2009年江西高考文科数学试题及答案

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至4页，共150分。

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的准考证号、姓名填写在答题卡上，考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名、考试科目”与考生本人准考证号、姓名是否一致。
2. 第Ⅰ卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。第Ⅱ卷用黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答。在试题卷上作答，答案无效。
3. 考试结束，监考员将试题卷、答题卡一并收回。

参考公式

如果事件 A,B 互斥，那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A,B，相互独立，那么

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p，那么

n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

第Ⅰ卷

一．选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．下列命题是真命题的为

A．若 $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$，则 $x=y$　　　　B．若 $x^2=1$，则 $x=1$

C．若 $x=y$，则 $\sqrt{x}=\sqrt{y}$　　　　D．若 $x<y$，则 $x^2<y^2$

2．函数 $y=\dfrac{\sqrt{-x^2-3x+4}}{x}$ 的定义域为

A．$[-4,1]$　　　B．$[-4,0)$　　　C．$(0,1]$　　　D．$[-4,0)\cup(0,1]$

3．50 名学生参加甲、乙两项体育活动，每人至少参加了一项，参加甲项的学生有 30 名，参加乙项的学生有 25 名，则仅参加了一项活动的学生人数为

A．50　　　B．45　　　C．40　　　D．35

4．函数 $f(x)=(1+\sqrt{3}\tan x)\cos x$ 的最小正周期为

A．2π　　　B．$\dfrac{3\pi}{2}$　　　C．π　　　D．$\dfrac{\pi}{2}$

5．已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数，若对于 $x\ge 0$，都有 $f(x+2)=f(x)$，且当 $x\in[0,2)$ 时，$f(x)=\log_2(x+1)$，则 $f(-2008)+f(2009)$ 的值为

A．-2　　　B．-1　　　C．1　　　D．2

6．若 $C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$ 能被 7 整除，则 x,n 的值可能为

A．$x=4,n=3$　　　B．$x=4,n=4$　　　C．$x=5,n=4$　　　D．$x=6,n=5$

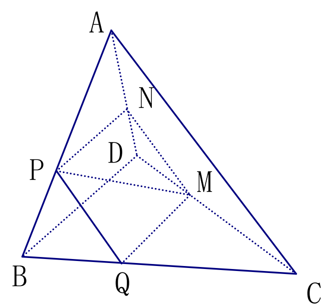
7．设 F_1 和 F_2 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）的两个焦点，若 F_1，F_2，$P(0,2b)$ 是正三角形的三个顶点，则双曲线的离心率为

A．$\dfrac{3}{2}$　　　B．2　　　C．$\dfrac{5}{2}$　　　D．3

8．公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n．若 a_4 是 a_3 与 a_7 的等比中项，$S_8=32$，则 S_{10} 等于

A．18　　　B．24　　　C．60　　　D．90

9．如图，在四面体 $ABCD$ 中，截面 $PQMN$ 是正方形，则在下列命题中，错误的为



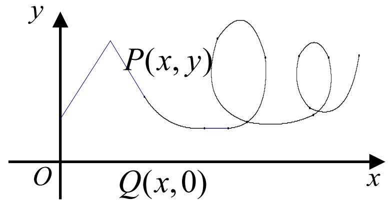
A．$AC\perp BD$　　　B．AC // 截面 $PQMN$

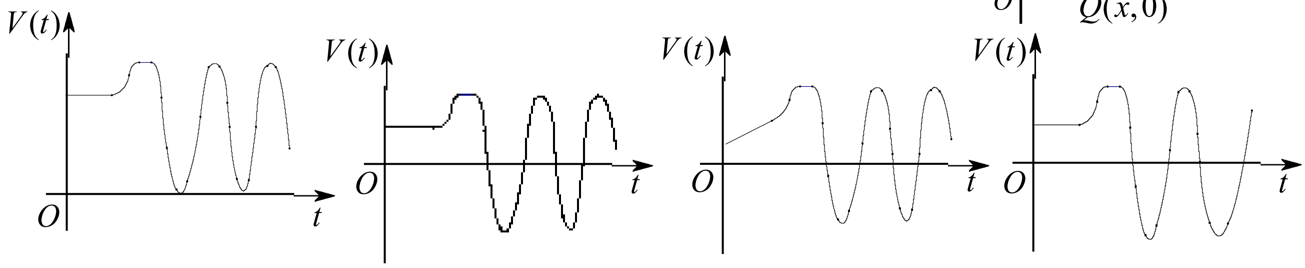
C．$AC=BD$　　　D．异面直线 PM 与 BD 所成的角为 45°

10．甲、乙、丙、丁4个足球队参加比赛，假设每场比赛各队取胜的概率相等，现任意将这4个队分成两个组（每组两个队）进行比赛，胜者再赛，则甲、乙相遇的概率为

A．$\frac{1}{6}$　　　　B．$\frac{1}{4}$　　　　C．$\frac{1}{3}$　　　　D．$\frac{1}{2}$

11．如图所示，一质点$P(x,y)$在xOy平面上沿曲线运动，速度大小不变，其在x轴上的投影点$Q(x,0)$的运动速度$V=V(t)$的图象大致为





A　　　　　B　　　　　C　　　　　D

12．若存在过点$(1,0)$的直线与曲线$y=x^3$和$y=ax^2+\frac{15}{4}x-9$都相切，则a等于

A．-1或$-\frac{25}{64}$　　　　B．-1或$\frac{21}{4}$　　　　C．$-\frac{7}{4}$或$-\frac{25}{64}$　　　　D．$-\frac{7}{4}$或

7

第Ⅱ卷

注意事项：

第Ⅱ卷2页，须用黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答，若在试题上作答，答案无效。

二. 填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分。请把答案填在答题卡上

13．已知向量$\vec{a}=(3,1)$，$\vec{b}=(1,3)$，$\vec{c}=(k,2)$，若$(\vec{a}-\vec{c})\perp\vec{b}$ 则k=________.

14．体积为8 的一个正方体，其全面积与球O的表面积相等，则球O的体积等于_______.

15．若不等式$\sqrt{4-x^2}\le k(x+1)$的解集为区间$[a,b]$，且$b-a=1$，则 $k=$__________ .

16．设直线系$M:x\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1\,(0\le\theta\le 2\pi)$，对于下列四个命题：

A．存在一个圆与所有直线相交

B．存在一个圆与所有直线不相交

C．存在一个圆与所有直线相切

D． M 中的直线所能围成的正三角形面积都相等

其中真命题的代号是____________________（写出所有真命题的代号）.

三. **解答题：本大题共 6 小题，共 74 分。解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤**

17．（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x-a$

（1）对于任意实数 x， $f'(x)\ge m$ 恒成立，求 m 的最大值；

（2）若方程 $f(x)=0$ 有且仅有一个实根，求 a 的取值范围

18．（本小题满分 12 分）

某公司拟资助三位大学生自主创业，现聘请两位专家，独立地对每位大学生的创业方案进行评审．假设评审结果为“支持”或“不支持”的概率都是 $\dfrac{1}{2}$. 若某人获得两个“支持”，则给予 10 万元的创业资助；若只获得一个“支持”，则给予 5 万元的资助；若未获得“支持”，则不予资助．求：

（1） 该公司的资助总额为零的概率；

（2）该公司的资助总额超过 15 万元的概率.

19．（本小题满分 12 分）

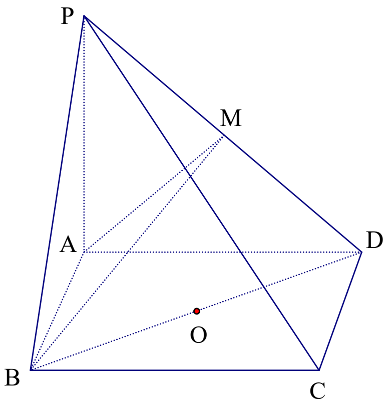
在△ ABC 中， A, B, C 所对的边分别为 a,b,c， $A=\dfrac{\pi}{6}$， $(1+\sqrt{3})c=2b$.

（1）求 C；

（2）若 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=1+\sqrt{3}$，求 a，b， c.

20．（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，



$PA\perp$平面$ABCD$，$PA=AD=4$，$AB=2$．以BD的中点O为球心、BD为直径的球面交PD于点M．

（1）求证：平面$ABM\perp$平面PCD；

（2）求直线PC与平面ABM所成的角；

（3）求点O到平面ABM的距离.

21.（本小题满分 12 分）

数列$\{a_n\}$的通项$a_n=n^2(\cos^2\frac{n\pi}{3}-\sin^2\frac{n\pi}{3})$，其前 n 项和为S_n

(1) 求S_n；

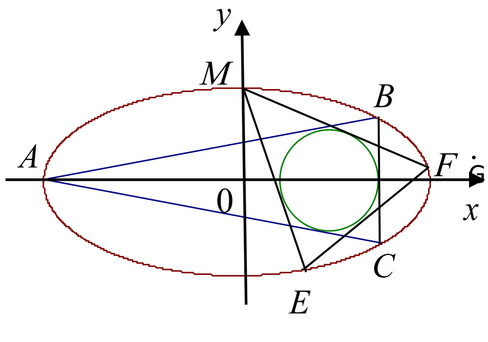
(2) $b_n=\frac{S_{3n}}{n\cdot 4^n}$,求数列｛$b_n$｝的前 n 项和$T_n$.

22.（本小题满分 14 分）

如图，已知圆$G:(x-2)^2+y^2=r^2$是椭圆$\frac{x^2}{16}+y^2=1$的内接△ABC的内切圆，其中A为椭圆的左顶点

（1）求圆G的半径r；

（2）过点$M(0,1)$作圆G的两条切线交椭圆于E，F两点，证明：直线EF与圆G相切.



绝密★启用前　　秘密★启用后

2009年普通高等学校招生全国统一考试（江西卷）

文科数学参考答案

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	B	A	C	C	B	C	C	D	B	A

1. 由$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y}$得$x=y$，而由$x^2=1$得$x=\pm 1$，由$x=y$，$\sqrt{x},\sqrt{y}$不一定有意义，而$x<y$得不到$x^2<y^2$

故选A.

2. 由$\begin{cases} x\neq 0 \\ -x^2-3x+4\geq 0 \end{cases}$得$-4\leq x<0$或$0<x\leq 1$，故选D.

3. 仅参加了一项活动的学生人数=50-(30+25-50)=45，故选B.

4. 由$f(x)=(1+\sqrt{3}\tan x)\cos x=\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\sin(x+\dfrac{\pi}{6})$可得最小正周期为$2\pi$，故选A.

5. $f(-2008)+f(2009)=f(0)+f(1)=\log_2^1+\log_2^2=1$，故选C.

6. $C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n=(1+x)^n-1$，当$x=5,n=4$时，$(1+x)^n-1=6^4-1=35\times 37$能被7整除，故选C.

7. 由$\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{c}{2b}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$有$3c^2=4b^2=4(c^2-a^2)$，则$e=\dfrac{c}{a}=2$，故选B.

8. 由$a_4^2=a_3a_7$得$(a_1+3d)^2=(a_1+2d)(a_1+6d)$得$2a_1+3d=0$，

再由$S_8=8a_1+\dfrac{56}{2}d=32$得$2a_1+7d=8$

则$d=2,a_1=-3$，所以$S_{10}=10a_1+\dfrac{90}{2}d=60$，. 故选C

9. 由$PQ\,/\!/\,AC$，$QM\,/\!/\,BD$，$PQ\perp QM$可得$AC\perp BD$，故A正确；

由$PQ\,/\!/\,AC$可得$AC\,/\!/$截面$PQMN$，故B正确；

异面直线PM与BD所成的角等于PM与PN所成的角，故D正确；

综上C是错误的，故选C.

10. 所有可能的比赛分组情况共有$4\times\frac{C_4^2C_2^2}{2!}=12$种，甲乙相遇的分组情况恰好有6种，故选$D$.

11. 由图可知，当质点$P(x,y)$在两个封闭曲线上运动时，投影点$Q(x,0)$的速度先由正到0、到负数，再到0，到正，故A错误；质点$P(x,y)$在终点的速度是由大到小接近0，故D错误；质点$P(x,y)$在开始时沿直线运动，故投影点$Q(x,0)$的速度为常数，因此C是错误的，故选B.

12. 设过$(1,0)$的直线与$y=x^3$相切于点$(x_0,{x_0}^3)$，所以切线方程为$y-{x_0}^3=3{x_0}^2(x-x_0)$

即$y=3{x_0}^2x-2{x_0}^3$，又$(1,0)$在切线上，则$x_0=0$或$x_0=-\frac{3}{2}$，

当$x_0=0$时，由$y=0$与$y=ax^2+\frac{15}{4}x-9$相切可得$a=-\frac{25}{64}$，

当$x_0=-\frac{3}{2}$时，由$y=\frac{27}{4}x-\frac{27}{4}$与$y=ax^2+\frac{15}{4}x-9$相切可得$a=-1$，所以选$A$.

二、填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分。

13. 0　　14. $\frac{8\sqrt{6\pi}}{\pi}$　　15. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　16. ABC

13.. 因为$\vec{a}-\vec{c}=(3-k,-1)$,所以$k=0$.

14. 设球的半径为R，依题设有$6(\sqrt[3]{8})^2=4\pi R^2$，则$R^2=\frac{6}{\pi}$，球的体积为

$$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{6}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{8\sqrt{6\pi}}{\pi}$$

15. 由数形结合，半圆$y=\sqrt{4-x^2}$在直线$y=k(x+1)$之下必须$x_2=2,x_1=1$，则直线$y=k(x+1)$过点$(1,\sqrt{3})$，则$k=\frac{\sqrt{3}}{2}$

16. 因为$x\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1$所以点$P(0,2)$到$M$中每条直线的距离

$$d=\frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=1$$

即M为圆$C:x^2+(y-2)^2=1$的全体切线组成的集合,所以存在圆心在$(0,2)$,半径大于1

的圆与 M 中所有直线相交，也存在圆心在 $(0,2)$，半径小于 1 的圆与 M 中所有直线均不相交，也存在圆心在 $(0,2)$，半径等于 1 的圆与 M 中所有直线相切，

故 ABC 正确，

又因 M 中的边能组成两类大小不同的正三角形，故 D 错误，

故命题中正确的序号是 ABC

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分。

17．解：(1) $f'(x)=3x^2-9x+6=3(x-1)(x-2)$，

因为 $x\in(-\infty,+\infty)$，$f'(x)\geq m$，即 $3x^2-9x+(6-m)\geq 0$ 恒成立，

所以 $\Delta=81-12(6-m)\leq 0$，得 $m\leq -\frac{3}{4}$，即 m 的最大值为 $-\frac{3}{4}$

(2) 因为 当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$；当 $1<x<2$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$；

所以 当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取极大值 $f(1)=\frac{5}{2}-a$；

当 $x=2$ 时，$f(x)$ 取极小值 $f(2)=2-a$；

故当 $f(2)>0$ 或 $f(1)<0$ 时，方程 $f(x)=0$ 仅有一个实根．解得 $a<2$ 或 $a>\frac{5}{2}$．

18．解：（1）设 A 表示资助总额为零这个事件，则

$$P(A)=\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$$

（2）设 B 表示资助总额超过 15 万元这个事件，则

$$P(B)=15\times\left(\frac{1}{2}\right)^6+6\times\left(\frac{1}{2}\right)^6+\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{11}{32}$$

19．解：（1）由 $(1+\sqrt{3})c=2b$ 得 $\frac{b}{c}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sin B}{\sin C}$

则有 $\dfrac{\sin(\pi-\frac{\pi}{6}-C)}{\sin C}=\dfrac{\sin\frac{5\pi}{6}\cos C-\cos\frac{5\pi}{6}\sin C}{\sin C}=\frac{1}{2}\cot C+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

得 $\cot C=1$ 即 $C=\frac{\pi}{4}$．

（2） 由 $\overline{CB}\cdot\overline{CA}=1+\sqrt{3}$ 推出 $ab\cos C=1+\sqrt{3}$ ；而 $C=\frac{\pi}{4}$，

即得 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}ab=1+\sqrt{3}$，

则有 $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}ab=1+\sqrt{3}\\(1+\sqrt{3})c=2b\\\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}\end{cases}$　　解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2}\\b=1+\sqrt{3}\\c=2\end{cases}$

20．解：方法（一）：

（1）证：依题设，Ｍ在以ＢＤ为直径的球面上，则ＢＭ⊥ＰＤ．

因为ＰＡ⊥平面ＡＢＣＤ，则ＰＡ⊥ＡＢ，又ＡＢ⊥ＡＤ，

所以ＡＢ⊥平面ＰＡＤ，则ＡＢ⊥ＰＤ，

因此有ＰＤ⊥平面ＡＢＭ，所以平面ＡＢＭ⊥平面ＰＣＤ．

（２）设平面ＡＢＭ与ＰＣ交于点Ｎ，

因为ＡＢ∥ＣＤ，所以ＡＢ∥平面ＰＣＤ，则ＡＢ∥ＭＮ∥ＣＤ，

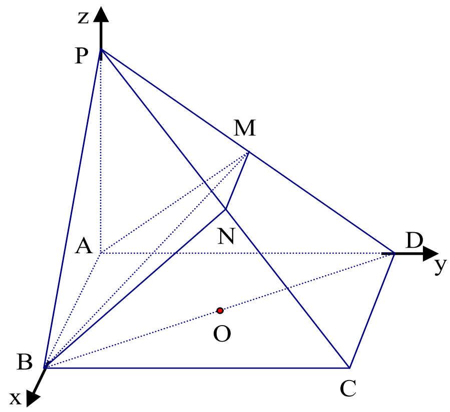
由（1）知，ＰＤ⊥平面ＡＢＭ，则 MN 是 PN 在平面 ABM 上的射影，

所以 $\angle PNM$ 就是 PC 与平面 ABM 所成的角，

且 $\angle PNM=\angle PCD$

$\tan\angle PNM=\tan\angle PCD=\dfrac{PD}{DC}=2\sqrt{2}$

所求角为 $\arctan 2\sqrt{2}$



（3）因为 O 是 BD 的中点，则 O 点到平面 ABM 的距离等于 D 点到平面 ABM 距离的一半，由（1）知，ＰＤ⊥平面ＡＢＭ于 M，则|DM|就是 D 点到平面 ABM 距离.

因为在 Rt△PAD 中，$PA=AD=4$，$PD\perp AM$，所以 M 为 PD 中点，$DM=2\sqrt{2}$，则 O 点到平面 ABM 的距离等于 $\sqrt{2}$。

方法二：

（1）同方法一；

（２）如图所示，建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$P(0,0,4)$，$B(2,0,0)$，

$C(2,4,0)$，$D(0,4,0)$，$M(0,2,2)$，

设平面 ABM 的一个法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由 $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB},\vec{n}\perp\overrightarrow{AM}$ 可得：$\begin{cases}2x=0\\2y+2z=0\end{cases}$，

令 $z=-1$，则 $y=1$，即 $\vec{n}=(0,1,-1)$.

设所求角为 α，则 $\sin\alpha=\left|\dfrac{\overrightarrow{PC}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{PC}\right|\left|\vec{n}\right|}\right|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

所求角的大小为 $\arcsin\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

（3）设所求距离为 h，由 $O(1,2,0),\overrightarrow{AO}=(1,2,0)$，得：$h=\left|\dfrac{\overrightarrow{AO}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|}\right|=\sqrt{2}$

21．解:

（1）由于 $\cos^2\dfrac{n\pi}{3}-\sin^2\dfrac{n\pi}{3}=\cos\dfrac{2n\pi}{3}$,

故 $S_{3k}=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+\cdots+(a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k})$

$$=(-\frac{1^2+2^2}{2}+3^2)+(-\frac{4^2+5^2}{2}+6^2)+\cdots+(-\frac{(3k-2)^2+(3k-1)^2}{2}+(3k)^2))$$

$$=\frac{13}{2}+\frac{31}{2}+\cdots+\frac{18k-5}{2}=\frac{k(9k+4)}{2},$$

$S_{3k-1}=S_{3k}-a_{3k}=\dfrac{k(4-9k)}{2},$

$S_{3k-2}=S_{3k-1}-a_{3k-1}=\dfrac{k(4-9k)}{2}+\dfrac{(3k-1)^2}{2}=\dfrac{1}{2}-k=-\dfrac{3k-2}{3}-\dfrac{1}{6},$

故 $S_n=\begin{cases}-\dfrac{n}{3}-\dfrac{1}{6}, & n=3k-2\\ \dfrac{(n+1)(1-3n)}{6}, & n=3k-1\\ \dfrac{n(3n+4)}{6}, & n=3k\end{cases}$ （$k\in N^*$）

(2) $b_n=\dfrac{S_{3n}}{n\cdot 4^n}=\dfrac{9n+4}{2\cdot 4^n},$

$$T_n=\frac{1}{2}[\frac{13}{4}+\frac{22}{4^2}+\cdots+\frac{9n+4}{4^n}],$$

$$4T_n=\frac{1}{2}[13+\frac{22}{4}+\cdots+\frac{9n+4}{4^{n-1}}],$$

两式相减得

$$3T_n=\frac{1}{2}[13+\frac{9}{4}+\cdots+\frac{9}{4^{n-1}}-\frac{9n+4}{4^n}]=\frac{1}{2}[13+\frac{\frac{9}{4}-\frac{9}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{9n+4}{4^n}]=8-\frac{1}{2^{2n-3}}-\frac{9n}{2^{2n+1}},$$

故 $T_n=\frac{8}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^{2n-3}}-\frac{3n}{2^{2n+1}}$.

22．解:

（1）设 $B(2+r,y_0)$，过圆心 G 作 $GD\perp AB$ 于 D，BC 交长轴于 H

由 $\frac{GD}{AD}=\frac{HB}{AH}$

得 $\frac{r}{\sqrt{36-r^2}}=\frac{y_0}{6+r}$,

即 $y_0=\frac{r\sqrt{6+r}}{\sqrt{6-r}}$　　　　(1)

而点 $B(2+r,y_0)$ 在椭圆上,

$$y_0{}^2=1-\frac{(2+r)^2}{16}=\frac{12-4r-r^2}{16}=-\frac{(r-2)(r+6)}{16}\qquad(2)$$

由(1)、(2)式得 $15r^2+8r-12=0$，解得 $r=\frac{2}{3}$ 或 $r=-\frac{6}{5}$（舍去）

(2) 设过点 $M(0,1)$ 与圆 $(x-2)^2+y^2=\frac{4}{9}$ 相切的直线方程为: $y-1=kx$　　　　(3)

则 $\frac{2}{3}=\frac{|2k+1|}{\sqrt{1+k^2}}$，即 $32k^2+36k+5=0$　　　　(4)

解得 $k_1=\frac{-9+\sqrt{41}}{16},k_2=\frac{-9-\sqrt{41}}{16}$

将(3)代入 $\frac{x^2}{16}+y^2=1$ 得 $(16k^2+1)x^2+32kx=0$，则异于零的解为 $x=-\frac{32k}{16k^2+1}$

设 $F(x_1,k_1x_1+1)$，$E(x_2,k_2x_2+1)$，则 $x_1=-\frac{32k_1}{16k_1{}^2+1},x_2=-\frac{32k_2}{16k_2{}^2+1}$

则直线FE的斜率为：$k_{EF}=\dfrac{k_2x_2-k_1x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{k_1+k_2}{1-16k_1k_2}=\dfrac{3}{4}$

于是直线FE的方程为: $y+\dfrac{32{k_1}^2}{16{k_1}^2+1}-1=\dfrac{3}{4}(x+\dfrac{32k_1}{16{k_1}^2+1})$

即$y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{7}{3}$

则圆心$(2,0)$到直线FE的距离$d=\dfrac{\left|\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{3}\right|}{\sqrt{1+\dfrac{9}{16}}}=\dfrac{2}{3}$

故结论成立.