2006年山东高考文科数学真题及答案

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

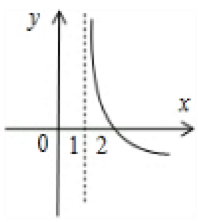
1．（5分）定义集合运算：$A\odot B=\{z\,|\,z=xy(x+y)$，$x\in A$，$y\in B\}$，设集合$A=\{0$，$1\}$，$B=\{2$，$3\}$，则集合$A\odot B$的所有元素之和为(　　)

A．0　　B．6　　C．12　　D．18

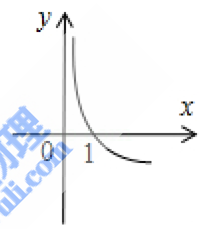
2．（5分）设$f(x)=\begin{cases}2e^{x-1},x<2\\ \log_3(x^2-1),x\ldots 2\end{cases}$，则$f(f$（2））的值为(　　)

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

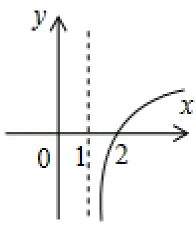
3．（5分）函数$y=1+a^x(0<a<1)$的反函数的图象大致是(　　)



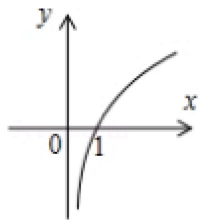
A．



B．



C．



D．

4．（5分）设向量$\vec{a}=(1,-3)$，$\vec{b}=(-2,4)$，若表示向量$4\vec{a}$，$3\vec{b}-2\vec{a}$，$\vec{c}$的有向线段首尾相接能构成三角形，则向量$\vec{c}$为(　　)

A．$(1,-1)$　　B．$(-1,1)$　　C．$(-4,6)$　　D．$(4,-6)$

5．（5分）已知定义在R上的奇函数$f(x)$满足$f(x+2)=-f(x)$，则f（6）的值为(　　)

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

6．（5分）在ΔABC中，角A、B、C的对边分别为a、b、c，已知$A=\dfrac{\pi}{3}$，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，则$c=($　　$)$

A．1　　B．2　　C．$\sqrt{3}-1$　　D．$\sqrt{3}$

7.（5 分）在给定椭圆中，过焦点且垂直于长轴的弦长为$\sqrt{2}$，焦点到相应准线的距离为 1，则该椭圆的离心率为(　　)

A．$\sqrt{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

8.（5 分）正方体的内切球与其外接球的体积之比为(　　)

A．$1:\sqrt{3}$　　B．$1:3$　　C．$1:3\sqrt{3}$　　D．$1:9$

9.（5 分）设$p:x^2-x-20>0$，$q:\dfrac{1-x^2}{|x|-2}<0$，则p是q的(　　)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

10.（5 分）已知$(x^2-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^n$的展开式中第三项与第五项的系数之比为$\dfrac{3}{14}$，则展开式中常数项是(　　)

A．-1　　B．1　　C．-45　　D．45

11.（5 分）已知集合$A=\{5\}$，$B=\{1，2\}$，$C=\{1，3，4\}$，从这三个集合中各取一个元素构成空间直角坐标系中点的坐标，则确定的不同点的个数为(　　)

A．33　　B．34　　C．35　　D．36

12.（5 分）已知x和y是正整数，且满足约束条件$\begin{cases}x+y\leqslant 10\\x-y\leqslant 2\\2x\geqslant 7.\end{cases}$则$z=2x+3y$的最小值是(　　)

A．24　　B．14　　C．13　　D．11.5

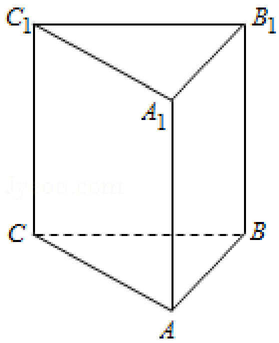
二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13.（4 分）某学校共有师生 3200 人，先用分层抽样的方法，从所有师生中抽取一个容量为 160 的样本．已知从学生中抽取的人数为 150，那么该学校的教师人数是______．

14.（4 分）设S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_5=10$，$S_{10}=-5$，则公差为______（用数字作答）．

15.（4 分）已知抛物线$y^2=4x$，过点$P(4,0)$的直线与抛物线相交于$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$两点，则$y_1^2+y_2^2$的最小值是______．

16.（4 分）如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，所有棱长均为 1，则点 B_1 到平面 ABC_1 的距



离为_____.

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17.（12 分）设函数 $f(x)=2x^3-3(a-1)x^2+1$，其中 $a\ldots 1$．

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）讨论 $f(x)$ 的极值.

18.（12 分）已知函数 $f(x)=A\sin^2(\omega x+\varphi)(A>0$，$\omega>0$，$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$，且 $y=f(x)$ 的最大值为 2，其图象相邻两对称轴间的距离为 2，并过点 $(1,2)$．

（Ⅰ）求 φ；

（Ⅱ）计算 f（1）$+f$（2）$+\ldots+f(2008)$．

19.（12 分）盒中装着标有数字 1，2，3，4 的卡片各 2 张，从盒中任意任取 3 张，每张卡片被抽出的可能性都相等，求：

（Ⅰ）抽出的 3 张卡片上最大的数字是 4 的概率；

（Ⅱ）抽出的 3 张中有 2 张卡片上的数字是 3 的概率；

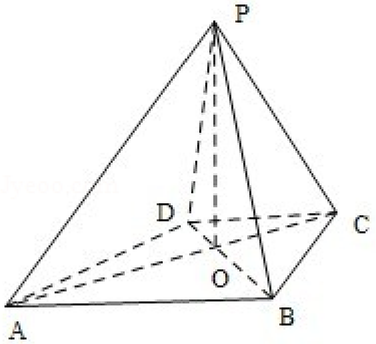
(Ⅲ）抽出的 3 张卡片上的数字互不相同的概率.

20.（12 分）如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为等腰梯形，$AB//DC$，$AC\perp BD$，AC 与 BD 相交于点 O，且顶点 P 在底面上的射影恰为 O 点，又 $BO=2$，$PO=\sqrt{2}$，$PB\perp PD$．

（1）求异面直接 PD 与 BC 所成角的余弦值；

（2）求二面角 $P-AB-C$ 的大小；

（3）设点 M 在棱 PC 上，且 $\dfrac{PM}{PC}=\lambda$，问 λ 为何值时，$PC\perp$ 平面 BMD．



21．（12 分）已知椭圆的中心在坐标原点 O，焦点在 x 轴上，椭圆的短轴端点和焦点所组成的四边形为正方形，两准线间的距离为 1．

（Ⅰ）求椭圆的方程；

（Ⅱ）直线 l 过点 $P(0,2)$ 且与椭圆相交于 A、B 两点，当 ΔAOB 面积取得最大值时，求直线 l 的方程．

22．（14 分）已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\dfrac{1}{2}$，点 $(n,2a_{n+1}-a_n)$ 在直线 $y=x$ 上，其中 $n=1$，2，3….

（Ⅰ）令 $b_n=a_{n+1}-a_n-1$，求证数列 $\{b_n\}$ 是等比数列；

（Ⅱ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项；

（Ⅲ）设 S_n、T_n 分别为数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的前 n 项和，是否存在实数 λ，使得数列 $\left\{\dfrac{S_n+\lambda T_n}{n}\right\}$ 为等差数列？若存在，试求出 λ．若不存在，则说明理由．

2006 年山东高考文科数学真题参考答案

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1．（5 分）定义集合运算：$A\odot B=\{z\,|\,z=xy(x+y)$，$x\in A$，$y\in B\}$，设集合 $A=\{0$，$1\}$，$B=\{2$，$3\}$，则集合 $A\odot B$ 的所有元素之和为(　　)

A．0　　B．6　　C．12　　D．18

【解答】解：当 $x=0$ 时，$z=0$，

当 $x=1$，$y=2$ 时，$z=6$，

当 $x=1$，$y=3$ 时，$z=12$，

故所有元素之和为 18，

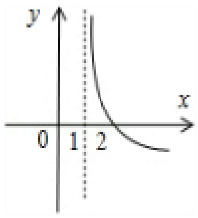
故选：D .

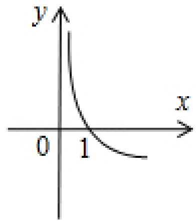
2．（5 分）设 $f(x)=\begin{cases}2e^{x-1},x<2\\ \log_3(x^2-1),x\geq 2\end{cases}$，则 $f(f$ （2））的值为（　　）

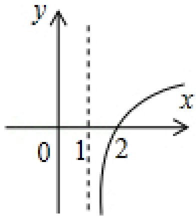
A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3

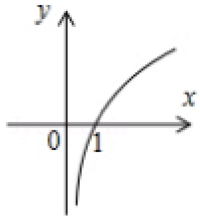
【解答】解：$f(f$ （2））$=f(\log_3(2^2-1))=f$ （1）$=2e^{1-1}=2$，故选 C .

3．（5 分）函数 $y=1+a^x(0<a<1)$ 的反函数的图象大致是（　　）

A．

B．

C．

D．

【解答】解：函数 $y=1+a^x(0<a<1)$ 的反函数为 $y=\log_a(x-1)$，

它的图象是函数 $y=\log_a x$ 向右移动 1 个单位得到，

故选：A .

4．（5 分）设向量 $\vec{a}=(1,-3)$，$\vec{b}=(-2,4)$，若表示向量 $4\vec{a}$，$3\vec{b}-2\vec{a}$，$\vec{c}$ 的有向线段首尾相接能构成三角形，则向量 $\vec{c}$ 为（　　）

A．$(1,-1)$　　　　B．$(-1,1)$　　　　C．$(-4,6)$　　　　D．$(4,-6)$

【解答】解：$4a=(4,-12)$，$3b-2a=(-8,18)$，

设向量 $c=(x,y)$，

依题意，得 $4a+(3b-2a)+c=0$，

所以 $4-8+x=0$，$-12+18+y=0$，

解得 $x=4$，$y=-6$，

故选：D．

5．（5 分）已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$，则 f （6）的值为( )

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

【解答】解：因为 $f(x+2)=-f(x)$，

所以 f （6）$=-f$ （4）$=f$ （2）$=-f(0)$，

又 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，

所以 $f(0)=0$，

所以 f （6）$=0$，

故选：B．

6．（5 分）在 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $A=\dfrac{\pi}{3}$，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，则 $c=($)

A．1　　B．2　　C．$\sqrt{3}-1$　　D．$\sqrt{3}$

【解答】解：解法一：（余弦定理）由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得：

$3=1+c^2-2c\times1\times\cos\dfrac{\pi}{3}=1+c^2-c$，$\therefore c^2-c-2=0$，$\therefore c=2$ 或 -1（舍）．

解法二：（正弦定理）由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得：$\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{\sin B}$，

$\therefore \sin B=\dfrac{1}{2}$，

$\because b<a$，$\therefore B=\dfrac{\pi}{6}$，从而 $C=\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore c^2=a^2+b^2=4$，$\therefore c=2$．

7．（5 分）在给定椭圆中，过焦点且垂直于长轴的弦长为 $\sqrt{2}$，焦点到相应准线的距离为 1，则该椭圆的离心率为( )

A．$\sqrt{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

【解答】解：不妨设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

则有 $\dfrac{2b^2}{a}=\sqrt{2}$ 且 $\dfrac{a^2}{c}-c=1$，

据此求出 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

故选：B．

8．（5 分）正方体的内切球与其外接球的体积之比为 $($　　$)$

A．$1:\sqrt{3}$　　　B．$1:3$　　　C．$1:3\sqrt{3}$　　　D．$1:9$

【解答】解：设正方体的棱长为 a，则它的内切球的半径为 $\dfrac{1}{2}a$，它的外接球的半径为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，

故所求的比为 $1:3\sqrt{3}$，

选 C

9．（5 分）设 $p:x^{2}-x-20>0$，$q:\dfrac{1-x^{2}}{|x|-2}<0$，则 p 是 q 的 $($　　$)$

A．充分不必要条件　　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　D．既不充分也不必要条件

【解答】解：$p:x^{2}-x-20>0$，解得 $x>5$ 或 $x<-4$，

$q:\dfrac{1-x^{2}}{|x|-2}<0$，当 $x\geqslant 0$ 时可化为 $\dfrac{1-x^{2}}{x-2}<0$ 即 $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-2}>0$ 得 $0\leqslant x<1$ 或 $x>2$

故 $\dfrac{1-x^{2}}{|x|-2}<0$ 的解为：$x<-2$ 或 $-1<x<1$ 或 $x>2$，

故选：A．

10．（5 分）已知 $(x^{2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^{n}$ 的展开式中第三项与第五项的系数之比为 $\dfrac{3}{14}$，则展开式中常数项是 $($　　$)$

A．-1　　　B．1　　　C．-45　　　D．45

【解答】解：第三项的系数为 C_{n}^{2}，第五项的系数为 C_{n}^{4}，

由第三项与第五项的系数之比为 $\dfrac{3}{14}$ 可得 $n=10$

展开式的通项为为 $T_{r+1}=C_{10}^{r}(x^{2})^{10-r}(-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^{r}=(-1)^{r}C_{10}^{r}x^{\frac{40-5r}{2}}$，

令 $40-5r=0$，

解得 $r=8$，

故所求的常数项为$(-1)^{8}C_{10}^{8}=45$，

故选：D．

11．（5 分）已知集合$A=\{5\}$，$B=\{1，2\}$，$C=\{1，3，4\}$，从这三个集合中各取一个元素构成空间直角坐标系中点的坐标，则确定的不同点的个数为(　　)

A．33　　B．34　　C．35　　D．36

【解答】解：不考虑限定条件确定的不同点的个数为$C_{2}^{1}C_{3}^{1}A_{3}^{3}=36$，

但集合B、C中有相同元素 1，

由 5，1，1 三个数确定的不同点的个数只有三个，

故所求的个数为$36-3=33$个，

故选：A．

12．（5 分）已知x和y是正整数，且满足约束条件$\begin{cases}x+y\leqslant 10\\x-y\leqslant 2\\2x\geqslant 7\end{cases}$则$z=2x+3y$的最小值是(　　)

A．24　　B．14　　C．13　　D．11.5

【解答】解：画出满足约束条件$\begin{cases}x+y\leqslant 10\\x-y\leqslant 2\\2x\geqslant 7\end{cases}$对应的可行域：如图所示

易得B点坐标为$(6,4)$且当直线$z=2x+3y$

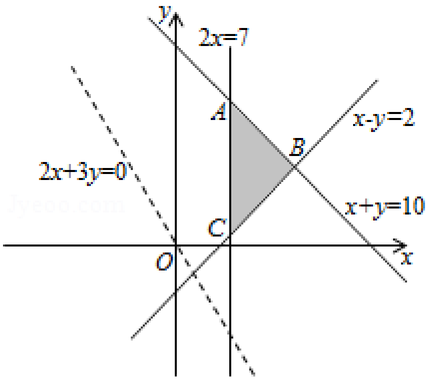
过点B时z取最大值，此时$z=24$，点

C的坐标为$(3.5,1.5)$，过点C时取得最小值，

但x，y都是整数，最接近的整数解为$(4,2)$，

故所求的最小值为 14，

故选：B．



二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13．（4 分）某学校共有师生 3200 人，先用分层抽样的方法，从所有师生中抽取一个容量为 160 的样本．已知从学生中抽取的人数为 150，那么该学校的教师人数是__200__．

【解答】解：$\because$ 学校共有师生 3200 人，从所有师生中抽取一个容量为 160 的样本，

$\therefore$ 每个个体被抽到的概率是 $\dfrac{160}{3200}=\dfrac{1}{20}$，

$\therefore \dfrac{10}{\text{总体中的教师数}}=\dfrac{1}{20}$，

$\therefore$ 学校的教师人数为 $10\times 20=200$．

故答案是：200．

14．（4 分）设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_5=10$，$S_{10}=-5$，则公差为__-1__（用数字作答）．

【解答】解：设首项为 a_1，公差为 d，由题得

$$\begin{cases}5a_1+10d=10\\10a_1+45d=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1+2d=2\\2a_1+9d=-1\end{cases}\Rightarrow 9d-4d=-1-4\Rightarrow d=-1$$

故答案为 -1

15．（4 分）已知抛物线 $y^2=4x$，过点 $P(4,0)$ 的直线与抛物线相交于 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 两点，则 $y_1^2+y_2^2$ 的最小值是__32__．

【解答】解：设直线方程为 $y=k(x-4)$，与抛物线方程联立消去 y 得

$k^2x^2-(8k^2+4)x+16k^2=0$

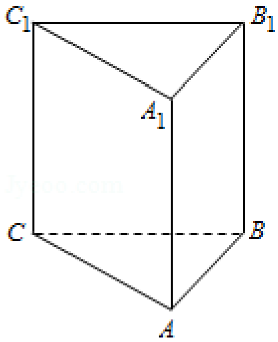
$\therefore x_1x_2=16$

显然 x_1，$x_2>0$，又 $y_1^2+y_2^2=4(x_1+x_2)\geqslant 8\sqrt{x_1x_2}=32$，

当且仅当 $x_1=x_2=4$ 时取等号，此时 k 不存在．

故答案为 32

16．（4 分）如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，所有棱长均为 1，则点 B_1 到平面 ABC_1 的距



离为＿$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$＿．

【解答】解：如图所示，取 AB 得中点 M，连接 CM，C_1M，过点 C 作 $CD\perp C_1M$，垂足为 D

$\because C_1A=C_1B$，M 为 AB 中点，

$\therefore C_1M\perp AB$

$\because CA=CB$，M 为 AB 中点，

$\therefore CM\perp AB$

又 $\because C_1M\bigcap CM=M$，

$\therefore AB\perp$ 平面 C_1CM

又 $\because AB\subset$ 平面 ABC_1，

$\therefore$ 平面 $ABC_1\perp$ 平面 C_1CM，平面 $ABC_1\cap$ 平面 $C_1CM=C_1M$，$CD\perp C_1M$，

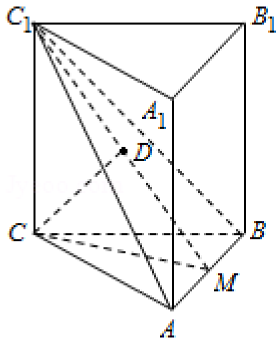
$\therefore CD\perp$ 平面 C_1AB，

$\therefore CD$ 的长度即为点 C 到平面 ABC_1 的距离，即点 B_1 到平面 ABC_1 的距离

在 $Rt\triangle C_1CM$ 中，$C_1C=1$，$CM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$C_1M=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

$\therefore CD=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，即点 B_1 到平面 ABC_1 的距离为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

故答案为：$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$



三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17．（12 分）设函数 $f(x)=2x^3-3(a-1)x^2+1$，其中 $a\geqslant 1$．

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）讨论 $f(x)$ 的极值．

【解答】解：由已知得 $f'(x)=6x[x-(a-1)]$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=a-1$．

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f'(x)=6x^2$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增

当 $a>1$ 时，$f'(x)=6x[x-(a-1)]$，$f'(x)$，$f(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,a-1)$	$a-1$	$(a-1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

从上表可知，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增；在 $(0,a-1)$ 上单调递减；在 $(a-1,+\infty)$ 上单调递增．

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，

当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 没有极值．

当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值 1，在 $x=a-1$ 处取得极小值 $1-(a-1)^3$．

18．（12 分）已知函数 $f(x)=A\sin^2(\omega x+\varphi)(A>0$，$\omega>0$，$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$，且 $y=f(x)$ 的最大值为 2，其图象相邻两对称轴间的距离为 2，并过点 $(1,2)$．

（Ⅰ）求 φ；

（Ⅱ）计算 f（1）$+f$（2）$+\ldots+f(2008)$．

【解答】解：（Ⅰ）$y=A\sin^2(\omega x+\varphi)=\frac{A}{2}-\frac{A}{2}\cos(2\omega x+2\varphi)$．

$\because y=f(x)$ 的最大值为 2，$A>0$．

$\therefore \frac{A}{2}+\frac{A}{2}=2, A=2$．

又$\because$其图象相邻两对称轴间的距离为 2，$\omega>0$，

$\therefore \frac{1}{2}(\frac{2\pi}{2\omega})=2, \omega=\frac{\pi}{4}$．

$\therefore f(x)=\frac{2}{2}-\frac{2}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x+2\varphi)=1-\cos(\frac{\pi}{2}x+2\varphi)$．

$\because y=f(x)$ 过 $(1,2)$ 点，$\therefore \cos(\frac{\pi}{2}x+2\varphi)=-1$．

$\therefore \frac{\pi}{2}x+2\varphi=2k\pi+\pi, k\in Z$，$\therefore 2\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$，

$\therefore \varphi=k\pi+\frac{\pi}{4}, k\in Z$，

又$\because 0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \varphi=\frac{\pi}{4}$．

（Ⅱ）解法一：$\because \varphi=\frac{\pi}{4}$，$f(x)=2sin^2(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{4})$

$\therefore f$（1）$+f$（2）$+f$（3）$+f$（4）$=2+1+0+1=4$．

又$\because y=f(x)$ 的周期为 4，$2008=4\times 502$，

$\therefore f$（1）$+f$（2）$+\ldots+f(2008)=4\times 502=2008$．

解法二：$\because f(x)=2\sin^2(\frac{\pi}{4}x+\varphi)$

$\therefore f(1)+f(3)=2\sin^2(\frac{\pi}{4}+\varphi)+2\sin^2(\frac{3\pi}{4}+\varphi)=2$，

$f(2)+f(4)=2\sin^2(\frac{\pi}{2}+\varphi)+2\sin^2(\pi+\varphi)=2$，

$\therefore f$（1）$+f$（2）$+f$（3）$+f$（4）$=4$．

又 $(\pm 2,0)$ 的周期为 4，$2008=4\times 502$，

$\therefore f$（1）$+f$（2）$+\ldots+f(2008)=4\times 502=2008$．

19．（12 分）盒中装着标有数字 1，2，3，4 的卡片各 2 张，从盒中任意任取 3 张，每张卡片被抽出的可能性都相等，求：

（Ⅰ）抽出的 3 张卡片上最大的数字是 4 的概率；

（Ⅱ）抽出的 3 张中有 2 张卡片上的数字是 3 的概率；

（Ⅲ）抽出的 3 张卡片上的数字互不相同的概率．

【解答】解：(I) 由题意知本题是一个古典概型，

设“抽出的 3 张卡片上最大的数字是 4”的事件记为 A，

$\because$ 试验发生包含的所有事件数 C_8^3，

满足条件的事件是抽出的 3 张卡片上最大的数字是 4，包括有一个 4 或有 2 个 4，

事件数是 $C_2^1C_6^2+C_2^2C_6^1$

$\therefore$ 由古典概型公式 $P(A)=\dfrac{C_2^1C_6^2+C_2^2C_6^1}{C_8^3}=\dfrac{9}{14}$．

(II) 由题意知本题是一个古典概型，

设“抽出的 3 张中有 2 张卡片上的数字是 3”的事件记为 B，

$\because$ 试验发生包含的所有事件数 C_8^3，

满足条件的事件是抽出的 3 张卡片上有 2 张卡片上的数字是 3，共有 $C_2^2C_6^1$ 种结果

$\therefore$ 由古典概型公式得到 $P(B)=\dfrac{C_2^2C_6^1}{C_8^3}=\dfrac{3}{28}$

(III) “抽出的 3 张卡片上的数字互不相同”的事件记为 C，

“抽出的 3 张卡片上有两个数字相同”的事件记为 D，

由题意，C 与 D 是对立事件，C_4^1 是选一卡片，取 2 张 C_2^2，另选取一张 C_6^1

$\therefore P(D)=\dfrac{C_4^1C_2^2C_6^1}{C_8^3}=\dfrac{3}{7}$

$\therefore P$（C）$=1-\dfrac{3}{7}=\dfrac{4}{7}$．

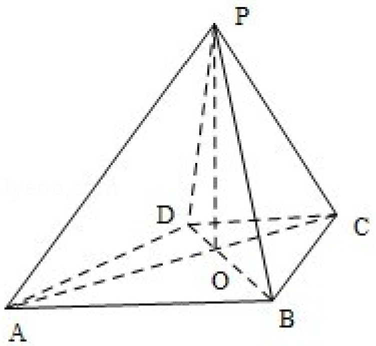
20．（12 分）如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为等腰梯形，$AB//DC$，$AC\perp BD$，AC 与 BD 相交于点 O，且顶点 P 在底面上的射影恰为 O 点，又 $BO=2$，$PO=\sqrt{2}$，

$PB \perp PD$.

（1）求异面直接 PD 与 BC 所成角的余弦值；

（2）求二面角 $P-AB-C$ 的大小；

（3）设点 M 在棱 PC 上，且 $\dfrac{PM}{PC}=\lambda$ ，问 λ 为何值时， $PC \perp$ 平面 BMD .



【解答】解：（1）$\because PO \perp$ 平面 $ABCD$ ， $\therefore PO \perp BD$

又 $PB \perp PD, BO=2, PO=\sqrt{2}$ ，

由平面几何知识得： $OD=1, PD=\sqrt{3}, PB=\sqrt{6}$

过 D 做 $DE//BC$ 交于 AB 于 E ，连接 PE ，则 $\angle PDE$ 或其补角为异面直线 PD 与 BC 所成的角，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，

$\therefore OC=OD=1$ ， $OB=OA=2$ ， $OA \perp OB$

$\therefore BC=\sqrt{5}, AB=2\sqrt{2}, CD=\sqrt{2}$

又 $AB//DC$

$\therefore$ 四边形 $EBCD$ 是平行四边形.

$\therefore ED=BC=\sqrt{5}, BE=CD=\sqrt{2}$

$\therefore E$ 是 AB 的中点，且 $AE=\sqrt{2}$

又 $PA=PB=\sqrt{6}$ ，

$\therefore \Delta PEA$ 为直角三角形，

$\therefore PE=\sqrt{PA^2-AE^2}=\sqrt{6-2}=2$

在 ΔPED 中，由余弦定理得 $\cos\angle PDE=\dfrac{PD^2+DE^2-PE^2}{2PD\bullet DE}=\dfrac{3+5-4}{2\bullet\sqrt{3}\bullet\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$

故异面直线 PD 与 BC 所成的角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{15}}{15}$；

（2）连接 OE，由（1）以及三垂线定理可知，$\angle PEO$ 为二面角 $P-AB-C$ 的平面角，

$\therefore \sin\angle PE0=\frac{PO}{PE}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore \angle PEO=45^\circ$，$\therefore$ 二面角 $P-AB-C$ 的平面角的大小为 45°；

（3）连接 MD，MB，MO，

$\because PC\perp$ 平面 BMD，$OM\subset$ 平面 BMD，

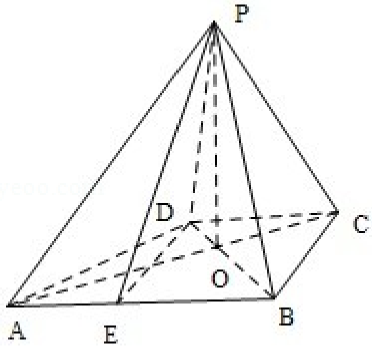
$\therefore PC\perp OM$，

在 RtΔPOC 中，$PC=PD=\sqrt{3}$，$OC=1$，$PO=\sqrt{2}$，

$\therefore PM=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$MC=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore \frac{PM}{MC}=2$，

故 $\lambda=2$ 时，$PC\perp$ 平面 BMD.



21．（12 分）已知椭圆的中心在坐标原点 O，焦点在 x 轴上，椭圆的短轴端点和焦点所组成的四边形为正方形，两准线间的距离为 1.

（Ⅰ）求椭圆的方程；

（Ⅱ）直线 l 过点 $P(0,2)$ 且与椭圆相交于 A、B 两点，当 ΔAOB 面积取得最大值时，求直线 l 的方程.

【解答】解：设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>c)$

（Ⅰ）由已知得 $\begin{cases} b=c \\ \frac{2a^2}{c}=1 \\ a^2-b^2=c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{\sqrt{2}}{4} \\ b=c=\frac{1}{4} \end{cases}$，

$\therefore$ 所求椭圆方程为 $8x^2+16y^2=1$.

（Ⅱ）由题意知直线l的斜率存在，设直线l的方程为$y=kx+2$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$

由$\begin{cases} y=kx+2 \\ 8x^2+16y^2=1 \end{cases}$，消去$y$得关于$x$的方程：$(1+2k^2)x^2+8kx+6=0$，

由直线l与椭圆相交于A、B两点，

$\therefore \triangle>0 \Rightarrow 64k^2-24(1+2k^2)>0$

解得$k^2>\dfrac{3}{2}$

又由韦达定理得$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{8k}{1+2k^2} \\ x_1 \bullet x_2=\dfrac{6}{1+2k^2} \end{cases}$

$\therefore |AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{1+2k^2}\sqrt{16k^2-24}$

原点O到直线l的距离$d=\dfrac{2}{\sqrt{1+k^2}}$

$\because S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}|AB| \bullet d=\dfrac{\sqrt{16k^2-24}}{1+2k^2}=\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{2k^2-3}}{1+2k^2}$.

对$S=\dfrac{\sqrt{16k^2-24}}{1+2k^2}$两边平方整理得：$4S^2k^4+4(S^2-4)k^2+S^2+24=0(*)$

$\because S\neq 0$，$\begin{cases} 16(S^2-4)^2-4\times 4S^2(S^2+24)\geqslant 0 \\ \dfrac{4-S^2}{S^2}>0 \\ \dfrac{S^2+24}{4S^2}>0 \end{cases}$

整理得：$S^2\leqslant \dfrac{1}{2}$

又$S>0$，$\therefore 0<S\leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

从而$S_{\Delta AOB}$的最大值为$S=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

此时代入方程$(*)$得$4k^4-28k^2+49=0 \therefore k=\pm\dfrac{\sqrt{254}}{2}$

所以，所求直线方程为：$\pm\sqrt{254}x-2y+4=0$．

22．（14 分）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=\dfrac{1}{2}$，点$(n,2a_{n+1}-a_n)$在直线$y=x$上，其中$n=1$，2，3….

（Ⅰ）令 $b_n=a_{n+1}-a_n-1$，求证数列 $\{b_n\}$ 是等比数列；

（Ⅱ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项；

（Ⅲ）设 S_n、T_n 分别为数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的前 n 项和，是否存在实数 λ，使得数列 $\left\{\dfrac{S_n+\lambda T_n}{n}\right\}$ 为等差数列？若存在，试求出 λ．若不存在，则说明理由．

【解答】解：（Ⅰ）由已知得 $a_1=\dfrac{1}{2},2a_{n+1}=a_n+n$，

$\because a_2=\dfrac{3}{4},a_2-a_1-1=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{3}{4}$，

又 $b_n=a_{n+1}-a_n-1$，$b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}-1$，

$\therefore \dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}-1}{a_{n+1}-a_n-1}=\dfrac{\dfrac{a_{n+1}+n+1}{2}-\dfrac{a_n+n}{2}-1}{a_{n+1}-a_n-1}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \{b_n\}$ 是以 $-\dfrac{3}{4}$ 为首项，以 $\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列．

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$b_n=-\dfrac{3}{4}\times(\dfrac{1}{2})^{n-1}=-\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{2^n}$，

$\therefore a_{n+1}-a_n-1=-\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{2^n}$，

$\therefore a_2-a_1-1=-\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{2}$，$a_3-a_2-1=-\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{2^2}$，

…

$\therefore a_n-a_{n-1}-1=-\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{2^{n-1}}$，

将以上各式相加得：

$\therefore a_n-a_1-(n-1)=-\dfrac{3}{2}(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^{n-1}})$，

$\therefore a_n=a_1+n-1-\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2^{n-1}})}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}+(n-1)-\dfrac{3}{2}(1-\dfrac{1}{2^{n-1}})=\dfrac{3}{2^n}+n-2$．

$\therefore a_n=\dfrac{3}{2^n}+n-2$．

（Ⅲ）存在 $\lambda=2$，使数列 $\{\dfrac{S_n+\lambda T_n}{n}\}$ 是等差数列．

由（Ⅰ）、（Ⅱ）知，$a_n+2b_n=n-2$

$\therefore S_n+2T=\dfrac{n(n+1)}{2}-2n\ \dfrac{S_n+\lambda T_n}{n}=\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}-2n-2T_n+\lambda T_n}{n}=\dfrac{n-3}{2}+\dfrac{\lambda-2}{n}T_n$

又

$$T_n=b_1+b_2+\ldots+b_n=\frac{-\frac{3}{4}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{2^n})=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2^{n+1}}\frac{S_n+\lambda T_n}{n}=\frac{n-3}{2}+\frac{\lambda-2}{n}(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2^{n+1}})$$

$\therefore$ 当且仅当 $\lambda=2$ 时，数列 $\{\frac{S_n+\lambda T_n}{n}\}$ 是等差数列.