

2005 年福建高考文科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试用时 120 分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷（选择题 共 60 分）

注意事项：

1. 答第 I 卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目涂写在答题卡上。
2. 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。不能答在试题卷上。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $P = \{x \mid |x-1| \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$, $Q = \{x \mid x \in \mathbb{N}\}$, 则 $P \cap Q$ 等于 ()

- A. P B. Q C. $\{1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

2. 不等式 $\frac{2x-1}{3x+1} > 0$ 的解集是 ()

- A. $\{x \mid x < -\frac{1}{3} \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\}$ B. $\{x \mid -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\}$
C. $\{x \mid x > \frac{1}{2}\}$ D. $\{x \mid x > -\frac{1}{3}\}$

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_7 + a_9 = 16, a_4 = 1$, 则 a_{12} 的值是 ()

- A. 15 B. 30 C. 31 D. 64

4. 函数 $y = \cos 2x$ 在下列哪个区间上是减函数 ()

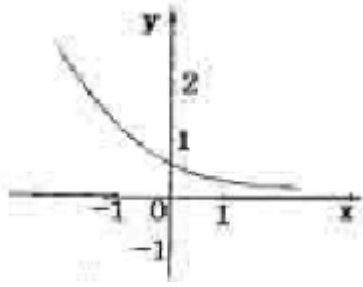
- A. $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ B. $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ C. $[0, \frac{\pi}{2}]$ D. $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

5. 下列结论正确的是 ()

- A. 当 $x > 0$ 且 $x \neq 1$ 时, $\lg x + \frac{1}{\lg x} \geq 2$ B. 当 $x > 0$ 时, $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$

- C. 当 $x \geq 2$ 时, $x + \frac{1}{x}$ 的最小值为 2 D. 当 $0 < x \leq 2$ 时, $x - \frac{1}{x}$ 无最大值

6. 函数 $f(x) = a^{x-b}$ 的图象如图, 其中 a、b 为常数, 则下列结论正确的是 ()



- A. $a > 1, b < 0$ B. $a > 1, b > 0$
 C. $0 < a < 1, b > 0$ D. $0 < a < 1, b < 0$

7. 已知直线 m, n 与平面 α, β , 给出下列三个命题:

- ①若 $m // \alpha, n // \alpha$, 则 $m // n$;
 ②若 $m // \alpha, n \perp \alpha$, 则 $n \perp m$;
 ③若 $m \perp \alpha, m // \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$.

其中真命题的个数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

8. 已知 $p: a \neq 0, q: ab \neq 0$, 则 p 是 q 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

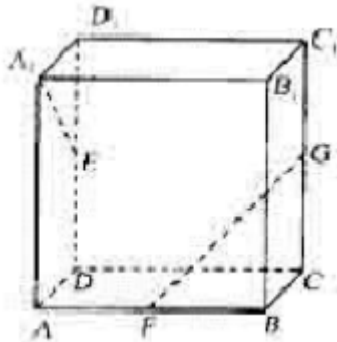
9. 已知定点 A, B 且 $|AB|=4$, 动点 P 满足 $|PA|-|PB|=3$, 则 $|PA|$ 的最小值是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{7}{2}$ D. 5

10. 从 6 人中选出 4 人分别到巴黎、伦敦、悉尼、莫斯科四个城市游览, 要求每个城市有一人游览, 每人只游览一个城市, 且这 6 人中甲、乙两人不去巴黎游览, 则不同的选择方案共有 ()

- A. 300 种 B. 240 种 C. 144 种 D. 96 种

11. 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=AB=2, AD=1$, 点 E, F, G 分别是 DD_1, AB, CC_1 的中点, 则异面直线 A_1E 与 GF 所成的角是 ()



A. $\arccos \frac{\sqrt{15}}{5}$ B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\arccos \frac{\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{\pi}{2}$

12. $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的以 3 为周期的偶函数, 且 $f(2) = 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, 6)$ 内解的个数的最小值是 ()
 A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. $(2\sqrt{x} - \frac{1}{x})^6$ 展开式中的常数项是 (用数字作答).

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $\overrightarrow{AB} = (k, 1), \overrightarrow{AC} = (2, 3)$, 则 k 的值是 .

15. 非负实数 x, y 满足 $\begin{cases} 2x + y - 4 \leq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \end{cases}$, 则 $x + 3y$ 的最大值为 .

16. 把下面不完整的命题补充完整, 并使之成为真命题.

若函数 $f(x) = 3 + \log_2 x$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于 对称, 则函数 $g(x) =$

(注: 填上你认为可以成为真命题的一种情形即可, 不必考虑所有可能的情形)

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知 $-\frac{\pi}{2} < x < 0, \sin x + \cos x = \frac{1}{5}$.

(I) 求 $\sin x - \cos x$ 的值;

(II) 求 $\frac{\sin 2x + 2 \sin^2 x}{1 - \tan x}$ 的值.

18. (本小题满分 12 分)

甲、乙两人在罚球线投球命中的概率分别为 $\frac{1}{2}$ 与 $\frac{2}{5}$.

(I) 甲、乙两人在罚球线各投球一次, 求恰好命中一次的概率;

(II) 甲、乙两人在罚球线各投球二次, 求这四次投球中至少一次命中的概率.

19. (本小题满分 12 分)

已知 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 且 a_1, a_3, a_2 成等差数列.

(I) 求 q 的值;

(II) 设 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项, q 为公差的等差数列, 其前 n 项和为 S_n , 当 $n \geq 2$ 时, 比较 S_n 与 b_n 的大小, 并说明理由.

20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ 的图象过点 $P(0, 2)$, 且在点 $M(-1, f(-1))$ 处的切线方程为 $6x - y + 7 = 0$.

(I) 求函数 $y = f(x)$ 的解析式;

(II) 求函数 $y = f(x)$ 的单调区间.

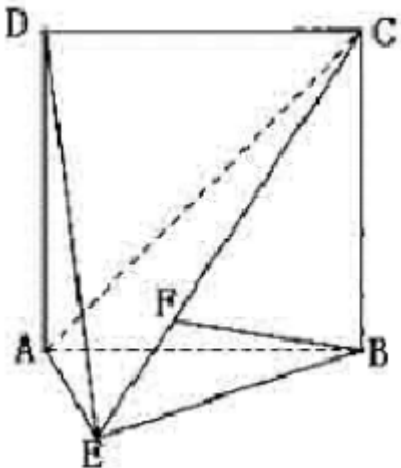
21. (本小题满分 12 分)

如图, 直二面角 $D-AB-E$ 中, 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $AE=EB$, F 为 CE 上的点, 且 $BF \perp$ 平面 ACE .

(I) 求证 $AE \perp$ 平面 BCE ;

(II) 求二面角 $B-AC-E$ 的大小;

(III) 求点 D 到平面 ACE 的距离.



22. (本小题满分 14 分)

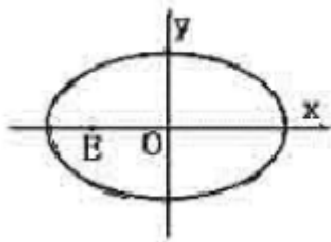
已知方向向量为 $\vec{v} = (1, \sqrt{3})$ 的直线 l 过点 $(0, -2\sqrt{3})$ 和椭圆

$$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$$

的焦点，且椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点在椭圆 C 的右准线上.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 是否存在过点 E (-2, 0) 的直线 m 交椭圆 C 于点 M、N，满足 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \frac{4}{3}\sqrt{6}$ cot $\angle MON \neq 0$ (O 为原点). 若存在，求直线 m 的方程; 若不存在，请说明理由.



参考答案

一、选择题: 本大题考查基本知识和基本运算. 每小题 5 分, 满分 60 分.

1.D 2.A 3.A 4.C 5.B 6.D 7.C 8.B 9.C 10.B 11.D 12.B

二、填空题: 本大题考查基本知识和基本运算. 每小题 4 分, 满分 16 分.

13. 240 14. $-\frac{3}{2}$ 15. 9 16. 如: ①x 轴, $-3 - \log_2 x$ ②y 轴, $3 + \log_2(-x)$

③原点, $-3 - \log_2(-x)$ ④直线 $y = x, 2^{x-3}$

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 本小题主要考查三角函数的基本公式、三角恒等变换、三角函数在各象限符号等基本知识, 以及推理和运算能力. 满分 12 分.

解法一: (I) 由 $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$, 平方得 $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{25}$,

整理得 $2 \sin x \cos x = -\frac{24}{25}$. $\therefore (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x = \frac{49}{25}$.

又 $\therefore -\frac{\pi}{2} < x < 0, \therefore \sin x < 0, \cos x > 0, \sin x - \cos x < 0$,

故 $\sin x - \cos x = -\frac{7}{5}$.

$$(II) \quad \frac{\sin 2x + 2\sin^2 x}{1 - \tan x} = \frac{2\sin x(\cos x + \sin x)}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{2\sin x \cos x(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} = \frac{-\frac{24}{25} \times \frac{1}{5}}{\frac{7}{5}} = -\frac{24}{175}.$$

解法二：(I) 联立方程
$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \frac{1}{5}, & \text{①} \\ \sin^2 + \cos^2 x = 1. & \text{②} \end{cases}$$

由①得 $\sin x = \frac{1}{5} - \cos x$, 将其代入②, 整理得 $25\cos^2 x - 5\cos x - 12 = 0$,

$$\therefore \cos x = -\frac{3}{5} \text{ 或 } \cos x = \frac{4}{5}. \quad \because -\frac{\pi}{2} < x < 0, \therefore \begin{cases} \sin x = -\frac{3}{5}, \\ \cos x = \frac{4}{5}. \end{cases}$$

故 $\sin x - \cos x = -\frac{7}{5}$.

$$(II) \quad \frac{\sin 2x + 2\sin^2 x}{1 - \tan x} = \frac{2\sin x \cos x + 2\sin^2 x}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{2 \cdot (-\frac{3}{5}) \cdot \frac{4}{5} + 2(-\frac{3}{5})^2}{1 - \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}} = -\frac{24}{175}.$$

18. 本小题主要考查概率的基本知识, 运用数学知识解决问题的能力, 以及推理和运算能力. 满分 12 分.

解：(I) 依题意, 记“甲投一次命中”为事件 A, “乙投一次命中”为事件 B, 则

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{2}{5}, P(\bar{A}) = \frac{1}{2}, P(\bar{B}) = \frac{3}{5}.$$

\therefore “甲、乙两人各投球一次, 恰好命中一次”的事件为 $A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$

$$\therefore P(A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B) = P(A \cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{2}.$$

答：甲、乙两人在罚球线各投球一次, 恰好命中一次的概率为 $\frac{1}{2}$.

(II) \therefore 事件“甲、乙两人在罚球线各投球二次均不命中”的概率为

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{100}$$

∴甲、乙两人在罚球线各投球两次至少有一次命中的概率

$$P = 1 - \bar{P} = 1 - \frac{9}{100} = \frac{91}{100}.$$

答：甲、乙两人在罚球线各投球二次，至少有一次命中的概率为 $\frac{91}{100}$.

19. 本小题主要考查等差数列，等比数列及不等式的基本知识，考查利用分类讨论思想分析问题解决问题的能力. 满分 12 分.

(I) 由题设 $2a_3 = a_1 + a_2$, 即 $2a_1q^2 = a_1 + a_1q$, $\because a_1 \neq 0, \therefore 2q^2 - q - 1 = 0$.

∴ $q = 1$ 或 $-\frac{1}{2}$.

(II) 若 $q = 1$, 则 $S_n = 2n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 1 = \frac{n^2 + 3n}{2}$.

当 $n \geq 2$ 时, $S_n - b_n = S_{n-1} = \frac{(n-1)(n+2)}{2} > 0$. 故 $S_n > b_n$.

若 $q = -\frac{1}{2}$, 则 $S_n = 2n + \frac{n(n-1)}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-n^2 + 9n}{4}$.

当 $n \geq 2$ 时, $S_n - b_n = S_{n-1} = -\frac{(n-1)(n-10)}{4}$,

故对于 $n \in N_+$, 当 $2 \leq n \leq 9$ 时, $S_n > b_n$; 当 $n = 10$ 时, $S_n = b_n$; 当 $n \geq 11$ 时, $S_n < b_n$.

20. 本小题主要考查函数的单调性、导数的应用等知识，考查运用数学知识分析问题和解决问题的能力. 满分 12 分.

解：(I) 由 $f(x)$ 的图象经过 P (0, 2), 知 $d=2$, 所以 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 2$,

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c.$$

由在 $M(-1, f(-1))$ 处的切线方程是 $6x - y + 7 = 0$, 知

$$-6 - f'(-1) + 7 = 0, \text{ 即 } f'(-1) = 1, f'(-1) = 6.$$

$$\therefore \begin{cases} 3 - 2b + c = 6, \\ -1 + b - c + 2 = 1. \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2b - c = -3, \\ b - c = 0, \end{cases} \text{ 解得 } b = c = -3.$$

故所求的解析式是 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 2$.

(II) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 3$. 令 $3x^2 - 6x - 3 = 0$, 即 $x^2 - 2x - 1 = 0$.

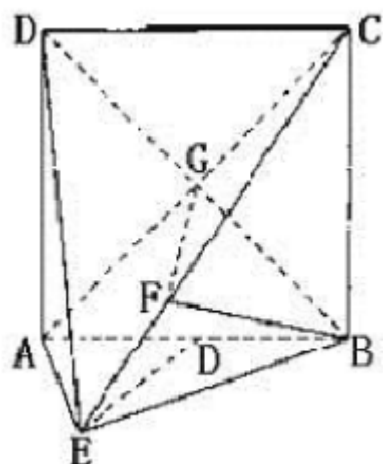
解得 $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$. 当 $x < 1 - \sqrt{2}$, 或 $x > 1 + \sqrt{2}$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$ 时, $f'(x) < 0$.

故 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ 在 $(-\infty, 1-\sqrt{2})$ 内是增函数, 在 $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ 内是减函数,

在 $(1+\sqrt{2}, +\infty)$ 内是增函数.

21. 本小题主要考查直线、直线与平面、二面角及点到平面的距离等基础知识, 考查空间想象能力, 逻辑思维能力与运算能力. 满分 12 分.



解法一: (I) $\because BF \perp$ 平面 ACE . $\therefore BF \perp AE$.

\therefore 二面角 $D-AB-E$ 为直二面角,

且 $CB \perp AB$, $\therefore CB \perp$ 平面 ABE .

$\therefore CB \perp AE$. $\therefore AE \perp$ 平面 BCE .

(II) 连结 BD 交 AC 于 G , 连结 FG ,

\because 正方形 $ABCD$ 边长为 2, $\therefore BG \perp AC, BG = \sqrt{2}$

$\because BF \perp$ 平面 ACE ,

由三垂线定理的逆定理得 $FG \perp AC$.

$\therefore \angle BGF$ 是二面角 $B-AC-E$ 的平面角.

由 (I) $AE \perp$ 平面 BCE , 又 $\because AE = EB$,

\therefore 在等腰直角三角形 AEB 中, $BE = \sqrt{2}$.

又 \because 直角 $\triangle BCE$ 中, $EC = \sqrt{BC^2 + BE^2} = \sqrt{6}$,

$$BF = \frac{BC \cdot BE}{EC} = \frac{2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{直角}\triangle BFG\text{中, } \sin \angle BGF = \frac{BF}{BG} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\therefore \text{二面角 } B-AC-E \text{ 等于 } \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(III) 过点 E 作 $EO \perp AB$ 交 AB 于点 O. $OE=1$.

\therefore 二面角 $D-AB-E$ 为直二面角, $\therefore EO \perp$ 平面 ABCD.

$$\text{设 } D \text{ 到平面 } ACE \text{ 的距离为 } h, \therefore V_{D-ACE} = V_{E-ACD}, \therefore \frac{1}{3} S_{\triangle ACE} \cdot h = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD} \cdot EO.$$

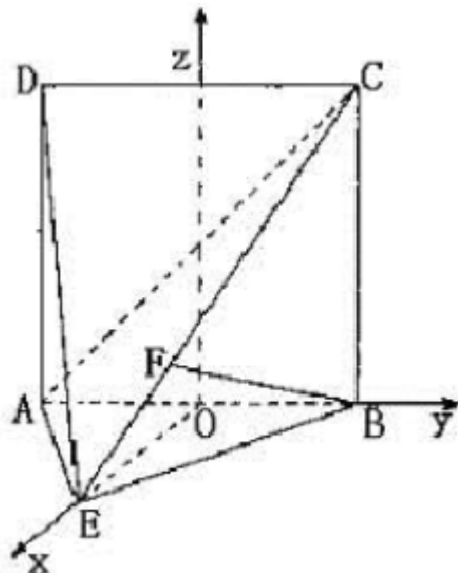
$$\therefore h = \frac{\frac{1}{2} AD \cdot DC \cdot EO}{\frac{1}{2} AE \cdot EC} = \frac{\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 1}{\frac{1}{2} \sqrt{2} \times \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$\therefore AE \perp$ 平面 BCE, $\therefore AE \perp EC$.

$$\therefore \text{点 } D \text{ 到平面 } ACE \text{ 的距离为 } \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

解法二: (I) 同解法一.

(II) 以线段 AB 的中点为原点 O, OE 所在直线为 x 轴, AB 所在直线为 y 轴, 过 O 点平行于 AD 的直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系 O-xyz, 如图.



$\therefore AE \perp$ 面 BCE, $BE \subset$ 面 BCE, $\therefore AE \perp BE$,

在 $Rt\triangle AEB$ 中, $AB = 2$, O 为 AB 的中点,

$\therefore OE = 1. \quad \therefore A(0,-1,0), E(1,0,0), C(0,1,2).$

$\overrightarrow{AE} = (1,1,0), \overrightarrow{AC} = (0,2,2).$ 设平面 AEC 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z),$

则
$$\begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \vec{n} = 0, \\ \overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} x + y = 0, \\ 2y + 2z = 0. \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} y = -x, \\ z = x, \end{cases}$$

令 $x = 1,$ 得 $\vec{n} = (1, -1, 1)$ 是平面 AEC 的一个法向量.

又平面 BAC 的一个法向量为 $\vec{m} = (1, 0, 0),$

$$\therefore \cos(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

\therefore 二面角 B-AC-E 的大小为 $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}.$

(III) $\because AD // z$ 轴, $AD=2, \therefore \overrightarrow{AD} = (0, 0, 2),$

$$d = |\overrightarrow{AD}| \cdot |\cos \langle \overrightarrow{AD}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

\therefore 点 D 到平面 ACE 的距离

22. 本小题主要考查直线、椭圆及平面向量的基本知识, 平面解析几何的基本方法和综合解题能力. 满分 14 分.

(I) 解法一: 直线 $l: y = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3}, \quad \text{①}$

过原点垂直 l 的直线方程为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x, \quad \text{②}$

解①②得 $x = \frac{3}{2}.$

\because 椭圆中心 $O(0, 0)$ 关于直线 l 的对称点在椭圆 C 的右准线上,

$$\therefore \frac{a^2}{c} = 2 \times \frac{3}{2} = 3.$$

\because 直线 l 过椭圆焦点, \therefore 该焦点坐标为 $(2, 0).$

$$\therefore c=2, a^2=6, b^2=2. \quad \text{故椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1. \quad \textcircled{3}$$

解法二：直线 $l: y = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3}$.

$$\text{设原点关于直线 } l \text{ 对称点为 } (p, q), \text{ 则 } \begin{cases} \frac{q}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{p}{2} - 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \cdot \frac{q}{p} = -1. \end{cases} \quad \text{解得 } p=3.$$

\therefore 椭圆中心 $O(0, 0)$ 关于直线 l 的对称点在椭圆 C 的右准线上,

$$\therefore \frac{a^2}{c} = 3.$$

\therefore 直线 l 过椭圆焦点, \therefore 该焦点坐标为 $(2, 0)$.

$$\therefore c=2, a^2=6, b^2=2. \quad \text{故椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1. \quad \textcircled{3}$$

(II) 解法一：设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

当直线 m 不垂直 x 轴时, 直线 $m: y = k(x+2)$ 代入③, 整理得

$$(3k^2 + 1)x^2 + 12k^2x + 12k^2 - 6 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{12k^2}{3k^2 + 1}, x_1 \cdot x_2 = \frac{12k^2 - 6}{3k^2 + 1},$$

$$|MN| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1+k^2} \sqrt{\left(-\frac{12k^2}{3k^2+1}\right)^2 - 4 \cdot \frac{12k^2-6}{3k^2+1}} = \frac{2\sqrt{6}(1+k^2)}{3k^2+1},$$

$$d = \frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}$$

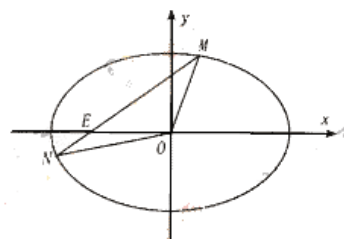
点 O 到直线 MN 的距离

$$\therefore \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \frac{4}{3}\sqrt{6} \cot \angle MON, \quad \text{即 } |\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}| \cos \angle MON = \frac{4}{3}\sqrt{6} \frac{\cos \angle MON}{\sin \angle MON} \neq 0,$$

$$\therefore |\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}| \sin \angle MON = \frac{4}{3}\sqrt{6}, \therefore S_{\triangle OMN} = \frac{2}{3}\sqrt{6}. \therefore |MN| \cdot d = \frac{4}{3}\sqrt{6},$$

$$\text{即 } 4\sqrt{6} |k| \sqrt{k^2+1} = \frac{4}{3}\sqrt{6}(3k^2+1).$$

$$\text{整理得 } k^2 = \frac{1}{3}, \therefore k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



当直线 m 垂直 x 轴时, 也满足 $S_{\triangle OMN} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$.

故直线 m 的方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

或 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 或 $x = -2$.

经检验上述直线均满足 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} \neq 0$.

所以所求直线方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

或 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 或 $x = -2$.

解法二: 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$.

当直线 m 不垂直 x 轴时, 直线 $m: y = k(x+2)$ 代入③, 整理得

$$(3k^2 + 1)x^2 + 12k^2x + 12k^2 - 6 = 0, \therefore x_1 + x_2 = -\frac{12k^2}{3k^2 + 1},$$

$\because E(-2, 0)$ 是椭圆 C 的左焦点,

$$\therefore |MN| = |ME| + |NE|$$

$$= e\left(\frac{a^2}{c} + x_1\right) + e\left(\frac{a^2}{c} + x_2\right) = \frac{c}{a}(x_1 + x_2) + 2a = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \left(-\frac{12k^2}{3k^2 + 1}\right) + 2\sqrt{6} = \frac{2\sqrt{6}(k^2 + 1)}{3k^2 + 1}.$$

以下与解法一相同.

解法三: 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$.

设直线 $m: x = ty - 2$, 代入③, 整理得 $(t^2 + 3)y^2 - 4ty - 2 = 0$.

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{4t}{t^2 + 3}, y_1 y_2 = \frac{-2}{t^2 + 3},$$

$$|y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{\left(\frac{4t}{t^2 + 3}\right)^2 + \frac{8}{t^2 + 3}} = \sqrt{\frac{24t^2 + 24}{(t^2 + 3)^2}}.$$

$$\therefore \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \frac{4}{3}\sqrt{6} \cot \angle MON, \quad \text{即} \quad |\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}| \cos \angle MON = \frac{4}{3}\sqrt{6} \frac{\cos \angle MON}{\sin \angle MON} \neq 0,$$

$$\therefore |\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}| \sin \angle MON = \frac{4}{3}\sqrt{6}, \therefore S_{\triangle OMN} = \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

$$S_{\triangle OMN} = S_{\triangle OEM} + S_{\triangle OEN} = \frac{1}{2} |OE| \cdot |y_1 - y_2| = \sqrt{\frac{24t^2 + 24}{(t^2 + 3)^2}}.$$

$$\therefore \sqrt{\frac{24t^2 + 24}{(t^2 + 3)^2}} = \frac{2}{3} \sqrt{6}, \text{ 整理得 } t^4 = 3t^2.$$

解得 $t = \pm\sqrt{3}$, 或 $t = 0$.

故直线 m 的方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 或 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 或 $x = -2$.

经检验上述直线均满足 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} \neq 0$.

所以所求直线方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 或 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 或 $x = -2$.