# 2015年高考山东省理科数学真题

一、选择题

1.已知集合 $A=\{x\mid x^2-4x+3<0\}$，$B=\{x\mid 2<x<4\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．（1，3）　　B．（1，4）　　C．（2，3）　　D．（2，4）

2.若复数 Z 满足 $\dfrac{\overline{Z}}{1-i}=i$，其中 i 为虚数为单位，则 Z=（　　）

A．1-i　　B．1+i　　C．-1-i　　D．-1+i

3.要得到函数 $y=\sin(4x-\dfrac{\pi}{3})$ 的图像，只需要将函数 y=sin4x 的图像（　　）

A．向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位　　B．向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位

C．向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位　　D．向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位

4.已知菱形 ABCD 的边长为 $a$，$\angle ABC=60°$，则 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=$（　　）

A．$-\dfrac{3}{2}a^2$　　B．$-\dfrac{3}{4}a^2$　　C．$\dfrac{3}{4}a^2$　　D．$\dfrac{3}{2}a^2$

5.不等式|x-1|-|x-5|<2 的解集是（　　）

A．$(-\infty,4)$　　B．$(-\infty,1)$　　C．（1，4）　　D．（1，5）

6.已知 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\ge 0\\ x+y\le 2\\ y\ge 0\end{cases}$，若 z=ax+y 的最大值为 4，则 a=（　　）

A．3　　B．2　　C．-2　　D．-3

7.在梯形 ABCD 中，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$，AD//BC，BC=2AD=2AB=2.将梯形 ABCD 绕 AD 所在的直线旋转一周而形成的曲面所围成的几何体的体积为（　　）

A．$\dfrac{2\pi}{3}$　　B．$\dfrac{4\pi}{3}$　　C．$\dfrac{5\pi}{3}$　　D．$2\pi$

8.已知某批零件的长度误差（单位：毫米）服从正态分布 N（0，3），从中随机取一件，其长度误差落在区间（3，6）内的概率为（　　）

（附：若随机变量 $\xi$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，

则 $P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)=68.26\%$，$P(\mu-2\sigma<\xi<\mu+2\sigma)=95.44\%$。）

A．4.56%　　B．12.59%　　C．27.18%　　D．31.74%

9.一条光线从点（-2，-3）射出，经 y 轴反射后与圆 $(x+3)^2+(y-2)^2=1$ 相切，则反射光线所在直线的斜率为（　　）

A．$-\frac{5}{3}$ 或 $-\frac{3}{5}$　　B．$-\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{2}{3}$　　C．$-\frac{5}{4}$ 或 $-\frac{4}{5}$　　D．$-\frac{4}{3}$ 或 $-\frac{3}{4}$

10.设函数 $f(x)=\begin{cases}3x-1, x<1\\ 2^x, x\geq 1\end{cases}$，则满足 $f(f(a))=2^{f(a)}$ 的 a 取值范围是（　　）

A．$[\frac{2}{3},1]$　　B．[0，1]　　C．$[\frac{2}{3},+\infty)$　　D．$[1,+\infty)$

二、填空题

11.观察下列各式：

$C_1^0=4^0$

$C_3^0+C_3^1=4^1$

$C_5^0+C_5^1+C_5^2=4^2$

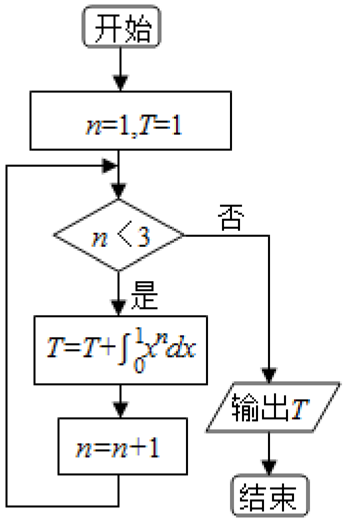
$C_7^0+C_7^1+C_7^2+C_7^3=4^3$

……

照此规律，当当 n∈N 时，$C^0_{2n-1}+C^1_{2n-1}+C^2_{2n-1}+\ldots+C^{n-1}_{2n-1}$ =______.

12.若“∀ x∈[0，$\frac{\pi}{4}$]，tanx≤m”是真命题，则实数 m 的最小值为________.

13.执行下面的程序框图，输出的 T 的值为__________.




14.已知函数 $f(x)=a^x+b(a>0,a\neq 1)$ 的定义域和值域都是 $[-1,0]$，则 $a+b=$________

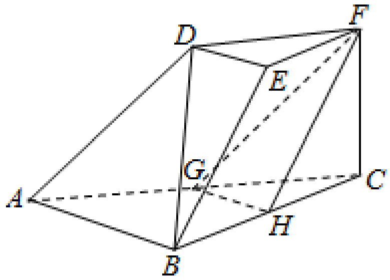
15.平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a>0,b>0）的渐近线与抛物线 $C_2$：$x^2=2py(p>0)$交于 O，若 $\Delta ABC$ 的垂心为 $C_2$ 的焦点，则 $C_1$ 的离心率为__________.

16.设 $f(x)=\sin x\cos x-\cos x^2(x+\frac{\pi}{4})$。

（I）求 f（x）的单调区间；

（II）在锐角 $\Delta ABC$ 中，角 A，B，C，的对边分别为 a，b，c，若 f（$\frac{A}{2}$）=0，a=1，求面 $\Delta ABC$ 积的最大值。

17.如图，在三棱台 DEF-ABC 中，AB=2DE，G，H 分别为 AC，BC 的中点。




（I）求证：BC//平面 FGH；

（II）若 CF⊥平面 ABC，AB⊥BC，CF=DE，∠BAC=45°，求平面 FGH 与平面 ACFD 所成的角（锐角）的大小。

18.设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为$S_n$。已知$2S_n=3^n+3$。

（I）求$\{a_n\}$的通项公式;

（II）若数列$\{b_n\}$满足$a_nb_n=\log_3{}^2$，求$\{b_n\}$的前 n 项和$T_n$。

19.若$n$是一个三位正整数，且$n$的个位数字大于十位数字，十位数字大于百位数字，则称$n$为“三位递增数”（如 137，359，567 等）.

在某次数学趣味活动中，每位参加者需从所有的“三位递增数”中随机抽取 1 个数，且只能抽取一次.得分规则如下：若抽取的“三位递增数”的三个数字之积不能被 5 整除，参加者得 0 分；若能被 5 整除，但不能被 10 整除，得-1 分；若能被 10 整除，得 1 分.

（I）写出所有个位数字是 5 的“三位递增数”;

（II）若甲参加活动，求甲得分$X$的分布列和数学期望$EX$.

20.平面直角坐标系$xoy$中，已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，左、右焦点分别是$F_1$、$F_2$。以$F_1$为圆心以 3 为半径的圆与以$F_2$为圆心 1 为半径的圆相交，且交点在椭圆$C$上。

（I）求椭圆 C 的方程;

（II）设椭圆$E:\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$为椭圆 C 上任意一点，过点 P 的直线$y=kx+m$交椭圆 E 于 A，B 两点，射线 PO 交椭圆 E 于点 Q.

（i）求$\frac{|OQ|}{|OP|}$的值;

（ii）求$\Delta ABQ$面积的最大值。

将 $y=kx+m$ 代入椭圆 C 的方程

21 设函数$f(x)=\ln(x+1)+a(x^2-x)$，其中$\alpha\in R$。

（I）讨论函数$f(x)$极值点的个数，并说明理由;

（II）若$\forall_x>0,f(x)\geq 0$成立，求$\alpha$的取值范围。

## 2015 年高考山东省理科数学真题答案

一、选择题

1.答案：C

解析过程：

$A=\{x|1<x<3\}$，$B=\{x|2<x<4\}$，

所以$A\cap B=\{x|2<x<3\}$，选 C

2.答案：A

解析过程：

因为 $\dfrac{\bar{z}}{1-i}=i$，所以，$\bar{z}=i(1-i)=1+i$

所以，$z=1-i$，选 A

3.答案：B

解析过程：

因为 $y=\sin(4x-\dfrac{\pi}{3})=\sin 4(x-\dfrac{\pi}{12})$，

所以，只需要将函数 $y=\sin 4x$ 的图象

向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位，选 B

4.答案：D

解析过程：

因为 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{BA}$

$=\left(\overrightarrow{BA}\right)^2+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=a^2+a^2\cos 60^{\circ}=\dfrac{3}{2}a^2$ ，选 D.

5.答案：A

解析过程：

原不等式可转化为以下三个不等式的并集：

（Ⅰ）$\begin{cases}x<1\\1-x+x-5<2\end{cases}$，解得 $\{x|x<1\}$

（Ⅱ）$\begin{cases}1\le x<5\\x-1+x-5<2\end{cases}$，解得 $\{x|1\le x<4\}$

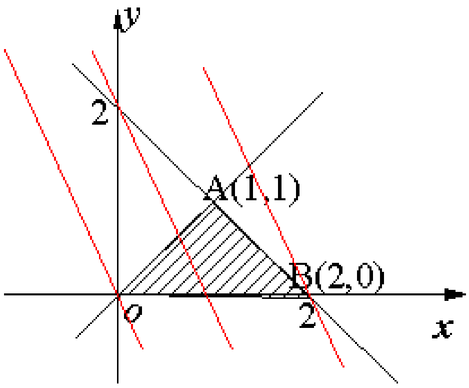
（Ⅲ）$\begin{cases}x\ge 5\\x-1-x+5<2\end{cases}$，解得 $\phi$

综上，原不等式的解集为 $\{x|x<4\}$，选 A

6.答案：B

解析过程：

作出可行域如图




若 $z=ax+y$ 的最大值为 4，则最优解可能为 $A(1,1)$ 或 $B(2,0)$

经检验 $A(1,1)$ 不是最优解，$B(2,0)$ 是最优解，此时 $a=2$

7.答案：C

解析过程：

直角梯形 ABCD 绕 AD 所在的直线旋转一周而形成的曲面

所围成的几何体是一个底面半径为 1，母线长为 2 的圆柱

挖去一个底面半径同样是 1、高为 1 的圆锥后得到的组合体，

所以该组合体的体积为：

$V=V_{圆柱}-V_{圆锥}=\pi\times1^2\times2-\frac{1}{3}\times\pi\times1^2\times1=\frac{5}{3}\pi$ ，选 C

8.答案：B

解析过程：

用表示 $\xi$ 零件的长度，根据正态分布的性质得：

$$P(3<\xi<6)=\frac{1}{2}\left[P(-6<\xi<6)-P(-3<\xi<3)\right]$$

$=\frac{0.9544-0.6826}{2}=0.1359$ ，选 B.

9.答案：D

解析过程：

由光的反射原理知，反射光线的反向延长线必过点 $(2,-3)$，

设反射光线所在直线的斜率为 $k$，则反射光线所在直线方程为：

$y+3=k(x-2)$，即 $kx-y-2k-3=0$

又因为光线与圆相切，$(x+3)^2+(y-2)^2=1$

所以，$\frac{|-3k-2-2k-3|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，整理得 $12k^2+25k+12=0$

解得：$k=-\frac{4}{3}$ 或 $k=-\frac{3}{4}$，选 D

10.答案：C

解析过程：

当 $a\ge 1$ 时，$f\left(a\right)=2^a>1$，

所以，$f(f(a))=2^{f(a)}$，即 $a>1$ 符合题意；

当 $a<1$ 时，$f(a)=3a-1$，若 $f(a)\ge 1$，

即 $3a-1\ge 1$，$a\ge\frac{2}{3}$，所以 $\frac{2}{3}\le a<1$ 符合题意；

综上，$a$ 的取值范围是 $[\frac{2}{3},+\infty)$，选 C

二、填空题

11.答案：$4^{n-1}$

解析过程：

由归纳推理得：$C_{2n-1}^0+C_{2n-1}^1+C_{2n-1}^2+\cdots+C_{2n-1}^{n-1}=4^{n-1}$

12.答案：1

解析过程：

$y=\tan x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，所以

$y=\tan x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值为 $\tan\frac{\pi}{4}=1$

由题意得，$m\ge 1$

13. 答案：$\frac{11}{6}$

解析过程：

初始条件 $n=1,T=1,n<3$ 成立 ；

运行第一次：$T=1+\int_0^1 xdx=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},n=2,n<3$ 成立；

运行第二次：$T=\frac{3}{2}+\int_0^1 x^2dx=\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6},n=3,n<3$ 不成立；

输出 $T$ 的值：$\frac{11}{6}$. 结束

14.答案：

$-\frac{3}{2}$

解析过程：

若 $a>1$，则 $f\left(x\right)$ 在 $\left[-1,0\right]$ 上为增函数

所以 $\begin{cases}a^{-1}+b=-1\\1+b=0\end{cases}$，此方程组无解；

若 $0<a<1$，则 $f\left(x\right)$ 在 $\left[-1,0\right]$ 上为减函数

所以 $\begin{cases}a^{-1}+b=0\\1+b=-1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=-2\end{cases}$，所以 $a+b=-\dfrac{3}{2}$

15.答案：$\dfrac{3}{2}$

解析过程：

设 $OA$ 所在的直线方程为 $y=\dfrac{b}{a}x$，

则 $OB$ 所在的直线方程为 $y=-\dfrac{b}{a}x$

解方程组 $\begin{cases}y=\dfrac{b}{a}x\\x^2=2py\end{cases}$ 得：$\begin{cases}x=\dfrac{2pb}{a}\\y=\dfrac{2pb^2}{a^2}\end{cases}$，

所以点 $A$ 的坐标为 $\left(\dfrac{2pb}{a},\dfrac{2pb^2}{a^2}\right)$

抛物线的焦点 $F$ 的坐标为: $\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$

因为 $F$ 是 $\Delta ABC$ 的垂心，所以 $k_{OB}\cdot k_{AF}=-1$

所以，$-\dfrac{b}{a}\left(\dfrac{\dfrac{2pb^2}{a^2}-\dfrac{p}{2}}{\dfrac{2pb}{a}}\right)=-1\Rightarrow\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{5}{4}$

所以，$e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=1+\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{9}{4}\Rightarrow e=\dfrac{3}{2}$

16.答案：

（I）单调递增区间是 $\left[-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right]\left(k\in z\right)$；单调递减区间是 $\left[\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\dfrac{3\pi}{4}+k\pi\right]\left(k\in z\right)$

（II） $\Delta ABC$ 面积的最大值为$\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$

解析过程：

（I）由题意知 $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{2}-\dfrac{1+\cos(2x+\frac{\pi}{2})}{2}$

$=\dfrac{\sin 2x}{2}-\dfrac{1-\sin 2x}{2}=\sin 2x-\dfrac{1}{2}$

由$-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$， $k\in z$，

可得$-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\le x\le\dfrac{\pi}{4}+k\pi$， $k\in z$，

由$\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x\le\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$， $k\in z$，

可得$\dfrac{\pi}{4}+k\pi\le x\le\dfrac{3\pi}{4}+k\pi$， $k\in z$，

所以，函数 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间是$\left[-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right]$（$k\in z$）

函数 $f\left(x\right)$ 的单调递减区间是$\left[\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\dfrac{3\pi}{4}+k\pi\right]$（$k\in z$）

（II）由 $f(\dfrac{A}{2})=\sin A-\dfrac{1}{2}=0$，得$\sin A=\dfrac{1}{2}$

由题意得 $A$ 为锐角，所以$\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

由余弦定理： $a^2=b^2+c^2-2b\cos A$

可得： $1+\sqrt{3}bc=b^2+c^2\ge 2bc$

即： $bc\le 2+\sqrt{3}$，当且仅当$b=c$时等号成立

因此$\dfrac{1}{2}bc\sin A\le\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$

所以$\Delta ABC$面积的最大值为$\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$

17.答案：

（I）详见解析；（II） $60^\circ$

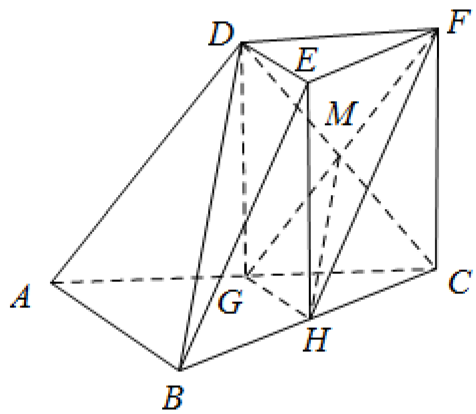
解析过程：

（I）证法一：连接 $DG,CD$. 设 $CD\cap GF=M$ ,连接 $MH$，

在三棱台 $DEF-ABC$ 中， $AB=2DE$，$G$ 分别为 $AC$ 的中点，可得 $DF//GC,DF=GC$，所以四边形 $DFCG$ 是平行四边形，

则 $M$ 为 $CD$ 的中点，又 $H$ 是 $BC$ 的中点，所以 $HM//BD$，

又 $HM\subset$ 平面 $FGH$， $BD\not\subset$ 平面 $FGH$，所以 $BD//$ 平面 $FGH$.




证法二：在三棱台 $DEF-ABC$ 中，

由 $BC=2EF,H$ 为 $BC$ 的中点，

可得 $BH//EF,BH=EF$，

所以 $HBEF$ 为平行四边形，可得 $BE//HF$.

在 $\Delta ABC$ 中，$G$，$H$ 分别为 $AC$，$BC$ 的中点，

所以 $GH//AB$, 又 $GH\cap HF=H$，

所以平面 $FGH//$ 平面 $ABED$，

因为 $BD\subset$ 平面 $ABED$，

所以 $BD//$ 平面 $FGH$.

（II）解法一：设 $AB=2$ ，则 $CF=1$

在三棱台 $DEF-ABC$ 中，

$G$ 为 $AC$ 的中点

由 $DF=\frac{1}{2}AC=GC$ ，

可得四边形 $DGCF$ 为平行四边形，

因此 $DG//CF$

又 $FC\perp$ 平面 $ABC$

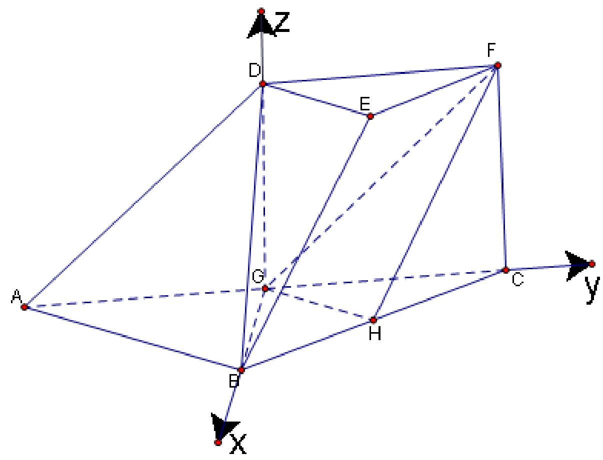
所以 $DG\perp$ 平面 $ABC$

在 $\Delta ABC$ 中，由 $AB\perp BC,\angle BAC=45^\circ$ ，$G$ 是 $AC$ 中点，

所以 $AB=BC,GB\perp GC$

因此 $GB,GC,GD$ 两两垂直,

以 $G$ 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $G-xyz$




所以 $G(0,0,0),B(\sqrt{2},0,0),C(0,\sqrt{2},0),D(0,0,1)$

可得 $H\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),F(0,\sqrt{2},1)$

故 $\overrightarrow{GH}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),\overrightarrow{GF}=(0,\sqrt{2},1)$

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 $FGH$ 的一个法向量，则

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{GH}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{GF}=0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x+y=0\\ \sqrt{2}y+z=0\end{cases}$

可得平面 $FGH$ 的一个法向量 $\vec{n}=(1,-1,\sqrt{2})$

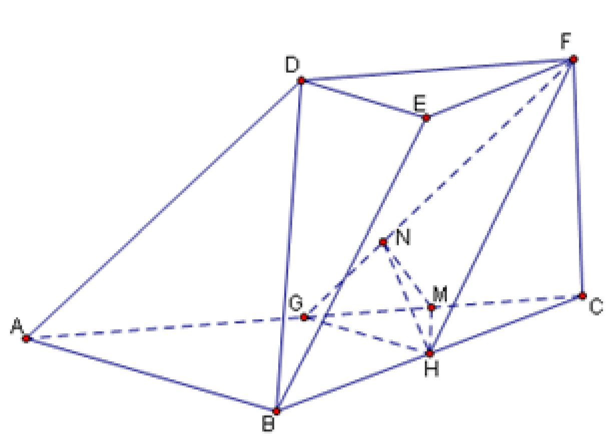
因为 $\overrightarrow{GB}$ 是平面 $ACFD$ 的一个法向量， $\overrightarrow{GB}=(\sqrt{2},0,0)$

所以 $\cos<\overrightarrow{GB},\vec{n}>=\frac{\overrightarrow{GB}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{GB}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

所以平面与平面所成的解(锐角)的大小为 $60^\circ$

解法二：

作 $HM\perp AC$ 于点 $M$ ，作 $MN\perp GF$ 于点 $N$ ，连接 $NH$




由 $FC\perp$ 平面 $ABC$ ，得 $HM\perp FC$

又 $FC\cap AC=C$

所以 $HM\perp$ 平面 $ACFD$

因此 $GF\perp NH$

所以 $\angle MNH$ 即为所求的角

在 $\Delta BGC$ 中, $MH//BG, MH=\frac{1}{2}BG=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

由 $\Delta GNM \backsim \Delta GCF$ 可得 $\frac{MN}{FC}=\frac{GM}{GF}$,

从而 $MN=\frac{\sqrt{6}}{6}$，由 $MH\perp$ 平面 $ACFD$， $MN\subset$ 平面 $ACFD$ 得

$MH\perp MN$，所以 $\tan\angle MNH=\frac{HM}{MN}=\sqrt{3}$，所以 $\angle MHN=60^0$

所以平面 $FGH$ 与平面 $ACFD$ 所成角（锐角）的大小为 $60^0$

18.答案:（I） $a_n=\begin{cases}3, & n=1,\\ 3^{n-1}, & n>1,\end{cases}$；（II） $T_n=\frac{13}{12}+\frac{6n+3}{4\times 3^n}$.

解析过程:

解:（I）因为 $2S_n=3^n+3$

所以， $2a_1=3+3$ ，故 $a_1=3,$

当 $n>1$ 时， $2S_{n-1}=3^{n-1}+3,$

此时， $2a_n=2S_n-2S_{n-1}=3^n-3^{n-1}$，即 $a_n=3^{n-1}$

所以， $a_n=\begin{cases}3 & n=1\\ 3^{n-1} & n\geq 2\end{cases}$

（II）因为 $a_nb_n=\log_3 a_n$， $b_1=\frac{1}{3}$

当 $n>1$ 时， $b_n=3^{1-n}\log_3 3^{n-1}=(n-1)\cdot 3^{1-n}$

所以 $T_1=b_1=\frac{1}{3}$，当 $n>1$ 时，

$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{3}+(1\times 3^{-1}+2\times 3^{-2}+\cdots+(n-1)3^{1-n})$

所以 $3T_n=1+(1\times 3^0+2\times 3^1+\cdots+(n-1)3^{2-n})$

两式相减得，

$2T_n=\frac{2}{3}+(3^0+3^1+3^{2-n})-(n-1)\cdot 3^{1-n}$

$=\frac{2}{3}+\frac{1-3^{1-n}}{1-3^{-1}}-(n-1)\cdot 3^{1-n}=\frac{13}{6}-\frac{6n+3}{2\times 3^n}$

所以，$T_n=\frac{13}{12}+\frac{6n+3}{4\times 3^n}$，经检验，$n=1$时也适合，

综上，$T_n=\frac{13}{12}+\frac{6n+3}{4\times 3^n}$

19.答案：（I）有：125，135，145，235，245，345；

（II）X 的分布列为

| X | 0 | -1 | 1 |
|---|---|---|---|
| P | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{14}$ | $\frac{11}{42}$ |

$EX=\frac{4}{21}$

解析过程：

（I）个位数是 5 的“三位递增数”有：$125,135,145,235,245,345$；

（II）由题意知，全部“三位递增数”的个数为$C_9^3=84$

随机变量 $X$ 的取值为：$0,-1,1$，因此

$P(X=0)=\frac{C_8^3}{C_9^3}=\frac{2}{3}$；$P(X=-1)=\frac{C_4^2}{C_9^3}=\frac{1}{14}$；

$P(X=1)=1-\frac{1}{14}-\frac{2}{3}=\frac{11}{42}$

所以 $X$ 的分布列为

| X | 0 | -1 | 1 |
|---|---|---|---|
| P | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{14}$ | $\frac{11}{42}$ |

因此 $EX=0\times\frac{2}{3}+(-1)\times\frac{1}{14}+1\times\frac{11}{42}=\frac{4}{21}$

20.答案：（I）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；（II）( i )2;（ii）$6\sqrt{3}$ .

解析过程：

（I）由题意知$2a=4$，则$a=2$，

又$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$a^2-c^2=b^2$，可得$b=1$，

所以椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

（II）由（I）知椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

（i）设 $P\left(x_0,y_0\right)$，$\frac{|OQ|}{|OP|}=\lambda$ ，由题意知 $Q\left(-\lambda x_0,-\lambda y_0\right)$

因为 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$ 又 $\frac{\left(-\lambda x_0\right)^2}{16}+\frac{\left(-\lambda y_0\right)^2}{4}=1$ ，

即 $\frac{\lambda^2}{4}\left(\frac{x_0^2}{4}+y_0^2\right)=1$，所以 $\lambda=2$ ，即 $\frac{|OQ|}{|OP|}=2$

（ii）设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$

将 $y=kx+m$ 代入椭圆 E 的方程，

可得 $\left(1+4k^2\right)x^2+8kmx+4m^2-16=0$

由 $\Delta>0$ ，可得 $m^2<4+16k^2$ ……①

则有 $x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2},x_1x_2=\frac{4m^2-16}{1+4k^2}$

所以 $\left|x_1-x_2\right|=\frac{4\sqrt{16k^2+4-m^2}}{1+4k^2}$

因为直线 $y=kx+m$ 与轴交点的坐标为 $\left(0,m\right)$

所以 $\Delta OAB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|m|\cdot\left|x_2-x_2\right|=\frac{2\sqrt{16k^2+4-m^2}\,|m|}{1+4k^2}$

$$=\frac{2\sqrt{(16k^2+4-m^2)\cdot m^2}}{1+4k^2}=2\sqrt{\left(4-\frac{m^2}{1+4k^2}\right)\cdot\frac{m^2}{1+4k^2}}$$

令 $\frac{m^2}{1+4k^2}=t$

将 $y=kx+m$ 代入椭圆 C 的方程

可得 $\left(1+4k^2\right)x^2+8kmx+4m^2-4=0$

由 $\Delta\geq 0$ ，可得 $m^2\leq 1+4k^2$ ……②

由①②可知 $0<t\leq 1$

因此 $S=2\sqrt{(4-t)t}=2\sqrt{-t^2+4t}$

故 $S\le 2\sqrt{3}$

当且仅当 $t=1$ ，即 $m^2=1+4k^2$ 时取得最大值 $2\sqrt{3}$

由（i）知，$\Delta ABQ$ 面积为 $3S$

所以 $\Delta ABQ$ 面积的最大值为 $6\sqrt{3}$

21.答案：（I）当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上有唯一极值点；

当 $0\le a\le \frac{8}{9}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上无极值点；

当 $a>\frac{8}{9}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上有两个极值点；

（II）$a$ 的取值范围是 $[0,1]$.

解析过程：

函数 $f(x)=\ln(x+1)+a(x^2-x)$ 定义域为 $(-1,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}+2ax-a=\frac{2ax^2+ax+1-a}{x+1}$$

令 $g(x)=2ax^2+ax+1-a$

（1）当 $a=0$ 时，$g(x)=1>0$ ，$f'(x)>0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立

所以，函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增无极值；

（2）当 $a>0$ 时，$g(x)=2ax^2+ax+1-a=2a\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+1-\frac{9a}{8}$

若 $1-\frac{9a}{8}\ge 0$，即：$0<a\le\frac{8}{9}$ ，则 $g(x)\ge 0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立，

从而 $f'(x)\ge 0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立，函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增无极值；

若 $1-\frac{9a}{8}<0$，即：$a>\frac{8}{9}$ ，由于 $g(-1)=1>0, g(1)=2a+1>0$

则 $g(x)$ 在在 $(-1,+\infty)$ 上有两个零点，从而函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上有两个极值点 $x_1,x_2$ 且 $x_1<-\frac{1}{4}<x_2$；

（3）当 $a<0$ 时，$g(x)$ 在 $\left(-1,-\frac{1}{4}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$ 上单调递减，

且$g\left(-1\right)=1>0, g\left(-\frac{1}{4}\right)=1-\frac{9a}{8}>0$，

所以，$g\left(x\right)$ 在在$\left(-1,+\infty\right)$上有唯一零点，

从而函数$f\left(x\right)$在$\left(-1,+\infty\right)$上有唯一极值点.

综上：

当 $a<0$ 时，函数$f\left(x\right)$在$\left(-1,+\infty\right)$上有唯一极值点；

当$0\le a\le\frac{8}{9}$时，函数$f\left(x\right)$在$\left(-1,+\infty\right)$上无极值点；

当 $a>\frac{8}{9}$时，函数$f\left(x\right)$在$\left(-1,+\infty\right)$上有两个极值点；

（II）由（I）知，

（1）当$0\le a\le\frac{8}{9}$时，函数$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，

因为$f\left(0\right)=0$，所以，$x\in\left(0,+\infty\right)$时，$f\left(x\right)>0$，符合题意；

（2）当$\frac{8}{9}<a\le 1$时，由$g\left(0\right)\ge 0$，得$x_2\le 0$

所以，函数$f\left(x\right)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

又$f\left(0\right)=0$，所以，$x\in\left(0,+\infty\right)$时，$f\left(x\right)>0$，符合题意；

（3）当$a>1$时，由$g\left(0\right)<0$，可得$x_2>0$

所以$x\in(0,x_2)$时，函数$f\left(x\right)$单调递减；

又$f(0)=0$，所以，当$x\in(0,x_2)$时，函数$f(x)<0$不符合题意；

（4）当$a<0$时，设$h(x)=x-\ln(x+1)$

因为$x\in(0,+\infty)$时，$h'\left(x\right)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}>0$

所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

因此当$x\in(0,+\infty)$时，$h(x)>h(0)>0$

即：$\ln(x+1)<x$

可得：$f(x)<x+a(x^2-x)=ax^2+(1-a)x$

当$x>1-\dfrac{1}{a}$时，$ax^2+(1-a)x<0$

此时，$f(x)<0$，不合题意

综上所述，$a$的取值范围是$\left[0,1\right]$