2007年黑龙江高考理科数学真题及答案

注意事项：

1. 本试题卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共4页，总分150分，考试时间120分钟.
2. 答题前，考生须将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在本试题卷指定的位置上.
3. 选择题的每小题选出答案后，用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，不能答在试题卷上.
4. 非选择题必须使用0.5毫米的黑色字迹的签字笔在答题卡上书写，字体工整，笔迹清楚
5. 非选择题必须按照题号顺序在答题卡上各题目的答题区域内作答．超出答题区域或在其它题的答题区域内书写的答案无效；在草稿纸、本试题卷上答题无效.
6. 考试结束，将本试题卷和答题卡一并交回.

第Ⅰ卷（选择题）

本卷共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

参考公式：

如果事件 A，B 互斥，那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A，B 相互独立，那么

$P(A\bullet B)=P(A)\bullet P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p，那么

n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\dots，n)$

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

一、选择题

1．$\sin 210^\circ=$（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$-\dfrac{1}{2}$

2．函数 $y=|\sin x|$ 的一个单调增区间是（　　）

A．$\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$　B．$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$　　C．$\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$　　D．$\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$

3．设复数 z 满足 $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{z}=\mathrm{i}$，则 $z=$（　　）

A．$-2+\mathrm{i}$　　B．$-2-\mathrm{i}$　　C．$2-\mathrm{i}$　　D．$2+\mathrm{i}$

4．下列四个数中最大的是（　　）

A．$(\ln 2)^2$　　B．$\ln(\ln 2)$　　C．$\ln\sqrt{2}$　　D．$\ln 2$

5．在$\triangle ABC$中，已知D是AB边上一点，若$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB},\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}$，则$\lambda=$（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$-\frac{1}{3}$　　D．$-\frac{2}{3}$

6．不等式$\frac{x-1}{x^2-4}>0$的解集是（　　）

A．$(-2,1)$　　B．$(2,+\infty)$　　C．$(-2,1)\cup(2,+\infty)$　　D．$(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

7．已知正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧棱长与底面边长相等，则AB_1与侧面ACC_1A_1所成角的正弦值等于（　　）

A．$\frac{\sqrt{6}}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{10}}{4}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

8．已知曲线$y=\frac{x^2}{4}-3\ln x$的一条切线的斜率为$\frac{1}{2}$，则切点的横坐标为（　　）

A．3　　B．2　　C．1　　D．$\frac{1}{2}$

9．把函数$y=\mathrm{e}^x$的图像按向量$\boldsymbol{a}=(2,3)$平移，得到$y=f(x)$的图像，则$f(x)=$（　　）

A．$\mathrm{e}^{x-3}+2$　　B．$\mathrm{e}^{x+3}-2$　　C．$\mathrm{e}^{x-2}+3$　　D．$\mathrm{e}^{x+2}-3$

10．从5位同学中选派4位同学在星期五、星期六、星期日参加公益活动，每人一天，要求星期五有2人参加，星期六、星期日各有1人参加，则不同的选派方法共有（　　）

A．40种　　B．60种　　C．100种　　D．120种

11．设F_1，F_2分别是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$的左、右焦点，若双曲线上存在点$A$，使$\angle F_1AF_2=90^\circ$且$|AF_1|=3|AF_2|$，则双曲线的离心率为（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{10}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{15}}{2}$　　D．$\sqrt{5}$

12．设F为抛物线$y^2=4x$的焦点，A，B，C为该抛物线上三点，若$\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$，则$|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=$（　　）

A．9　　B．6　　C．4　　D．3

第Ⅱ卷（非选择题）

本卷共10题，共90分

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．$(1+2x^2)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中常数项为___________．（用数字作答）

14．在某项测量中，测量结果 ξ 服从正态分布 $N(1,\ \sigma^2)(\sigma>0)$．若 ξ 在 $(0,1)$ 内取值的概率为 0.4，则 ξ 在 $(0,2)$ 内取值的概率为_______________．

15．一个正四棱柱的各个顶点在一个直径为 2cm 的球面上．如果正四棱柱的底面边长为 1cm，那么该棱柱的表面积为___________cm^2．

16．已知数列的通项 $a_n=-5n+2$，其前 n 项和为 S_n，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^2}=$___________．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分 10 分）

在 $\triangle ABC$ 中，已知内角 $A=\dfrac{\pi}{3}$，边 $BC=2\sqrt{3}$．设内角 $B=x$，周长为 y．

（1）求函数 $y=f(x)$ 的解析式和定义域；

（2）求 y 的最大值．

18．（本小题满分 12 分）

从某批产品中，有放回地抽取产品二次，每次随机抽取 1 件，假设事件 A：“取出的 2 件产品中至多有 1 件是二等品”的概率 $P(A)=0.96$．

（1）求从该批产品中任取 1 件是二等品的概率 p；

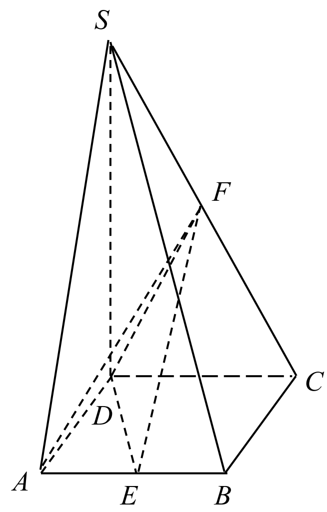
（2）若该批产品共 100 件，从中任意抽取 2 件，ξ 表示取出的 2 件产品中二等品的件数，求 ξ 的分布列．

19．（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，侧棱 $SD\perp$ 底面 $ABCD$，E，F 分别为 AB，SC 的中点．

（1）证明 $EF\,/\!/$ 平面 SAD；

（2）设 $SD=2DC$，求二面角 $A-EF-D$ 的大小．



20．（本小题满分 12 分）

在直角坐标系 xOy 中，以 O 为圆心的圆与直线 $x-\sqrt{3}y=4$ 相切．

（1）求圆O的方程；

（2）圆O与x轴相交于A，B两点，圆内的动点P使$|PA|,|PO|,|PB|$成等比数列，求$\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}$的取值范围.

21．（本小题满分12分）

设数列$\{a_n\}$的首项$a_1\in(0,1)$，$a_n=\dfrac{3-a_{n-1}}{2}$，$n=2,3,4$，… .

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=a_n\sqrt{3-2a_n}$，证明$b_n<b_{n+1}$，其中n为正整数.

22．（本小题满分12分）

已知函数$f(x)=x^3-x$.

（1）求曲线$y=f(x)$在点$M(t,f(t))$处的切线方程；

（2）设$a>0$，如果过点(a,b)可作曲线$y=f(x)$的三条切线，证明：$-a<b<f(a)$.

参考答案

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则.

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度．可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

3．解答右侧所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

4．只给整数分数．选择题和填空题不给中间分.

一、选择题

1．D　2．C　3．C　4．D　5．A　6．C

7．A　8．A　9．C　10．B　11．B　12．B

二、填空题

13．-42　14．0.8　15．$2+4\sqrt{2}$　16．$-\dfrac{5}{2}$

三、解答题

17．解：（1）$\triangle ABC$的内角和$A+B+C=\pi$，由$A=\dfrac{\pi}{3},B>0,C>0$得

$0<B<\dfrac{2\pi}{3}$.

应用正弦定理，知

$$AC=\frac{BC}{\sin A}\sin B=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\sin x=4\sin x,$$

$$AB=\frac{BC}{\sin A}\sin C=4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right).$$

因为 $y=AB+BC+AC$，

所以 $y=4\sin x+4\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)+2\sqrt{3}\left(0<x<\dfrac{2\pi}{3}\right)$，

（2）因为 $y=4\left(\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}\sin x\right)+2\sqrt{3}$

$$=4\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}<x+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}\right),$$

所以，当 $x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{3}$时，y 取得最大值 $6\sqrt{3}$.

18．解：（1）记 A_0 表示事件“取出的 2 件产品中无二等品”，

A_1 表示事件“取出的 2 件产品中恰有 1 件二等品”.

则 A_0，A_1 互斥，且 $A=A_0+A_1$，故

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_0+A_1)\\&=P(A_0)+P(A_1)\\&=(1-p)^2+C_2^1p(1-p)\\&=1-p^2\end{aligned}$$

于是 $0.96=1-p^2$.

解得 $p_1=0.2$，$p_2=-0.2$（舍去）.

（2）ξ 的可能取值为 $0,1,2$.

若该批产品共 100 件，由（1）知其二等品有 $100\times0.2=20$ 件，故

$$P(\xi=0)=\frac{C_{80}^2}{C_{100}^2}=\frac{316}{495}.$$

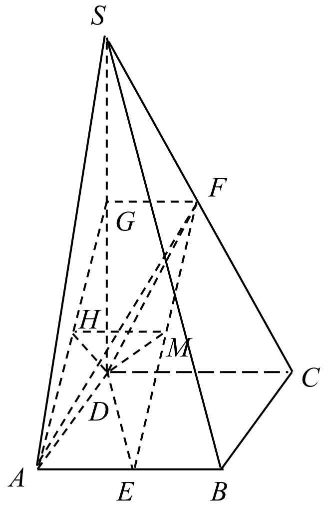
$$P(\xi=1)=\frac{C_{80}^{1}C_{20}^{1}}{C_{100}^{2}}=\frac{160}{495}.$$

$$P(\xi=2)=\frac{C_{20}^{2}}{C_{100}^{2}}=\frac{19}{495}.$$

所以ξ的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{316}{495}$	$\frac{160}{495}$	$\frac{19}{495}$

19．解法一：



（1）作$FG \parallel DC$交SD于点G，则G为SD的中点.

连结AG，$FG \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}CD$，又$CD \underline{\underline{\parallel}} AB$，

故$FG \underline{\underline{\parallel}} AE$，$AEFG$为平行四边形.

$EF \parallel AG$，又$AG \subset$平面SAD，$EF \not\subset$平面SAD.

所以$EF \parallel$平面SAD.

（2）不妨设$DC=2$，则$SD=4$，$DG=2$，$\triangle ADG$为等腰直角三角形.

取AG中点H，连结DH，则$DH \perp AG$.

又$AB \perp$平面SAD，所以$AB \perp DH$，而$AB \cap AG=A$，

所以$DH \perp$面AEF.

取EF中点M，连结MH，则$HM \perp EF$.

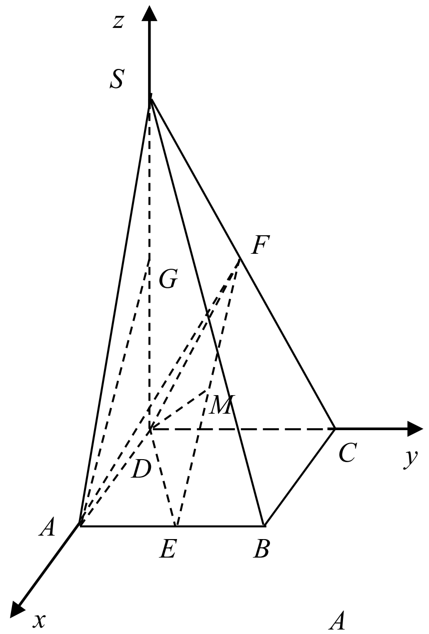
连结DM，则$DM \perp EF$.

故$\angle DMH$为二面角$A-EF-D$的平面角

$$\tan\angle DMH=\frac{DH}{HM}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}.$$

所以二面角$A-EF-D$的大小为$\arctan\sqrt{2}$.

解法二：（1）如图，建立空间直角坐标系$D-xyz$.



设$A(a,0,0)$，$S(0,0,b)$，则$B(a,a,0)$，$C(0,a,0)$，

$E\left(a,\frac{a}{2},0\right)$，$F\left(0,\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$，

$\overrightarrow{EF}=\left(-a,0,\frac{b}{2}\right)$.

取 SD 的中点 $G\left(0,0,\frac{b}{2}\right)$，则 $\overrightarrow{AG}=\left(-a,0,\frac{b}{2}\right)$.

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AG}$，$EF\ /\!/\ AG$，$AG\subset$ 平面 SAD，$EF\not\subset$ 平面 SAD，

所以 $EF\ /\!/$ 平面 SAD.

（2）不妨设 $A(1,0,0)$，则 $B(1,1,0)$，$C(0,1,0)$，$S(0,0,2)$，$E\left(1,\frac{1}{2},0\right)$，$F\left(0,\frac{1}{2},1\right)$.

EF 中点 $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{MD}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{EF}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{MD}\bullet\overrightarrow{EF}=0$，$MD\perp EF$

又 $\overrightarrow{EA}=\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{EA}\bullet\overrightarrow{EF}=0$，$EA\perp EF$，

所以向量 $\overrightarrow{MD}$ 和 $\overrightarrow{EA}$ 的夹角等于二面角 $A-EF-D$ 的平面角.

$$\cos<\overrightarrow{MD},\overrightarrow{EA}>=\frac{\overrightarrow{MD}\bullet\overrightarrow{EA}}{\left|\overrightarrow{MD}\right|\bullet\left|\overrightarrow{EA}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

所以二面角 $A-EF-D$ 的大小为 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

20．解：（1）依题设，圆 O 的半径 r 等于原点 O 到直线 $x-\sqrt{3}y=4$ 的距离，

即 $r=\frac{4}{\sqrt{1+3}}=2$.

得圆 O 的方程为 $x^2+y^2=4$.

（2）不妨设 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，$x_1<x_2$. 由 $x^2=4$ 即得

$A(-2,0)$，$B(2,0)$.

设 $P(x,\ y)$，由 $|PA|,|PO|,|PB|$ 成等比数列，得

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2}\bullet\sqrt{(x-2)^2+y^2}=x^2+y^2,$$

即 $x^2-y^2=2$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}&=(-2-x,-y)\bullet(2-x,-y)\\&=x^2-4+y^2\\&=2(y^2-1).\end{aligned}$$

由于点 P 在圆 O 内，故 $\begin{cases} x^2+y^2<4, \\ x^2-y^2=2. \end{cases}$

由此得 $y^2<1$.

所以 $\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}$ 的取值范围为 $[-2,0)$.

21．解：（1）由 $a_n=\dfrac{3-a_{n-1}}{2}$，$n=2,3,4$，… ，

整理得　$1-a_n=-\dfrac{1}{2}(1-a_{n-1})$.

又 $1-a_1\neq 0$，所以 $\{1-a_n\}$ 是首项为 $1-a_1$，公比为 $-\dfrac{1}{2}$ 的等比数列，得

$$a_n=1-(1-a_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

（2）方法一：

由（1）可知 $0<a_n<\dfrac{3}{2}$，故 $b_n>0$.

那么，$b_{n+1}^2-b_n^2$

$$\begin{aligned}&=a_{n+1}^2(3-2a_{n+1})-a_n^2(3-2a_n)\\&=\left(\frac{3-a_n}{2}\right)^2\left(3-2\times\frac{3-a_n}{2}\right)-a_n^2(3-2a_n)\\&=\frac{9a_n}{4}(a_n-1)^2.\end{aligned}$$

又由（1）知 $a_n>0$ 且 $a_n\neq 1$，故 $b_{n+1}^2-b_n^2>0$，

因此　　$b_n<b_{n+1}$，n 为正整数.

方法二：

由（1）可知 $0<a_n<\dfrac{3}{2}$，$a_n\neq 1$，

因为 $a_{n+1}=\dfrac{3-a_n}{2}$，

所以　　$b_{n+1}=a_{n+1}\sqrt{3-2a_{n+1}}=\dfrac{(3-a_n)\sqrt{a_n}}{2}$.

由 $a_n\neq 1$ 可得 $a_n(3-2a_n)<\left(\dfrac{3-a_n}{2}\right)^3$，

即　$a_n^2(3-2a_n)<\left(\dfrac{3-a_n}{2}\right)^2\bullet a_n$

两边开平方得　　$a_n\sqrt{3-2a_n}<\frac{3-a_n}{2}\bullet\sqrt{a_n}$．

即　$b_n<b_{n+1}$，n为正整数．

22．解：（1）求函数$f(x)$的导数；$f'(x)=3x^2-1$．

曲线$y=f(x)$在点$M(t，f(t))$处的切线方程为：

$$y-f(t)=f'(t)(x-t),$$

即　$y=(3t^2-1)x-2t^3$．

（2）如果有一条切线过点$(a，b)$，则存在t，使

$$b=(3t^2-1)a-2t^3.$$

于是，若过点$(a，b)$可作曲线$y=f(x)$的三条切线，则方程

$$2t^3-3at^2+a+b=0$$

有三个相异的实数根．

记　$g(t)=2t^3-3at^2+a+b$，

则　$g'(t)=6t^2-6at$

$$=6t(t-a).$$

当t变化时，$g(t)$，$g'(t)$变化情况如下表：

t	$(-\infty,0)$	0	$(0，a)$	a	$(a,+\infty)$
$g'(t)$	+	0	−	0	+
$g(t)$	↗	极大值$a+b$	↘	极小值$b-f(a)$	↗

由$g(t)$的单调性，当极大值$a+b<0$或极小值$b-f(a)>0$时，方程$g(t)=0$最多有一个实数根；

当$a+b=0$时，解方程$g(t)=0$得$t=0，t=\frac{3a}{2}$，即方程$g(t)=0$只有两个相异的实数根；

当$b-f(a)=0$时，解方程$g(t)=0$得$t=-\frac{a}{2}，t=a$，即方程$g(t)=0$只有两个相异的实数根．

综上，如果过$(a,\ b)$可作曲线$y=f(x)$三条切线，即$g(t)=0$有三个相异的实数根，

则$\begin{cases}a+b>0,\\b-f(a)<0.\end{cases}$

即　$-a<b<f(a)$.