

## 1990年北京高考文科数学真题及答案

一、选择题:在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.把所选项前的字母填在题后括号内.

(1)方程  $2^{\log_3 x} = \frac{1}{4}$  的解是

(A)  $x = \frac{1}{9}$

(B)  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(C)  $x = \sqrt{3}$

(D)  $x = 9$

(2)  $\cos 275^\circ + \cos 215^\circ + \cos 75^\circ \cos 15^\circ$  的值等于

(A)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

(B)  $\frac{3}{2}$

(C)  $\frac{5}{4}$

(D)  $1 + \frac{\sqrt{3}}{4}$

(3) 如果轴截面为正方形的圆柱的侧面积是  $S$ , 那么圆柱的体积等于

(A)  $\frac{S}{2} \sqrt{S}$

(B)  $\frac{S}{2} \sqrt{\frac{S}{\pi}}$

(C)  $\frac{S}{4} \sqrt{S}$

(D)  $\frac{S}{4} \sqrt{\frac{S}{\pi}}$

(4) 把复数  $1+i$  对应的向量按顺时针方向旋转  $\frac{2\pi}{3}$ , 所得到的向量对应的复数是

(A)  $\frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i$ , (B)  $\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$ .

(C)  $\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$ , (D)  $\frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$ .

(5) 双曲线  $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$  的准线方程是

(A)  $y = \pm \frac{16}{\sqrt{7}}$

(B)  $x = \pm \frac{16}{\sqrt{7}}$

(C)  $x = \pm \frac{16}{5}$

(D)  $y = \pm \frac{16}{5}$

(6) 已知上图是函数  $y=2\sin(\omega x + \psi)$  ( $|\psi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的图象, 那么

(A)  $\omega = \frac{10}{11}, \psi = \frac{\pi}{6}$

(B)  $\omega = \frac{10}{11}, \psi = -\frac{\pi}{6}$

(C)  $\omega = 2, \psi = \frac{\pi}{6}$

(D)  $\omega = 2, \psi = -\frac{\pi}{6}$

(7) 设命题甲为:  $0 < x < 5$ ; 命题乙为:  $|x-2| < 3$ . 那么

(A) 甲是乙的充分条件, 但不是乙的必要条件.

(B) 甲是乙的必要条件, 但不是乙的充分条件.

(C) 甲是乙的充要条件.

(D) 甲不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件.

(8) 函数  $y = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{|\cos x|}{\cos x} + \frac{\operatorname{tg} x}{|\operatorname{tg} x|} + \frac{|\operatorname{ctg} x|}{\operatorname{ctg} x}$  的值域是

(A)  $\{-2, 4\}$

(B)  $\{-2, 0, 4\}$

(C)  $\{-2, 0, 2, 4\}$

(D)  $\{-4, -2, 0, 4\}$

(9) 如果直线  $y=ax+2$  与直线  $y=3x-b$  关于直线  $y=x$  对称, 那么

(A)  $a = \frac{1}{3}, b = 6$

(B)  $a = \frac{1}{3}, b = -6$

(C)  $a=3, b=-2$

(D)  $a=3, b=6$

(10) 如果抛物线  $y^2 = a(x+1)$  的准线方程是  $x = -3$ , 那么这条抛物线的焦点坐标是

- (A) (3, 0)            (B) (2, 0)  
(C) (1, 0)            (D) (-1, 0)

(11) 设全集  $I = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ , 集合  $M = \{(x, y) \mid \frac{y-3}{x-2} = 1\}$ ,  $N = \{(x, y) \mid y \neq x+1\}$ .

那么  $\overline{M \cap N}$  等于

- (A)  $\Phi$                 (B)  $\{(2, 3)\}$   
(C) (2, 3)            (D)  $\{(x, y) \mid y = x+1\}$

(12) A, B, C, D, E 五人并排站成一排, 如果 A, B 必须相邻且 B 在 A 的右边, 那么不同的排法共有

- (A) 60 种            (B) 48 种  
(C) 36 种            (D) 24 种

(13) 已知  $f(x) = x^5 + ax^3 + bx - 8$ , 且  $f(-2) = 10$ , 那么  $f(2)$  等于

- (A) -26              (B) -18  
(C) -10              (D) 10

(14) 如图, 正三棱锥  $S-ABC$  的侧棱与底面边长相等, 如果 E、F 分别为 SC、AB 的中点, 那么异面直线 EF 与 SA 所成的角等于

- (A)  $90^\circ$   
(B)  $60^\circ$   
(C)  $45^\circ$   
(D)  $30^\circ$

(15) 以一个正三棱柱的顶点为顶点的四面体共有

- (A) 6 个              (B) 12 个  
(C) 18 个            (D) 30 个

二、填空题: 把答案填在题中横线上.

(16) 已知  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , 那么  $\sin \frac{\alpha}{2}$  的值等于 \_\_\_\_\_.

(17)  $(x-1) - (x-1)^2 + (x-1)^3 - (x-1)^4 + (x-1)^5$  的展开式中,  $x^2$  的系数等于 \_\_\_\_\_.

(18) 已知  $\{a_n\}$  是公差不为零的等差数列, 如果  $S_n$  是  $\{a_n\}$  的前  $n$  项的和, 那么  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{S_n}$  等于 \_\_\_\_\_.

(19) 如图, 三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中, 若  $E$ 、 $F$  分别为  $AB$ 、 $AC$  的中点, 平面  $EB_1C_1F$  将三棱柱分成体积为  $V_1$ 、 $V_2$  的两部分, 那么  $V_1:V_2 =$  \_\_\_\_\_.

(20) 如果实数  $x$ ,  $y$  满足等式  $(x-2)^2 + y^2 = 3$ , 那么  $\frac{y}{x}$  的最大值是 \_\_\_\_\_.

### 三、解答题.

(21) 有四个数, 其中前三个数成等差数列, 后三个数成等比数列, 并且第一个数与第四个数的和是 16, 第二个数与第三个数的和是 12, 求这四个数.

(22) 已知  $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{4}$ ,  $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{3}$ , 求  $\text{tg}(\alpha + \beta)$  的值.

(23) 如图, 在三棱锥  $S-ABC$  中,  $SA \perp$  底面  $ABC$ ,  $AB \perp BC$ .  $DE$  垂直平分  $SC$ , 且分别交  $AC$ 、 $SC$  于  $D$ 、 $E$ . 又  $SA=AB$ ,  $SB=BC$ . 求以  $BD$  为棱, 以  $BDE$  与  $BDC$  为面的二面角的度数.

(24) 已知  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , 解不等式  $\log_a(4+3x-x^2) - \log_a(2x-1) > \log_a 2$ .

(25) 设  $a \geq 0$ , 在复数集  $C$  中解方程  $z^2 + 2|z| = a$ .

## 参考答案

一、选择题: 本题考查基本知识和基本运算.

- (1)A      (2)C      (3)D      (4)B      (5)D  
(6)C      (7)A      (8)B      (9)A      (10)C  
(11)B      (12)D      (13)A      (14)C      (15)B

二、填空题: 本题考查基本知识和基本运算.

- (16)  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$       (17) -20      (18) 2      (19) 7.5      (20)  $\sqrt{3}$

三、解答题.

(21) 本小题考查等差数列、等比数列的概念和运用方程(组)解决问题的能力.

解法一: 设四个数依次为  $a-d$ ,  $a$ ,  $a+d$ ,  $\frac{(a+d)^2}{a}$ .

依题意有

$$\begin{cases} (a-d) + \frac{(a+d)^2}{a} = 16, & \text{①} \\ a + (a+d) = 12. & \text{②} \end{cases}$$

由②式得  $d=12-2a$ .      ③

将③式代入①式得  $[a - (12 - 2a)] + \frac{(12 - a)^2}{a} = 16$ ,

整理得  $a^2 - 13a + 36 = 0$ .

解得  $a_1 = 4$ ,  $a_2 = 9$ .

代入③式得  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = -6$ .

从而得所求四个数为 0, 4, 8, 16 或 15, 9, 3, 1.

解法二: 设四个数依次为  $x$ ,  $y$ ,  $12-y$ ,  $16-x$ .

依题意,有

$$\begin{cases} x + (12 - y) = 2y, & \textcircled{1} \\ y(16 - x) = (12 - y)^2 & \textcircled{2} \end{cases}$$

由①式得  $x = 3y - 12$ . ③

将③式代入②式得  $y(16 - 3y + 12) = (12 - y)^2$ ,

整理得  $y^2 - 13y + 36 = 0$ .

解得  $y_1 = 4, y_2 = 9$ .

代入③式得  $x_1 = 0, x_2 = 15$ .

从而得所求四个数为 0, 4, 8, 16 或 15, 9, 3, 1.

(22) 本小题考查三角公式以及三角函数式的恒等变形和运算能力.

解法一: 由已知得

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{4},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{3},$$

两式相除得

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3}{4}.$$

所以 
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - (\frac{3}{4})^2} = \frac{24}{7}.$$

解法二: 如图, 不妨设  $0 \leq \alpha \leq \beta < 2\pi$ , 且点 A 的坐标是  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ , 点 B 的坐标是  $(\cos \beta, \sin \beta)$ , 则点 A, B 在单位圆  $x^2 + y^2 = 1$  上. 连结 AB, 若 C 是 AB 的中点, 由题设知点 C

的坐标是  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{8})$ .

连结 OC, 于是  $OC \perp AB$ , 若设点 D 的坐标是  $(1, 0)$ , 再连结 OA, OB, 则有

$$\angle DOA = \alpha, \quad \angle DOB = \beta, \quad \angle DOC = \frac{\alpha + \beta}{2} - \pi.$$

$$\text{从而} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \operatorname{tg} \angle DOC = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{所以} \quad \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - (\frac{3}{4})^2} = \frac{24}{7}.$$

解法三: 由题设得  $4(\sin \alpha + \sin \beta) = 3(\cos \alpha + \cos \beta).$

$$\text{将上式变形为} \quad \frac{4}{5} \sin \alpha - \frac{3}{5} \cos \alpha = \frac{3}{5} \cos \beta - \frac{4}{5} \sin \beta. \quad \textcircled{1}$$

$$\text{设} \quad \cos \varphi = \frac{4}{5}, \quad \sin \varphi = \frac{3}{5}, \quad \textcircled{2}$$

将②式代入①式, 可得  $\sin(\alpha - \varphi) = \sin(\beta - \varphi).$

$$\text{于是} \quad \alpha - \varphi = (2k+1)\pi - (\beta - \varphi) \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{或} \quad \alpha - \varphi = 2k\pi + (\beta - \varphi) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{若} \quad \alpha - \varphi = (2k+1)\pi - (\beta - \varphi) \quad (k \in \mathbb{Z}), \text{ 则 } \alpha = \beta + (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{于是} \quad \sin \alpha = -\sin \beta, \text{ 即 } \sin \alpha + \sin \beta = 0.$$

$$\text{这与已知条件} \quad \sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{4} \text{ 矛盾.}$$

$$\text{由此可知} \quad \alpha - \varphi = 2k\pi + (\beta - \varphi) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{即} \quad \alpha + \beta = 2j + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{由②式得} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{4}.$$

所以 
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - (\frac{3}{4})^2} = \frac{24}{7}.$$

(23) 本小题考查直线和平面, 直线和直线的位置关系, 二面角等基本知识, 以及逻辑推理能力和空间想象能力.

**解法一:** 由于  $SB=BC$ , 且  $E$  是  $SC$  的中点, 因此  $BE$  是等腰三角形  $SBC$  的底边  $SC$  的中线, 所以  $SC \perp BE$ .

又已知  $SC \perp DE, BE \cap DE=E$ ,

$\therefore SC \perp$  面  $BDE$ ,

$\therefore SC \perp BD$ .

又  $\because SA \perp$  底面  $ABC, BD$  在底面  $ABC$  上,  $\therefore SA \perp BD$ .

而  $SC \cap SA=S, \therefore BD \perp$  面  $SAC$ .

$\because DE=$ 面  $SAC \cap$  面  $BDE, DC=$ 面  $SAC \cap$  面  $BDC$ ,

$\therefore BD \perp DE, BD \perp DC$ .

$\therefore \angle EDC$  是所求的二面角的平面角.

$\because SA \perp$  底面  $ABC, \therefore SA \perp AB, SA \perp AC$ .

设  $SA = a$ . 则  $AB = a, BC = SB = \sqrt{2}a$ .

又因为  $AB \perp BC$ , 所以  $AC = \sqrt{3}a$ .

在  $\text{Rt}\triangle SAC$  中,  $\operatorname{tg}\angle ACS = \frac{SA}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \therefore \angle ACS = 30^\circ$ .

又已知  $DE \perp SC$ , 所以  $\angle EDC=60^\circ$ , 即所求的二面角等于  $60^\circ$ .

**解法二:** 由于  $SB=BC$ , 且  $E$  是  $SC$  的中点, 因此  $BE$  是等腰三角形  $SBC$  的底边  $SC$  的中线, 所以  $SC \perp BE$ .

又已知  $SC \perp DE, BE \cap DE=E$ .

∴  $SC \perp$  面  $BDE$ ,

∴  $SC \perp BD$ .

由于  $SA \perp$  底面  $ABC$ , 且  $A$  是垂足, 所以  $AC$  是  $SC$  在平面  $ABC$  上的射影. 由三垂线定理的逆定理得  $BD \perp AC$ ; 又因  $E \in SC$ ,  $AC$  是  $SC$  在平面  $ABC$  上的射影, 所以  $E$  在平面  $ABC$  上的射影在  $AC$  上, 由于  $D \in AC$ , 所以  $DE$  在平面  $ABC$  上的射影在  $AC$  上, 根据三垂线定理又得  $BD \perp DE$ .

∵  $DE$  面  $BDE$ ,  $DC$  面  $BDC$ ,

∴  $\angle EDC$  是所求的二面角的平面角.

以下同解法一.

**(24) 本小题考查对数, 不等式的基本知识及运算能力.**

**解:** 原不等式可化为

$$\log_a(4+3x-x^2) > \log_a 2(2x-1). \quad \text{①}$$

当  $0 < a < 1$  时, ①式等价于

$$\begin{cases} 4+3x-x^2 > 0, \\ 2(2x-1) > 0, \\ 4+3x-x^2 < 2(2x-1). \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4+3x-x^2 > 0, \\ 4+3x-x^2 < 2(2x-1). \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4-x)(1+x) > 0, \\ (x+3)(x-2) > 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 4, \\ x < -3 \text{ 或 } x > 2. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 2 < x < 4$ . 即当  $0 < a < 1$  时, 原不等式的解集是  $\{x \mid 2 < x < 4\}$ .

当  $a > 1$  时, ①式等价于

$$\begin{cases} 4+3x-x^2 > 0, \\ 2(2x-1) > 0, \\ 4+3x-x^2 > 2(2x-1). \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ -3 < x < 2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 2.$$

即当  $a > 1$  时, 原不等式的解集是  $\{x \mid \frac{1}{2} < x < 2\}$ .

综合以上讨论知, 当  $0 < a < 1$  时, 原不等式的解集是  $\{x \mid 2 < x < 4\}$ , 当  $a > 1$  时, 原不等式的解集是  $\{x \mid \frac{1}{2} < x < 2\}$ .

(25) 本小题考查复数与解方程等基本知识以及综合分析能力.

解法一: 设  $z=x+yi$ , 代入原方程得

$$x^2 - y^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2} + 2xyi = a,$$

于是原方程等价于方程组

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2} = a, & \text{①} \\ 2xy = 0. & \text{②} \end{cases}$$

由②式得  $y=0$  或  $x=0$ . 由此可见, 若原方程有解, 则其解或为实数或为纯虚数. 下面分别加以讨论.

情形 1. 若  $y=0$ , 即求原方程的实数解  $z=x$ . 此时, ①式化为

$$x^2 + 2|x| = a. \quad \text{③}$$

(I) 令  $x > 0$ , 方程③变为  $x^2 + 2x = a$ . ④

解方程④得  $x = -1 \pm \sqrt{1+a}$ .

由此可知: 当  $a=0$  时, 方程④无正根;

当  $a > 0$  时, 方程④有正根  $x = -1 + \sqrt{1+a}$ .

(II) 令  $x < 0$ , 方程③变为  $x^2 - 2x = a$ . ⑤

解方程⑤得  $x = 1 \pm \sqrt{1+a}$ .

由此可知: 当  $a=0$  时, 方程⑤无负根;

当  $a > 0$  时, 方程⑤有负根  $x = 1 - \sqrt{1+a}$ .

(III) 令  $x=0$ , 方程③变为  $0=a$ . ⑥

由此可知: 当  $a=0$  时, 方程⑥有零解  $x=0$ ;

当  $a > 0$  时, 方程⑥无零解.

所以, 原方程的实数解是:

当  $a=0$  时,  $z=0$ ;

当  $a > 0$  时,  $z = \pm(1 - \sqrt{1+a})$ .

情形 2. 若  $x=0$ , 由于  $y=0$  的情形前已讨论, 现在只需考查  $y \neq 0$  的情形, 即求原方程的纯虚数解  $z=yi$  ( $y \neq 0$ ). 此时, ①式化为

$$-y^2 + 2|y| = a. \quad ⑦$$

(I) 令  $y > 0$ , 方程⑦变为  $-y^2 + 2y = a$ , 即  $(y-1)^2 = 1-a$ . ⑧

由此可知: 当  $a > 1$  时, 方程⑧无实根.

当  $a \leq 1$  时, 解方程⑧得  $y = 1 \pm \sqrt{1-a}$ , 从而, 当  $a=0$  时, 方程⑧有正根  $y=2$ ;

当  $0 < a \leq 1$  时, 方程⑧有正根  $y = 1 \pm \sqrt{1-a}$ .

(II) 令  $y < 0$ , 方程⑦变为  $-y^2 - 2y = a$ , 即  $(y+1)^2 = 1-a$ . ⑨

由此可知: 当  $a > 1$  时, 方程⑨无实根.

当  $a \leq 1$  时解方程⑨得  $y = -1 \pm \sqrt{1-a}$ ,

从而, 当  $a=0$  时, 方程⑨有负根  $y=-2$ ;

当  $0 < a \leq 1$  时, 方程⑨有负根  $y = -1 \pm \sqrt{1-a}$ .

所以, 原方程的纯虚数解是:

当  $a=0$  时,  $z = \pm 2i$ ;

当  $0 < a \leq 1$  时,  $z = \pm(1 + \sqrt{1-a})i$ ,  $z = \pm(1 - \sqrt{1-a})i$ .

而当  $a > 1$  时, 原方程无纯虚数解.

**解法二:** 设  $z=x+yi$ , 代入原方程得

$$x^2 - y^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2} + 2xyi = a,$$

于是原方程等价于方程组

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2} = a, & \text{①} \\ 2xy = 0. & \text{②} \end{cases}$$

由②式得  $y=0$  或  $x=0$ . 由此可见, 若原方程有解, 则其解或为实数, 或为纯虚数. 下面分别加以讨论.

情形 1. 若  $y=0$ , 即求原方程的实数解  $z=x$ . 此时, ①式化为

$$x^2 + 2|x| = a.$$

$$\text{即} \quad |x|^2 + 2|x| = a. \quad \text{③}$$

解方程③得  $|x| = -1 + \sqrt{1+a}$ ,

所以, 原方程的实数解是  $z = \pm(-1 + \sqrt{1+a})$ .

情形 2. 若  $x=0$ , 由于  $y=0$  的情形前已讨论, 现在只需考查  $y \neq 0$  的情形, 即求原方程的纯虚数解  $z=yi$  ( $y \neq 0$ ). 此时, ①式化为

$$-y^2 + 2|y| = a.$$

$$\text{即} \quad -|y|^2 + 2|y| = a. \quad \textcircled{4}$$

当  $a=0$  时, 因  $y \neq 0$ , 解方程④得  $|y|=2$ ,

即当  $a=0$  时, 原方程的纯虚数解是  $z = \pm 2i$ .

当  $0 < a \leq 1$  时, 解方程④得  $|y| = 1 \pm \sqrt{1-a}$ .

即当  $0 < a \leq 1$  时, 原方程的纯虚数解是

$$z = \pm(1 + \sqrt{1-a})i, \quad z = \pm(1 - \sqrt{1-a})i.$$

当  $a > 1$  时, 方程④无实根, 所以这时原方程无纯虚数解.

**解法三:** 因为  $z^2 = -2|z| + a$  是实数, 所以若原方程有解, 则其解或为实数, 或为纯虚数, 即  $z=x$  或  $z=yi$  ( $y \neq 0$ ).

情形 1. 若  $z=x$ . 以下同解法一或解法二中的情形 1.

情形 2. 若  $z=yi$  ( $y \neq 0$ ). 以下同解法一或解法二中的情形 2.

**解法四:** 设  $z=r(\cos \theta + i\sin \theta)$ , 其中  $r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ . 代入原方程得

$$r^2 \cos 2\theta + 2r + ir^2 \sin 2\theta = a.$$

于是原方程等价于方程组

$$\begin{cases} r^2 \cos 2\theta + 2r = a, & \textcircled{1} \\ r^2 \sin 2\theta = 0. & \textcircled{2} \end{cases}$$

由②式得  $r=0$  或  $\theta = \frac{k\pi}{2}$  ( $k=0, 1, 2, 3$ ). 情形 1. 若  $r=0$ . ①式变成

$$0 = a. \quad \textcircled{3}$$

由此可知: 当  $a=0$  时,  $r=0$  是方程③的解.

当  $a > 0$  时, 方程③无解.

所以, 当  $a=0$  时, 原方程有解  $z=0$ ;

当  $a > 0$  时, 原方程无零解.

情形 2. 若  $\theta = \frac{k\pi}{2}$  ( $k=0, 1, 2, 3$ ), 由于  $r=0$  的情形前已讨论, 现在只需考查  $r > 0$  的情形.

(I) 当  $k=0, 2$  时, 对应的复数是  $z = \pm r$ . 因  $\cos 2\theta = 1$ , 故①式化为

$$r^2 + 2r = a. \quad \textcircled{4}$$

解方程④可得  $r = -1 \pm \sqrt{1+a}$ .

由此可知: 当  $a=0$  时, 方程④无正根;

当  $a > 0$  时, 方程④有正根  $r = -1 + \sqrt{1+a}$ .

所以, 当  $a > 0$  时, 原方程有解  $z = \pm(\sqrt{1+a} - 1)$ .

(II) 当  $k=1, 3$  时, 对应的复数是  $z = \pm ri$ . 因  $\cos 2\theta = -1$ , 故①式化为

$$-r^2 + 2r = a, \text{ 即 } (r-1)^2 = 1+a, \quad \textcircled{5}$$

由此可知: 当  $a > 1$  时, 方程⑤无实根, 从而无正根;

当  $a \leq 1$  时解方程⑤得  $r = 1 \pm \sqrt{1-a}$ . 从而, 当  $a=0$  时, 方程⑤有正根  $r=2$ ;

当  $0 < a \leq 1$  时, 方程⑤有正根  $r = 1 \pm \sqrt{1-a}$ .

所以, 当  $a=0$  时, 原方程有解  $z = \pm 2i$ ;

当  $0 < a \leq 1$  时, 原方程有解

$$z = \pm(1 + \sqrt{1-a})i, \quad z = \pm(1 - \sqrt{1-a})i.$$

当  $a > 1$  时, 原方程无纯虚数解.