

1. 答案: B

解析过程:

$A = \{2, 3, 5\}$ ,  $C_U B = \{2, 5\}$ , 则  $A \cap (C_U B) = \{2, 5\}$ , 选 B

2. 答案: C

解析过程:

$$z = 3x + y = \frac{5}{2}(x-2) + \frac{1}{2}(x+2y-8) + 9 \leq 9$$

当  $x=2, y=3$  时取得最大值 9, 选 C

3. 答案: C

解析过程:

由程序框图可知:  $i=2, S=8$ ;  $i=3, S=5$ ;  $i=4, S=1$ , 选 C

4. 答案: A

解析过程:

$$\text{由 } |x-2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3,$$

可知“ $1 < x < 2$ ”是“ $|x-2| < 1$ ”的充分而不必要条件, 选 A.

5. 答案: D

解析过程:

双曲线的渐近线为  $bx - ay = 0$ , 由题意得  $\frac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{3}$ ,

又  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$ , 解得  $a = 1, b = \sqrt{3}$ , 选 D

6. 答案: A

解析过程:

由相交弦定理可得

$$CM \times MD = CN \times NE = \frac{1}{3} AB \times AB \Rightarrow NE = \frac{CM \times MD}{CN} = \frac{8}{3}, \text{ 选 A.}$$

7. 答案: B

解析过程:

由  $f(x)$  为偶函数得  $m = 0$ , 所以  $a = 2, b = 4, c = 0$ , 选 B.

8. 答案: A

解析过程:

当  $x < 0$  时,  $f(2-x) = x^2$ ,

此时方程  $f(x) - g(x) = -1 - |x| + x^2$  的小于零的零点为  $x = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ;

当  $0 \leq x \leq 2$  时,  $f(2-x) = 2 - |2-x| = x$ ,

方程  $f(x) - g(x) = 2 - |x| + x = 2$  无零点;

当  $x > 2$  时,  $f(2-x) = 2 - |2-x| = 4-x$ ,

方程  $f(x) - g(x) = (x-2)^2 + x - 7 = x^2 - 3x - 3$  大于 2 的零点有一个

选 A

二、填空题

9. 答案: -i

解析过程:

$$\frac{1-2i}{2+i} = \frac{-i^2-2i}{2+i} = \frac{-i(i+2)}{2+i} = -i$$

10. 答案:  $\frac{8}{3}\pi$

解析过程:

该几何体是由两个高为 1 的圆锥与一个高为 2 圆柱组合而成,

所以该几何体的体积为  $2 \times \frac{1}{3} \times \pi \times 1 + \pi \times 2 = \frac{8\pi}{3} (\text{m}^3)$

11. 答案: 3

解析过程:

因为  $f'(x) = a(1 + \ln x)$ , 所以  $f'(1) = a = 3$ .

12. 答案: 4

解析过程:

$$\begin{aligned}\log_2 a \cdot \log_2 (2b) &\leq \left( \frac{\log_2 a + \log_2 (2b)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (\log_2 2ab)^2 = \frac{1}{4} (\log_2 16)^2 = 4\end{aligned}$$

当  $a = 2b$  时取等号, 结合  $a > 0, b > 0, ab = 8$ ,

可得  $a = 4, b = 2$ .

13. 答案:  $\frac{29}{18}$

解析过程:

在等腰梯形  $ABCD$  中, 由  $AB \parallel DC, AB = 2, BC = 1, \angle ABC = 60^\circ$ ,

$$\text{得 } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1, \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF})$$

$$= \left( \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} \right) \cdot \left( \overrightarrow{AD} + \frac{1}{12} \overrightarrow{AB} \right)$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{12} \overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{18} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{18} = \frac{29}{18}$$

14. 答案:  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

解析过程:

由  $f(x)$  在区间  $(-\omega, \omega)$  内单调递增, 且  $f(x)$  的图像关于直线  $x = \omega$  对称,

$$\text{可得 } 2\omega \leq \frac{\pi}{\omega}, \text{ 且 } f(\omega) = \sin \omega^2 + \cos \omega^2 = \sqrt{2} \Rightarrow \sin \left( \omega^2 + \frac{\pi}{4} \right) = 1,$$

$$\text{所以 } \omega^2 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

15. 答案: 见解析

解析过程:

(I) 应从甲、乙、丙这三个协会中分别抽取的运动员人数分别为 3, 1, 2;

(II) (i) 从这 6 名运动员中随机抽取 2 名参加双打比赛, 所有可能的结果为

$$\{A_1, A_2\}, \{A_1, A_3\}, \{A_1, A_4\}, \{A_1, A_5\}, \{A_1, A_6\},$$

$\{A_2, A_3\}, \{A_2, A_4\}, \{A_2, A_5\}, \{A_2, A_6\}, \{A_3, A_4\},$

$\{A_3, A_5\}, \{A_3, A_6\}, \{A_4, A_5\}, \{A_4, A_6\}, \{A_5, A_6\}$ , 共 15 种.

(ii) 编号为  $A_5, A_6$  的两名运动员至少有一人被抽到的结果为

$\{A_1, A_5\}, \{A_1, A_6\}, \{A_2, A_5\}, \{A_2, A_6\}, \{A_3, A_5\},$

$\{A_3, A_6\}, \{A_4, A_5\}, \{A_4, A_6\}, \{A_5, A_6\}$ , 共 9 种,

所以事件  $A$  发生的概率  $P(A) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ .

16.  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 已知  $\triangle ABC$  的面积为  $3\sqrt{15}$ ,

$$b - c = 2, \cos A = -\frac{1}{4},$$

(I) 求  $a$  和  $\sin C$  的值;

(II) 求  $\cos\left(2A + \frac{\pi}{6}\right)$  的值.

答案: 见解析

解析过程:

(I)  $\triangle ABC$  中, 由  $\cos A = -\frac{1}{4}$ , 得  $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ,

由  $\frac{1}{2}bc \sin A = 3\sqrt{15}$ , 得  $bc = 24$ ,

又由  $b - c = 2$ , 解得  $b = 6, c = 4$ .

由  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ , 可得  $a = 8$ .

由  $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ , 得  $\sin C = \frac{\sqrt{15}}{8}$

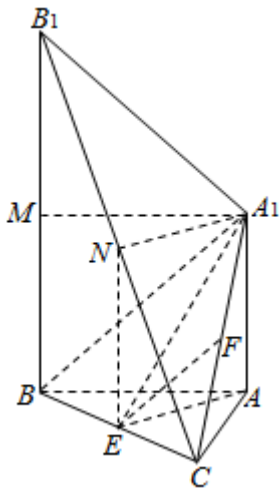
(II)  $\cos\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2A \cos \frac{\pi}{6} - \sin 2A \sin \frac{\pi}{6}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(2\cos^2 A - 1) - \sin A \cos A = \frac{\sqrt{15} - 7\sqrt{3}}{16}$$

17. 答案: 见解析

解析过程:

(I) 证明: 如图, 连接  $A_1B$ ,



在 $\triangle A_1BC$ 中,因为 $E$ 和 $F$ 分别是 $BC, A_1C$ 的中点,

所以 $EF \parallel BA_1$ ,又因为 $EF \not\subset$ 平面 $A_1B_1BA$ ,

所以 $EF \parallel$ 平面 $A_1B_1BA$ .

(II) 因为 $AB=AC, E$ 为 $BC$ 中点,所以 $AE \perp BC$ ,

因为 $AA_1 \perp$ 平面 $ABC, BB_1 \parallel AA_1$ ,

所以 $BB_1 \perp$ 平面 $ABC$ ,从而 $BB_1 \perp AE$ ,

又 $BC \cap BB_1 = B$ ,所以 $AE \perp$ 平面 $BCB_1$ ,

又因为 $AE \subset$ 平面 $AEA_1$ ,所以平面 $AEA_1 \perp$ 平面 $BCB_1$ .

(III) 取 $BB_1$ 中点 $M$ 和 $B_1C$ 中点 $N$ ,连接 $A_1M, A_1N$ ,

因为 $N$ 和 $E$ 分别为 $B_1C, BC$ 中点,

所以 $NE \parallel BB_1, NE = \frac{1}{2}BB_1$ ,

故 $NE \parallel AA_1, NE = AA_1$ ,

所以 $A_1N \parallel AE, A_1N = AE$ ,

又因为 $AE \perp$ 平面 $BCB_1$ ,所以 $A_1N \perp$ 平面 $BCB_1$ ,

从而 $\angle A_1B_1N$ 就是直线 $A_1B_1$ 与平面 $BCB_1$ 所成角,

在 $\triangle ABC$ 中,可得 $AE = 2$ ,所以 $A_1N = AE = 2$ ,

因为 $BM \parallel AA_1, BM = AA_1$ ,所以 $A_1M \parallel AB, A_1M = AB$ ,

又由  $AB \perp BB_1$ ，有  $A_1M \perp BB_1$ ，

在  $Rt\Delta A_1MB_1$  中，可得  $A_1B_1 = 4$ ，

在  $Rt\Delta A_1NB_1$  中， $\sin \angle A_1B_1N = \frac{A_1N}{A_1B_1} = \frac{1}{2}$ ，

因此  $\angle A_1B_1N = 30^\circ$ ，所以，直线  $A_1B_1$  与平面  $BCB_1$  所成角为  $30^\circ$ 。

18. 答案：见解析

解析过程：

(I) 设  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ ， $\{b_n\}$  的公差为  $d$ ，

由题意  $q > 0$ ，由已知，有  $\begin{cases} 2q^2 - 3d = 2, \\ q^4 - 3d = 10, \end{cases}$

消去  $d$  得  $q^4 - 2q^2 - 8 = 0$ ，解得  $q = 2, d = 2$ ，

所以  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 2^{n-1}, n \in \mathbf{N}^*$ ，

$\{b_n\}$  的通项公式为  $b_n = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^*$ 。

(II) 由 (I) 有  $c_n = (2n - 1)2^{n-1}$ ，设  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，

则  $S_n = 1 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 5 \times 2^2 + \dots + (2n - 1) \times 2^{n-1}$ ，

$2S_n = 1 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \dots + (2n - 1) \times 2^n$ ，

两式相减得  $-S_n = 1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n - (2n - 1) \times 2^n = -(2n - 3) \times 2^n - 3$ ，

所以  $S_n = (2n - 3)2^n + 3$ 。

19. 答案：见解析

解析过程：

(I)  $F(-c, 0)$ ，由已知  $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{5}$  及  $a^2 = b^2 + c^2$ ，

可得  $a = \sqrt{5}c, b = 2c$ ，又因为  $B(0, b)$ ，

故直线  $BF$  的斜率  $k = \frac{b - 0}{0 - (-c)} = \frac{b}{c} = 2$ 。

(II) 设点  $P(x_P, y_P), Q(x_Q, y_Q), M(x_M, y_M)$ ，

(i) 由 (I) 可得椭圆方程为  $\frac{x^2}{5c^2} + \frac{y^2}{4c^2} = 1$ ,

直线 BF 的方程为  $y = 2x + 2c$  ,

两方程联立消去 y 得  $3x^2 + 5cx = 0$ , 解得  $x_p = -\frac{5c}{3}$  .

因为  $BQ \perp BP$ , 所以直线 BQ 方程为  $y = -\frac{1}{2}x + 2c$  ,

与椭圆方程联立消去 y 得  $21x^2 - 40cx = 0$  ,

解得  $x_Q = \frac{40c}{21}$  . 又因为  $\lambda = \frac{|PM|}{|MQ|}$  ,

及  $x_M = 0$  得  $\lambda = \frac{|x_M - x_P|}{|x_Q - x_M|} = \frac{|x_P|}{|x_Q|} = \frac{7}{8}$  .

(ii) 由 (i) 得  $\frac{|PM|}{|MQ|} = \frac{7}{8}$  ,

所以  $\frac{|PM|}{|PM| + |MQ|} = \frac{7}{7+8} = \frac{7}{15}$ , 即  $|PQ| = \frac{15}{7}|PM|$  ,

又因为  $|PM| \sin \angle BQP = \frac{7\sqrt{5}}{9}$  ,

所以  $|BP| = |PQ| \sin \angle BQP = \frac{15}{7} |PM| \sin \angle BQP = \frac{5\sqrt{5}}{3}$  .

又因为  $y_p = 2x_p + 2c = -\frac{4}{3}c$  ,

所以  $|BP| = \sqrt{\left(0 + \frac{5c}{3}\right)^2 + \left(2c + \frac{4c}{3}\right)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{3}c$  ,

因此  $\frac{5\sqrt{5}}{3}c = \frac{5\sqrt{5}}{3}$ ,  $c = 1$ , 所以椭圆方程为  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$  .

20. 答案: 见解析

解析过程:

(I) 由  $f(x) = 4x - x^4$ , 可得  $f'(x) = 4 - 4x^3$ ,

当  $f'(x) > 0$  , 即  $x < 1$  时, 函数  $f(x)$  单调递增;

当  $f'(x) < 0$  , 即  $x > 1$  时, 函数  $f(x)$  单调递减.

所以函数  $f(x)$  的单调递增区间是  $(-\infty, 1)$  , 单调递减区间是  $(1, +\infty)$  .

(II) 设  $P(x_0, 0)$  , 则  $x_0 = 4^{\frac{1}{3}}$  ,  $f'(x_0) = -12$  ,

曲线  $y = f(x)$  在点  $P$  处的切线方程为  $y = f'(x_0)(x - x_0)$  ,

即  $g(x) = f'(x_0)(x - x_0)$  , 令  $F(x) = f(x) - g(x)$

即  $F(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$  则  $F'(x) = f'(x) - f'(x_0)$  .

由于  $f(x) = 4 - 4x^3$  在  $(-\infty, +\infty)$  单调递减,

故  $F'(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  单调递减, 又因为  $F'(x_0) = 0$  ,

所以当  $x \in (-\infty, x_0)$  时,  $F'(x) > 0$  , 当  $x \in (x_0, +\infty)$  时,  $F'(x) < 0$  ,

所以  $F(x)$  在  $(-\infty, x_0)$  单调递增, 在  $(x_0, +\infty)$  单调递减,

所以对任意的实数  $x$  ,  $F(x) \leq F(x_0) = 0$  ,

对于任意的正实数  $x$  , 都有  $f(x) \geq g(x)$  .

(III) 由 (II) 知  $g(x) = -12(x - 4^{\frac{1}{3}})$  ,

设方程  $g(x) = a$  的根为  $x_2'$  , 可得  $x_2' = -\frac{a}{12} + 4^{\frac{1}{3}}$  ,

因为  $g(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  单调递减,

又由 (II) 知  $g(x_2) \geq f(x_2) = a = g(x_2')$  , 所以  $x_2 \leq x_2'$  .

类似的, 设曲线  $y = f(x)$  在原点处的切线为  $y = h(x)$  , 可得  $h(x) = 4x$  ,

对任意的  $x \in (-\infty, +\infty)$  , 有  $f(x) - h(x) = -x^4 \leq 0$  即  $f(x) \leq h(x)$  .

设方程  $h(x) = a$  的根为  $x_1'$  , 可得  $x_1' = \frac{a}{4}$  ,

因为  $h(x) = 4x$  在  $(-\infty, +\infty)$  单调递增, 且  $h(x_1') = a = f(x_1) \leq h(x_1)$  ,

因此,  $x_1' \leq x_1$  , 所以  $x_2 - x_1 \leq x_2' - x_1' = -\frac{a}{3} + 4^{\frac{1}{3}}$