



3. (5分) 设 $x, y$ 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+1 \geq 0 \\ x+y+1 \geq 0 \\ x \leq 3 \end{cases}$ , 则 $z=2x-3y$ 的最小值是 ( )

- A. -7                      B. -6                      C. -5                      D. -3

【考点】7C: 简单线性规划.

【专题】59: 不等式的解法及应用.

【分析】先画出满足约束条件: $\begin{cases} x-y+1 \geq 0 \\ x+y+1 \geq 0 \\ x \leq 3 \end{cases}$ 的平面区域, 求出平面区域的各

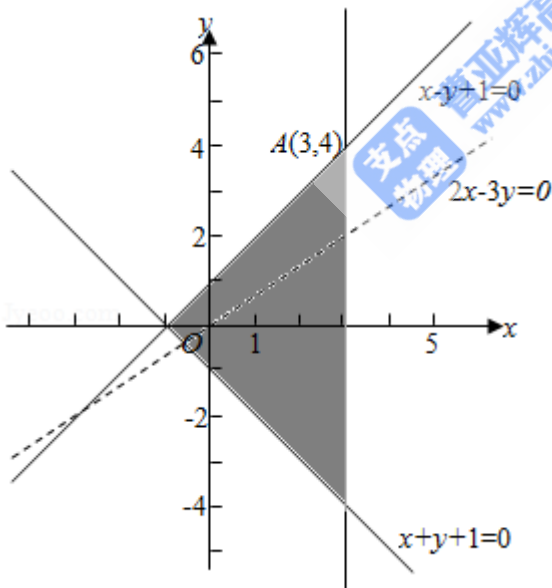
角点, 然后将角点坐标代入目标函数, 比较后, 即可得到目标函数 $z=2x-3y$ 的最小值.

【解答】解: 根据题意, 画出可行域与目标函数线如下图所示,

由 $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x=3 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ ,

由图可知目标函数在点A(3, 4)取最小值 $z=2 \times 3 - 3 \times 4 = -6$ .

故选: B.



【点评】用图解法解决线性规划问题时, 分析题目的已知条件, 找出约束条件和目标函数是关键, 可先将题目中的量分类、列出表格, 理清头绪, 然后列出不等式组(方程组)寻求约束条件, 并就题目所述找出目标函数. 然后将可行域各角点的值一一代入, 最后比较, 即可得到目标函数的最优解.

4. (5分)  $\triangle ABC$ 的内角A, B, C的对边分别为a, b, c, 已知 $b=2$ ,  $B=\frac{\pi}{6}$ ,  $C=\frac{\pi}{4}$ , 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ( )

- A.  $2\sqrt{3}+2$       B.  $\sqrt{3}+1$       C.  $2\sqrt{3}-2$       D.  $\sqrt{3}-1$

**【考点】** %H: 三角形的面积公式; HP: 正弦定理.

**【专题】** 58: 解三角形.

**【分析】** 由 $\sin B$ ,  $\sin C$ 及 $b$ 的值, 利用正弦定理求出 $c$ 的值, 再求出 $A$ 的度数, 由 $b$ ,  $c$ 及 $\sin A$ 的值, 利用三角形的面积公式即可求出三角形 $ABC$ 的面积.

**【解答】** 解:  $\because b=2$ ,  $B=\frac{\pi}{6}$ ,  $C=\frac{\pi}{4}$ ,

$$\therefore \text{由正弦定理 } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ 得: } c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}, \quad A = \frac{7\pi}{12},$$

$$\therefore \sin A = \sin \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \right) = \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4},$$

$$\text{则 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \sqrt{3} + 1.$$

故选: B.

**【点评】** 此题考查了正弦定理, 三角形的面积公式, 以及两角和与差的余弦函数公式, 熟练掌握正弦定理是解本题的关键.

5. (5分) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点分别为 $F_1$ 、 $F_2$ ,  $P$ 是 $C$

上的点 $PF_2 \perp F_1F_2$ ,  $\angle PF_1F_2 = 30^\circ$ , 则 $C$ 的离心率为 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{6}}{6}$       B.  $\frac{1}{3}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**【考点】** K4: 椭圆的性质.

**【专题】** 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

**【分析】** 设 $|PF_2|=x$ , 在直角三角形 $PF_1F_2$ 中, 依题意可求得 $|PF_1|$ 与 $|F_1F_2|$ , 利用椭圆离心率的性质即可求得答案.

**【解答】** 解:  $|PF_2|=x$ ,  $\because PF_2 \perp F_1F_2$ ,  $\angle PF_1F_2 = 30^\circ$ ,

$$\therefore |PF_1|=2x, |F_1F_2|=\sqrt{3}x,$$

$$\text{又 } |PF_1|+|PF_2|=2a, |F_1F_2|=2c$$

$$\therefore 2a=3x, 2c=\sqrt{3}x,$$

$$\therefore C\text{的离心率为: } e=\frac{2c}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故选: D.

**【点评】** 本题考查椭圆的简单性质, 求得 $|PF_1|$ 与 $|PF_2|$ 及 $|F_1F_2|$ 是关键, 考查理解与应用能力, 属于中档题.

6. (5分) 已知 $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$ , 则 $\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$  ( )

A.  $\frac{1}{6}$

B.  $\frac{1}{3}$

C.  $\frac{1}{2}$

D.  $\frac{2}{3}$

**【考点】** GE: 诱导公式; GG: 同角三角函数间的基本关系; GS: 二倍角的三角函数.

**【专题】** 56: 三角函数的求值.

**【分析】** 所求式子利用二倍角的余弦函数公式化简, 再利用诱导公式变形, 将已知等式代入计算即可求出值.

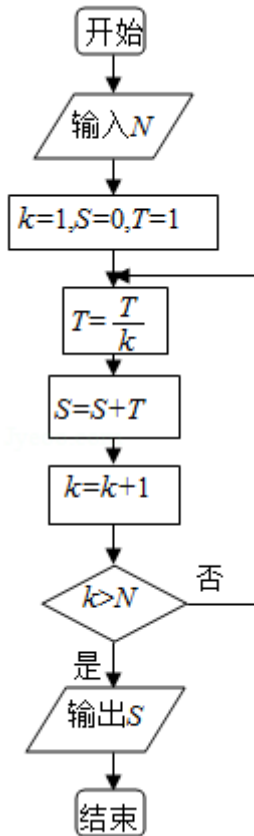
**【解答】** 解:  $\because \sin 2\alpha = \frac{2}{3}$ ,

$$\therefore \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}(1 - \sin 2\alpha) = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}.$$

故选: A.

**【点评】** 此题考查了二倍角的余弦函数公式, 以及诱导公式的作用, 熟练掌握公式是解本题的关键.

7. (5分) 执行如图的程序框图, 如果输入的 $N=4$ , 那么输出的 $S=$  ( )



- A.  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$
- B.  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2}$
- C.  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$
- D.  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2} + \frac{1}{5 \times 4 \times 3 \times 2}$

【考点】EF：程序框图.

【专题】27：图表型.

【分析】由程序中的变量、各语句的作用，结合流程图所给的顺序可知当条件满足时，用 $S + \frac{T}{k}$ 的值代替 $S$ 得到新的 $S$ ，并用 $k+1$ 代替 $k$ ，直到条件不能满足时输出最后算出的 $S$ 值，由此即可得到本题答案.

【解答】解：根据题意，可知该按以下步骤运行

第一次： $S=1$ ，

第二次： $S=1 + \frac{1}{2}$ ，

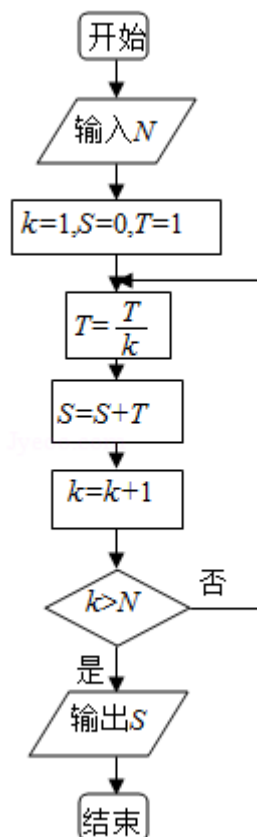
第三次:  $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3\times 2}$ ,

第四次:  $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3\times 2}+\frac{1}{4\times 3\times 2}$ .

此时 $k=5$ 时,符合 $k>N=4$ ,输出 $S$ 的值.

$$\therefore S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3\times 2}+\frac{1}{4\times 3\times 2}$$

故选: B.



**【点评】** 本题主要考查了直到型循环结构,循环结构有两种形式:当型循环结构和直到型循环结构,以及表格法的运用,属于基础题.

8. (5分) 设 $a=\log_3 2$ ,  $b=\log_5 2$ ,  $c=\log_2 3$ , 则 ( )

- A.  $a>c>b$       B.  $b>c>a$       C.  $c>a>b$       D.  $c>b>a$

**【考点】** 4M: 对数值大小的比较.

**【专题】** 11: 计算题.

**【分析】** 判断对数值的范围,然后利用换底公式比较对数式的大小即可.

**【解答】**解：由题意可知： $a=\log_3 2 \in (0, 1)$ ， $b=\log_5 2 \in (0, 1)$ ， $c=\log_2 3 > 1$ ，

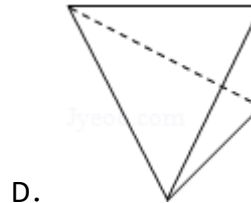
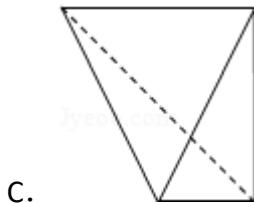
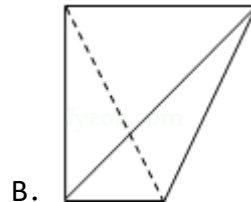
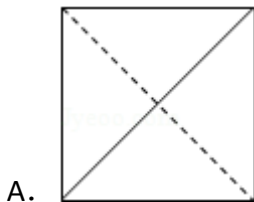
$$\text{所以 } a=\log_3 2, b=\log_5 2 = \frac{\log_3 2}{\log_3 5} < \log_3 2,$$

所以  $c > a > b$ ，

故选：C.

**【点评】**本题考查对数值的大小比较，换底公式的应用，基本知识的考查.

9. (5分) 一个四面体的顶点在空间直角坐标系  $O-xyz$  中的坐标分别是  $(1, 0, 1)$ ， $(1, 1, 0)$ ， $(0, 1, 1)$ ， $(0, 0, 0)$ ，画该四面体三视图中的正视图时，以  $zOx$  平面为投影面，则得到正视图可以为 ( )

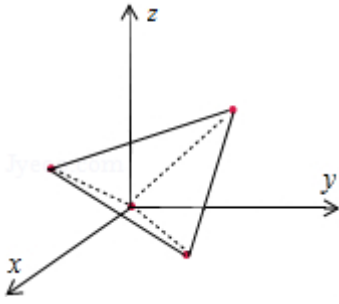


**【考点】**L7：简单空间图形的三视图.

**【专题】**11：计算题；13：作图题.

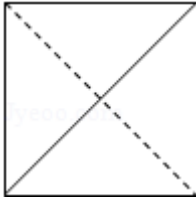
**【分析】**由题意画出几何体的直观图，然后判断以  $zOx$  平面为投影面，则得到正视图即可.

**【解答】**解：因为一个四面体的顶点在空间直角坐标系  $O-xyz$  中的坐标分别是  $(1, 0, 1)$ ， $(1, 1, 0)$ ， $(0, 1, 1)$ ， $(0, 0, 0)$ ，几何体的直观图如图，是正方体的顶点为顶点的一个正四面体，所以以  $zOx$  平面为投影面，



则得到正视图为：

故选：A.



**【点评】** 本题考查几何体的三视图的判断，根据题意画出几何体的直观图是解题的关键，考查空间想象能力.

10. (5分) 设抛物线C:  $y^2=4x$ 的焦点为F, 直线l过F且与C交于A, B两点. 若  $|AF|=3|BF|$ , 则l的方程为 ( )

A.  $y=x-1$  或  $y=-x+1$

B.  $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$  或

$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$

C.  $y=\sqrt{3}(x-1)$  或  $y=-\sqrt{3}(x-1)$

D.  $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$  或

$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$

**【考点】** K8: 抛物线的性质.

**【专题】** 11: 计算题; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

**【分析】** 根据题意, 可得抛物线焦点为F(1, 0), 由此设直线l方程为  $y=k(x-1)$ , 与抛物线方程联解消去x, 得  $\frac{k}{4}y^2 - y - k = 0$ . 再设A( $x_1, y_1$ ), B( $x_2, y_2$ ), 由根与系数的关系和  $|AF|=3|BF|$ , 建立关于  $y_1, y_2$  和k的方程组, 解之可得k值, 从而得到直线l的方程.

**【解答】** 解:  $\because$  抛物线C方程为  $y^2=4x$ , 可得它的焦点为F(1, 0),

$\therefore$  设直线l方程为  $y=k(x-1)$

由  $\begin{cases} y=k(x-1) \\ y^2=4x \end{cases}$  消去  $x$ , 得  $\frac{k}{4}y^2 - y - k = 0$

设  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,

可得  $y_1 + y_2 = \frac{4}{k}$ ,  $y_1 y_2 = -4 \dots (*)$

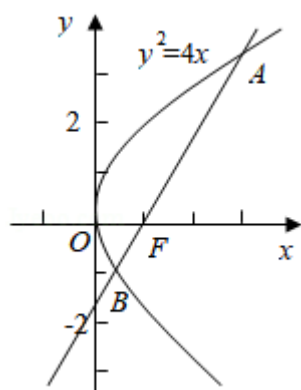
$\therefore |AF| = 3|BF|$ ,

$\therefore y_1 + 3y_2 = 0$ , 可得  $y_1 = -3y_2$ , 代入  $(*)$  得  $-2y_2 = \frac{4}{k}$  且  $-3y_2^2 = -4$ ,

消去  $y_2$  得  $k^2 = 3$ , 解之得  $k = \pm\sqrt{3}$

$\therefore$  直线  $l$  方程为  $y = \sqrt{3}(x-1)$  或  $y = -\sqrt{3}(x-1)$

故选: C.



**【点评】** 本题给出抛物线的焦点弦  $AB$  被焦点  $F$  分成  $1:3$  的两部分, 求直线  $AB$  的方程, 着重考查了抛物线的标准方程、简单几何性质和直线与圆锥曲线的位置关系等知识, 属于中档题.

11. (5分) 已知函数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ , 下列结论中错误的是 ( )

- A.  $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 0$
- B. 函数  $y = f(x)$  的图象是中心对称图形
- C. 若  $x_0$  是  $f(x)$  的极小值点, 则  $f(x)$  在区间  $(-\infty, x_0)$  上单调递减
- D. 若  $x_0$  是  $f(x)$  的极值点, 则  $f'(x_0) = 0$

**【考点】** 6B: 利用导数研究函数的单调性; 6D: 利用导数研究函数的极值.

**【专题】** 16: 压轴题; 53: 导数的综合应用.

**【分析】** 对于 A, 对于三次函数  $f(x)$

) =  $x^3+ax^2+bx+c$ , 由于当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $y \rightarrow -\infty$ , 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $y \rightarrow +\infty$ , 故在区间  $(-\infty, +\infty)$  肯定存在零点;

对于B, 根据对称变换法则, 求出对应中心坐标, 可以判断;

对于C: 采用取特殊函数的方法, 若取  $a = -1, b = -1, c = 0$ , 则  $f(x) = x^3 - x^2 - x$ , 利用导数研究其极值和单调性进行判断;

D: 若  $x_0$  是  $f(x)$  的极值点, 根据导数的意义, 则  $f'(x_0) = 0$ , 正确.

**【解答】**解:

A、对于三次函数  $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$ ,

A: 由于当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $y \rightarrow -\infty$ , 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $y \rightarrow +\infty$ ,

故  $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 0$ , 故A正确;

B、 $\because f\left(-\frac{2a}{3}-x\right)+f(x) = \left(-\frac{2a}{3}-x\right)^3+a\left(-\frac{2a}{3}-x\right)^2+b\left(-\frac{2a}{3}-x\right)+c+x^3+ax^2+bx+c = \frac{4a^3}{27} - \frac{2ab}{3} + 2c,$

$f\left(-\frac{a}{3}\right) = \left(-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(-\frac{a}{3}\right)+c = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c,$

$\therefore f\left(-\frac{2a}{3}-x\right)+f(x) = 2f\left(-\frac{a}{3}\right),$

$\therefore$  点  $P\left(-\frac{a}{3}, f\left(-\frac{a}{3}\right)\right)$  为对称中心, 故B正确.

C、若取  $a = -1, b = -1, c = 0$ , 则  $f(x) = x^3 - x^2 - x$ ,

对于  $f(x) = x^3 - x^2 - x, \therefore f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

$\therefore$  由  $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 > 0$  得  $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

由  $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 < 0$  得  $x \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$

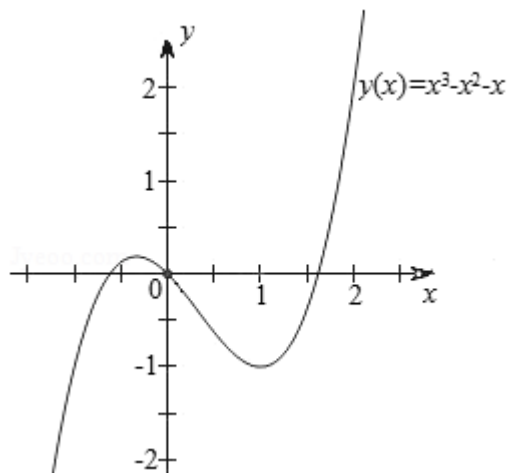
$\therefore$  函数  $f(x)$  的单调增区间为:  $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right), (1, +\infty)$ , 减区间为:  $\left(-\frac{1}{3}, 1\right),$

故1是  $f(x)$  的极小值点, 但  $f(x)$

) 在区间  $(-\infty, 1)$  不是单调递减, 故C错误;

D: 若  $x_0$  是  $f(x)$  的极值点, 根据导数的意义, 则  $f'(x_0) = 0$ , 故D正确.

由于该题选择错误的, 故选: C.



**【点评】** 本题考查了导数在求函数极值中的应用，利用导数求函数的单调区间，及导数的运算.

12. (5分) 若存在正数 $x$ 使 $2^x(x - a) < 1$ 成立，则 $a$ 的取值范围是 ( )
- A.  $(-\infty, +\infty)$     B.  $(-2, +\infty)$     C.  $(0, +\infty)$     D.  $(-1, +\infty)$

**【考点】** 3E: 函数单调性的性质与判断; 7E: 其他不等式的解法.

**【专题】** 59: 不等式的解法及应用.

**【分析】** 转化不等式为 $a > x - \frac{1}{2^x}$ ，利用 $x$ 是正数，通过函数的单调性，求出 $a$ 的范围即可.

**【解答】** 解: 因为 $2^x(x - a) < 1$ ，所以 $a > x - \frac{1}{2^x}$ ，

函数 $y = x - \frac{1}{2^x}$ 是增函数， $x > 0$ ，所以 $y > -1$ ，即 $a > -1$ ，

所以 $a$ 的取值范围是 $(-1, +\infty)$  .

故选: D.

**【点评】** 本题考查不等式的解法，函数单调性的应用，考查分析问题解决问题的能力.

**二、填空题: 本大题共4小题, 每小题4分.**

13. (4分) 从1, 2, 3, 4, 5中任意取出两个不同的数, 其和为5的概率是\_\_

0.2.

【考点】CB：古典概型及其概率计算公式.

【专题】5I：概率与统计.

【分析】由题意结合组合数公式可得总的基本事件数，再找出和为5的情形，由古典概型的概率公式可得答案.

【解答】解：从1，2，3，4，5中任意取出两个不同的数共有  $C_5^2=10$  种情况，

和为5的有 (1, 4) (2, 3) 两种情况，

故所求的概率为： $\frac{2}{10}=0.2$

故答案为：0.2

【点评】本题考查古典概型及其概率公式，属基础题.

14. (4分) 已知正方形ABCD的边长为2，E为CD的中点，则  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = \underline{2}$ .

【考点】90：平面向量数量积的性质及其运算.

【专题】5A：平面向量及应用.

【分析】根据两个向量的加减法的法则，以及其几何意义，可得要求的式子为

$(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$ ，再根据两个向量垂直的性质，运算求得结果.

【解答】解： $\because$  已知正方形ABCD的边长为2，E为CD的中点，则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ ，

故  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} +$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 = 4 + 0 - 0 - \frac{1}{2} \times 4 = 2$ ，

故答案为2.

【点评】本题主要考查两个向量的加减法的法则，以及其几何意义，两个向量垂直的性质，属于中档题.

15. (4分) 已知正四棱锥O - ABCD的体积为  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，底面边长为  $\sqrt{3}$ ，则以O为球心，OA为半径的球的表面积为  $\underline{24\pi}$ .

【考点】L3: 棱锥的结构特征; LG: 球的体积和表面积.

【专题】16: 压轴题; 5F: 空间位置关系与距离.

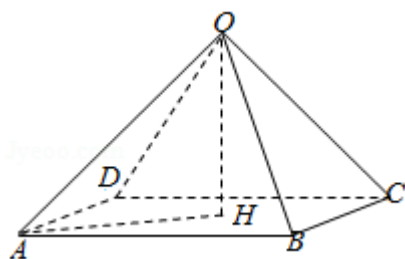
【分析】先直接利用锥体的体积公式即可求得正四棱锥O - ABCD的高, 再利用直角三角形求出正四棱锥O - ABCD的侧棱长OA, 最后根据球的表面积公式计算即得.

【解答】解: 如图, 正四棱锥O - ABCD的体积 $V = \frac{1}{3}sh = \frac{1}{3}(\sqrt{3} \times \sqrt{3}) \times OH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ,  
 $\therefore OH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ,

在直角三角形OAH中,  $OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \sqrt{6}$

所以表面积为 $4\pi r^2 = 24\pi$ ;

故答案为:  $24\pi$ .



【点评】本题考查锥体的体积、球的表面积计算, 考查学生的运算能力, 属基础题.

16. (4分) 函数 $y = \cos(2x + \phi)$  ( $-\pi \leq \phi < \pi$ ) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位后, 与函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  的图象重合, 则 $\phi = \underline{\underline{\frac{5\pi}{6}}}$ .

【考点】HJ: 函数 $y = A\sin(\omega x + \phi)$  的图象变换.

【专题】11: 计算题; 16: 压轴题; 57: 三角函数的图像与性质.

【分析】根据函数图象平移的公式, 可得平移后的图象为 $y = \cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \phi\right]$  的图象, 即 $y = \cos(2x + \phi - \pi)$  的图象. 结合题意得函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) =$

$\cos(2x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2})$  的图象与  $y = \cos(2x + \phi - \pi)$  图象重合，由此结合三角函数的诱导公式即可算出  $\phi$  的值.

**【解答】** 解：函数  $y = \cos(2x + \phi)$  ( $-\pi \leq \phi < \pi$ ) 的图象向右平移

$\frac{\pi}{2}$  个单位后，得平移后的图象的函数解析式为

$$y = \cos[2(x - \frac{\pi}{2}) + \phi] = \cos(2x + \phi - \pi),$$

$$\text{而函数 } y = \sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \cos(2x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}),$$

由函数  $y = \cos(2x + \phi)$  ( $-\pi \leq \phi < \pi$ ) 的图象向右平移

$\frac{\pi}{2}$  个单位后，与函数  $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$  的图象重合，得

$$2x + \phi - \pi = 2x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}, \text{ 解得: } \phi = \frac{5\pi}{6}.$$

符合  $-\pi \leq \phi < \pi$ .

故答案为  $\frac{5\pi}{6}$ .

**【点评】** 本题给出函数  $y = \cos(2x + \phi)$  的图象平移，求参数  $\phi$  的值. 着重考查了函数图象平移的公式、三角函数的诱导公式和函数  $y = A\sin(\omega x + \phi)$  的图象变换等知识，属于基础题.

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (12分) 已知等差数列  $\{a_n\}$  的公差不为零， $a_1 = 25$ ，且  $a_1, a_{11}, a_{13}$  成等比数列.

(I) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 求  $a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{3n-2}$ .

**【考点】** 84: 等差数列的通项公式; 88: 等比数列的通项公式; 8E: 数列的求和.

**【专题】** 54: 等差数列与等比数列.

**【分析】** (I) 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d \neq 0$ ，利用成等比数列的定义可得，

$$a_{11}^2 = a_1 a_{13}, \text{ 再利用等差数列的通项公式可得 } (a_1 + 10d)^2 = a_1(a_1 + 12d), \text{ 化}$$

为  $d(2a_1 + 25d) = 0$ ，解出  $d$  即可得到通项公式  $a_n$ ;

(II) 由 (I) 可得  $a_{3n-2} = -2(3n-2) + 27 = -6n + 31$ , 可知此数列是以 25 为首项,  $-6$  为公差的等差数列. 利用等差数列的前  $n$  项和公式即可得出  $a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{3n-2}$ .

**【解答】** 解: (I) 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d \neq 0$ ,

由题意  $a_1, a_{11}, a_{13}$  成等比数列,  $\therefore a_{11}^2 = a_1 a_{13}$ ,

$$\therefore (a_1 + 10d)^2 = a_1(a_1 + 12d), \text{ 化为 } d(2a_1 + 25d) = 0,$$

$$\because d \neq 0, \therefore 2 \times 25 + 25d = 0, \text{ 解得 } d = -2.$$

$$\therefore a_n = 25 + (n-1) \times (-2) = -2n + 27.$$

(II) 由 (I) 可得  $a_{3n-2} = -2(3n-2) + 27 = -6n + 31$ , 可知此数列是以 25 为首项,  $-6$  为公差的等差数列.

$$\therefore S_n = a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{3n-2} = \frac{n(a_1 + a_{3n-2})}{2}$$

$$= \frac{n(25 - 6n + 31)}{2}$$

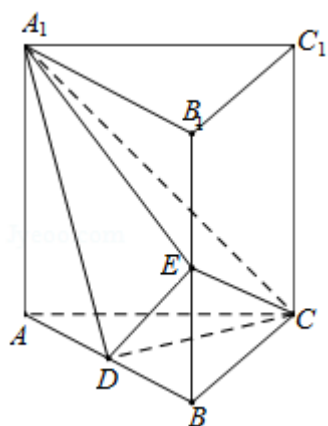
$$= -3n^2 + 28n.$$

**【点评】** 熟练掌握等差数列与等比数列的通项公式及其前  $n$  项和公式是解题的关键.

18. (12分) 如图, 直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $D, E$  分别是  $AB, BB_1$  的中点

(I) 证明:  $BC_1 \parallel$  平面  $A_1CD$ ;

(II)  $AA_1 = AC = CB = 2, AB = 2\sqrt{2}$ , 求三棱锥  $C - A_1DE$  的体积.



**【考点】** LF: 棱柱、棱锥、棱台的体积; LS: 直线与平面平行.

【专题】5F：空间位置关系与距离.

【分析】（I）连接 $AC_1$

交 $A_1C$ 于点 $F$ ，则 $DF$ 为三角形 $ABC_1$ 的中位线，故 $DF \parallel BC_1$ 。再根据直线和平面平行的判定定理证得

$BC_1 \parallel$ 平面 $A_1CD$ 。

（II）由题意可得此直三棱柱的底面 $ABC$ 为等腰直角三角形，由 $D$ 为 $AB$ 的中点可得 $CD \perp$ 平面 $ABB_1A_1$ 。求得 $CD$ 的值，利用

勾股定理求得 $A_1D$ 、 $DE$ 和 $A_1E$ 的值，可得 $A_1D \perp DE$ 。进而求得 $S_{\triangle A_1DE}$ 的值，再根

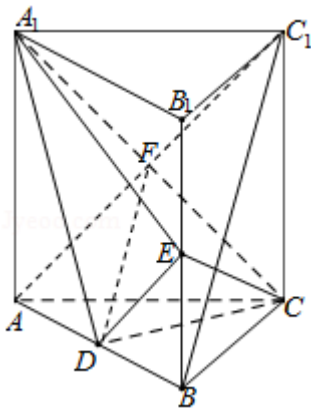
据三棱锥 $C - A_1DE$ 的体积

为 $\frac{1}{3} \cdot S_{\triangle A_1DE} \cdot CD$ ，运算求得结果。

【解答】解：（I）证明：连接 $AC_1$ 交 $A_1C$ 于点 $F$ ，则 $F$ 为 $AC_1$ 的中点。

$\because$ 直棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $D$ ， $E$ 分别是 $AB$ ， $BB_1$ 的中点，故 $DF$ 为三角形 $ABC_1$ 的中位线，故 $DF \parallel BC_1$ 。

由于 $DF \subset$ 平面 $A_1CD$ ，而 $BC_1$ 不在平面 $A_1CD$ 中，故有 $BC_1 \parallel$ 平面 $A_1CD$ 。



（II） $\because AA_1 = AC = CB = 2$ ， $AB = 2\sqrt{2}$ ，故此直三棱柱的底面 $ABC$ 为等腰直角三角形。

由 $D$ 为 $AB$ 的中点可得 $CD \perp$ 平面 $ABB_1A_1$ ， $\therefore CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \sqrt{2}$ 。

$\because A_1D = \sqrt{A_1A^2 + AD^2} = \sqrt{6}$ ，同理，利用勾股定理求得 $DE = \sqrt{3}$ ， $A_1E = 3$ 。

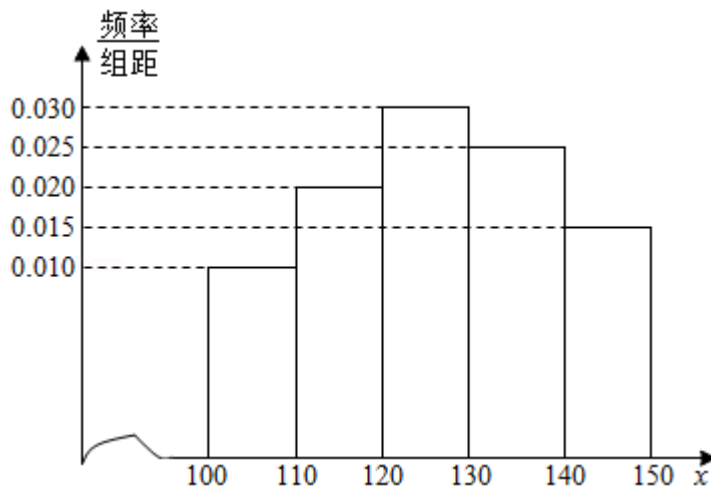
再由勾股定理可得 $A_1D^2 + DE^2 = A_1E^2$ ， $\therefore A_1D \perp DE$ 。

$$\therefore S_{\triangle A_1DE} = \frac{1}{2} \cdot A_1D \cdot DE = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore V_{C-A_1DE} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle A_1DE} \cdot CD = 1.$$

**【点评】** 本题主要考查直线和平面平行的判定定理的应用，求三棱锥的体积，体现了数形结合的数学思想，属于中档题.

19. (12分) 经销商经销某种农产品，在一个销售季度内，每售出1t该产品获利润500元，未售出的产品，每1t亏损300元. 根据历史资料，得到销售季度内市场需求量的频率分布直方图，如图所示. 经销商为下一个销售季度购进了130t该农产品. 以 $X$  (单位: t,  $100 \leq X \leq 150$ ) 表示下一个销售季度内的市场需求量， $T$  (单位: 元) 表示下一个销售季度内经销该农产品的利润.



(I) 将 $T$ 表示为 $X$ 的函数;

(II) 根据直方图估计利润 $T$ 不少于57000元的概率.

**【考点】** B8: 频率分布直方图.

**【专题】** 5I: 概率与统计.

**【分析】** (I) 由题意先分段写出，当 $X \in [100, 130)$ 时，当 $X \in [130, 150)$ 时，和利润值，最后利用分段函数的形式进行综合即可.

(II) 由(I)知，利润 $T$ 不少于57000元，当且仅当 $120 \leq X \leq 150$ . 再由直方图知需求量 $X \in [120, 150]$ 的频率为0.7，利用样本估计总体的方法得出下一个销售季度的利润 $T$ 不少于57000元的概率的估计值.

**【解答】** 解: (I) 由题意得，当 $X \in [100, 130)$ 时， $T = 500X - 300(130 - X) = 800X - 39000$ ,

当 $X \in [130, 150]$ 时， $T = 500 \times 130 = 65000$ ,

$$\therefore T = \begin{cases} 800X - 39000, & X \in [100, 130) \\ 65000, & X \in [130, 150] \end{cases}$$

(II) 由 (I) 知, 利润  $T$  不少于 57000 元, 当且仅当  $120 \leq X \leq 150$ .

由直方图知需求量  $X \in [120, 150]$  的频率为 0.7,

所以下一个销售季度的利润  $T$  不少于 57000 元的概率的估计值为 0.7.

**【点评】** 本题考查用样本的频率分布估计总体分布及识图的能力, 求解的重点是对题设条件及直方图的理解, 了解直方图中每个小矩形的面积的意义.

20. (12分) 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知圆  $P$  在  $x$  轴上截得线段长为  $2\sqrt{2}$ , 在  $y$  轴上截得线段长为  $2\sqrt{3}$ .

(I) 求圆心  $P$  的轨迹方程;

(II) 若  $P$  点到直线  $y=x$  的距离为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 求圆  $P$  的方程.

**【考点】** J1: 圆的标准方程; J3: 轨迹方程.

**【专题】** 15: 综合题; 16: 压轴题; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

**【分析】** (I) 由题意, 可直接在弦心距、弦的一半及半径三者组成的直角三角形中利用勾股定理建立关于点  $P$  的横纵坐标的方程, 整理即可得到所求的轨迹方程;

(II) 由题, 可先由点到直线的距离公式建立关于点  $P$  的横纵坐标的方程, 将此方程与 (I) 所求的轨迹方程联立, 解出点  $P$  的坐标, 进而解出圆的半径即可写出圆  $P$  的方程.

**【解答】** 解: (I) 设圆心  $P(x, y)$ , 由题意得圆心到  $x$  轴的距离与半径之间的关系为  $2 = \sqrt{r^2 - y^2}$ , 同理圆心到  $y$  轴的距离与半径之间的关系为  $3 = \sqrt{r^2 - x^2}$ , 由两式整理得  $x^2 + 3 = y^2 + 2$ , 整理得  $y^2 - x^2 = 1$  即为圆心  $P$  的轨迹方程, 此轨迹是等轴双曲线

(II) 由  $P$  点到直线  $y=x$  的距离为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  得,  $\frac{\sqrt{2} - |x-y|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 即  $|x-y|=1$ , 即  $x=y+1$  或  $y=x+1$ , 分别代入  $y^2 - x^2 = 1$  解得  $P(0, -1)$  或  $P(0, 1)$

若  $P(0, -1)$ , 此时点  $P$  在  $y$  轴上, 故半径为  $\sqrt{3}$ , 所以圆  $P$  的方程为  $(y+1)^2 + x^2 = 3$ ;

若P(0, 1), 此时点P在y轴上, 故半径为 $\sqrt{3}$ , 所以圆P的方程为 $(y-1)^2+x^2=3$ ;

综上, 圆P的方程为 $(y+1)^2+x^2=3$ 或 $(y-1)^2+x^2=3$

**【点评】** 本题考查求轨迹方程的方法解析法及点的直线的距离公式、圆的标准方程与圆的性质, 解题的关键是理解圆的几何特征, 将几何特征转化为方程

21. (12分) 已知函数 $f(x) = x^2e^{-x}$

(I) 求 $f(x)$ 的极小值和极大值;

(II) 当曲线 $y=f(x)$ 的切线l的斜率为负数时, 求l在x轴上截距的取值范围.

**【考点】** 5C: 根据实际问题选择函数类型; 6D: 利用导数研究函数的极值; 6H: 利用导数研究曲线上某点切线方程.

**【专题】** 15: 综合题; 16: 压轴题; 35: 转化思想; 53: 导数的综合应用.

**【分析】** (I) 利用导数的运算法则即可得出 $f'(x)$ , 利用导数与函数单调性的关系及函数的极值点的定义, 即可求出函数的极值;

(II) 利用导数的几何意义即可得到切线的斜率, 得出切线的方程, 利用方程求出与x轴交点的横坐标, 再利用导数研究函数的单调性、极值、最值即可

**【解答】** 解: (I)  $\because f(x) = x^2e^{-x}$ ,  
 $\therefore f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2)$ ,

令 $f'(x) = 0$ , 解得 $x=0$ 或 $x=2$ ,

令 $f'(x) > 0$ , 可解得 $0 < x < 2$ ;

令 $f'(x) < 0$ , 可解得 $x < 0$ 或 $x > 2$ ,

故函数在区间 $(-\infty, 0)$ 与 $(2, +\infty)$ 上是减函数, 在区间 $(0, 2)$ 上是增函数.

$\therefore x=0$ 是极小值点,  $x=2$ 极大值点, 又 $f(0) = 0$ ,  $f(2) = \frac{4}{e^2}$ .

故 $f(x)$ 的极小值和极大值分别为 $0$ ,  $\frac{4}{e^2}$ .

(II) 设切点为  $(x_0, x_0^2 e^{-x_0})$ ,

则切线方程为  $y - x_0^2 e^{-x_0} = e^{-x_0} (2x_0 - x_0^2) (x - x_0)$ ,

令  $y=0$ , 解得  $x = \frac{x_0^2 - x_0}{x_0 - 2} = (x_0 - 2) + \frac{2}{x_0 - 2} + 3$ ,

$\therefore$  曲线  $y=f(x)$  的切线  $l$  的斜率为负数,

$$\therefore e^{-x_0} (2x_0 - x_0^2) < 0,$$

$\therefore x_0 < 0$  或  $x_0 > 2$ ,

$$\text{令 } f(x_0) = x_0 + \frac{2}{x_0 - 2} + 1,$$

$$\text{则 } f'(x_0) = 1 - \frac{2}{(x_0 - 2)^2} = \frac{(x_0 - 2)^2 - 2}{(x_0 - 2)^2}.$$

① 当  $x_0 < 0$  时,  $(x_0 - 2)^2 - 2 > 0$ , 即  $f'(x_0) > 0$ ,  $\therefore f(x_0)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调

递增,  $\therefore f(x_0) < f(0) = 0$ ;

② 当  $x_0 > 2$  时, 令  $f'(x_0) = 0$ , 解得  $x_0 = 2 + \sqrt{2}$ .

当  $x_0 > 2 + \sqrt{2}$  时,  $f'(x_0) > 0$ , 函数  $f(x_0)$  单调递增; 当  $2 < x_0 < 2 + \sqrt{2}$  时,  $f'(x_0) < 0$ , 函数  $f(x_0)$  单调递减.

故当  $x_0 = 2 + \sqrt{2}$  时, 函数  $f(x_0)$  取得极小值, 也即最小值, 且  $f(2 + \sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2}$ .

综上所述: 切线  $l$  在  $x$  轴上截距的取值范围是  $(-\infty, 0) \cup [3 + 2\sqrt{2}, +\infty)$ .

**【点评】** 本题考查利用导数求函数的极值与利用导数研究函数的单调性、切线、函数的值域, 综合性强, 考查了推理能力和计算能力.

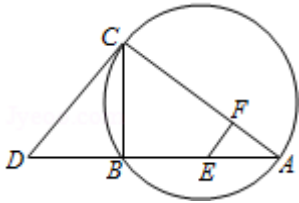
**选做题.** 请考生在第22、23、24题中任选择一题作答, 如果多做, 则按所做的第一部分, 作答时请写清题号.

22. 【选修4-1几何证明选讲】

如图,  $CD$  为  $\triangle ABC$  外接圆的切线,  $AB$  的延长线交直线  $CD$  于点  $D$ ,  $E$ 、 $F$  分别为弦  $AB$  与弦  $AC$  上的点, 且  $BC \cdot AE = DC \cdot AF$ ,  $B$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $C$  四点共圆.

(1) 证明:  $CA$  是  $\triangle ABC$  外接圆的直径;

(2) 若 $DB=BE=EA$ ，求过 $B$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $C$ 四点的圆的面积与 $\triangle ABC$ 外接圆面积的比值



**【考点】** NC: 与圆有关的比例线段.

**【专题】** 5B: 直线与圆.

**【分析】** (1) 已知 $CD$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆的切线，利用弦切角定理可得 $\angle DCB = \angle A$ ，  
及 $BC \cdot AE = DC \cdot AF$ ，可知 $\triangle CDB \sim \triangle AEF$ ，于是 $\angle CBD = \angle AFE$ .

利用 $B$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $C$ 四点共圆，可得 $\angle CFE = \angle DBC$ ，进而得到 $\angle CFE = \angle AFE = 90^\circ$ 即可证明 $CA$ 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径；

(2) 要求过 $B$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $C$ 四点的圆的面积与 $\triangle ABC$ 外接圆面积的比值. 只需求出其外接圆的直径的平方之比即可. 由过 $B$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $C$ 四点的圆的直径为 $CE$ ，及 $DB=BE$ ，可得 $CE=DC$ ，利用切割线定理可得 $DC^2 = DB \cdot DA$ ， $CA^2 = CB^2 + BA^2$ ，都用 $DB$ 表示即可.

**【解答】** (1) 证明:  $\because CD$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆的切线,  $\therefore \angle DCB = \angle A$ ,

$$\because BC \cdot AE = DC \cdot AF, \therefore \frac{BC}{FA} = \frac{DC}{EA}.$$

$\therefore \triangle CDB \sim \triangle AEF, \therefore \angle CBD = \angle AFE.$

$\because B$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $C$ 四点共圆,  $\therefore \angle CFE = \angle DBC, \therefore \angle CFE = \angle AFE = 90^\circ.$

$\therefore \angle CBA = 90^\circ, \therefore CA$ 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径;

(2) 连接 $CE, \because \angle CBE = 90^\circ,$

$\therefore$ 过 $B$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $C$ 四点的圆的直径为 $CE$ , 由 $DB=BE$ , 得 $CE=DC$ ,

又 $BC^2 = DB \cdot BA = 2DB^2,$

$\therefore CA^2 = 4DB^2 + BC^2 = 6DB^2.$

而 $DC^2 = DB \cdot DA = 3DB^2,$

故过 $B$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $C$ 四点的圆的面积与 $\triangle ABC$ 面积的外接圆的面积比值 $= \frac{CE^2}{AC^2} =$

$$\frac{3DB^2}{6DB^2} = \frac{1}{2}.$$

**【点评】** 熟练掌握弦切角定理、相似三角形的判定与性质、四点共圆的性质、直径的判定、切割线定理、勾股定理等腰三角形的性质是解题的关键.

23. 已知动点P、Q都在曲线C:  $\begin{cases} x=2\cos\beta \\ y=2\sin\beta \end{cases}$  ( $\beta$ 为参数)上, 对应参数分别为 $\beta=\alpha$ 与 $\beta=2\alpha$  ( $0<\alpha<2\pi$ ), M为PQ的中点.

(1) 求M的轨迹的参数方程;

(2) 将M到坐标原点的距离d表示为 $\alpha$ 的函数, 并判断M的轨迹是否过坐标原点.

**【考点】** QH: 参数方程化成普通方程.

**【专题】** 5S: 坐标系和参数方程.

**【分析】** (1) 利用参数方程与中点坐标公式即可得出;

(2) 利用两点之间的距离公式、三角函数的单调性即可得出.

**【解答】** 解: (1) 依题意有P ( $2\cos\alpha$ ,  $2\sin\alpha$ ), Q ( $2\cos2\alpha$ ,  $2\sin2\alpha$ ), 因此M ( $\cos\alpha+\cos2\alpha$ ,  $\sin\alpha+\sin2\alpha$ ).

M的轨迹的参数方程为  $\begin{cases} x=\cos\alpha+\cos2\alpha \\ y=\sin2\alpha+\sin\alpha \end{cases}$  ( $\alpha$ 为参数,  $0<\alpha<2\pi$ ).

(2) M点到坐标原点的距离  $d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2+2\cos\alpha}$  ( $0<\alpha<2\pi$ ).

当 $\alpha=\pi$ 时,  $d=0$ , 故M的轨迹过坐标原点.

**【点评】** 本题考查了参数方程与中点坐标公式、两点之间的距离公式、三角函数的单调性, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

24. (14分) **【选修4 - - 5; 不等式选讲】**

设a, b, c均为正数, 且 $a+b+c=1$ , 证明:

$$(I) \quad ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}$$

$$(II) \quad \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 1.$$

**【考点】** R6: 不等式的证明.

**【专题】** 14: 证明题; 16: 压轴题.

**【分析】** (I) 依题意, 由  $a+b+c=1 \Rightarrow (a+b+c)^2=1 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=1$ ,

利用基本不等式可得  $3(ab+bc+ca) \leq 1$ , 从而得证;

(II) 利用基本不等式可证得:  $\frac{a^2}{b}+b \geq 2a$ ,  $\frac{b^2}{c}+c \geq 2b$ ,  $\frac{c^2}{a}+a \geq 2c$ , 三式累加即可证得结论.

**【解答】** 证明: (I) 由  $a^2+b^2 \geq 2ab$ ,  $b^2+c^2 \geq 2bc$ ,  $c^2+a^2 \geq 2ca$  得:

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca,$$

由题设得  $(a+b+c)^2=1$ , 即  $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=1$ ,

所以  $3(ab+bc+ca) \leq 1$ , 即  $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}$ .

(II) 因为  $\frac{a^2}{b}+b \geq 2a$ ,  $\frac{b^2}{c}+c \geq 2b$ ,  $\frac{c^2}{a}+a \geq 2c$ ,

故  $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+(a+b+c) \geq 2(a+b+c)$ , 即  $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq a+b+c$ .

所以  $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq 1$ .

**【点评】** 本题考查不等式的证明, 突出考查基本不等式与综合法的应用, 考查推理论证能力, 属于中档题.