绝密★启用前

2013年普通高等学校招生全国统一考试（辽宁卷）

数　学（供理科考生使用）

第 I 卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

（1）复数的 $Z=\dfrac{1}{i-1}$ 模为（　　）

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（C）$\sqrt{2}$　　（D）2

（2）已知集合 $A=\{x\,|\,0<\log_4 x<1\}, B=\{x\,|\,x\le 2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$(0,1)$　　B．$(0,2]$　　C．$(1,2)$　　D．$(1,2]$

（3）已知点 $A(1,3), B(4,-1)$，则与向量 $\overline{AB}$ 同方向的单位向量为（　　）

（A）$\left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$　　（B）$\left(\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$

（C）$\left(-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$　　（D）$\left(-\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$

（4）下面是关于公差 $d>0$ 的等差数列 (a_n) 的四个命题：

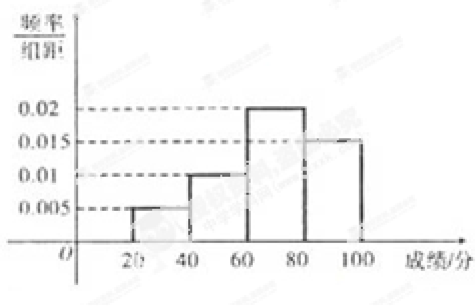
p_1：数列 $\{a_n\}$ 是递增数列；　　p_2：数列 $\{na_n\}$ 是递增数列；

p_3：数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 是递增数列；　　p_4：数列 $\{a_n+3nd\}$ 是递增数列；

其中的真命题为（　　）

（A）p_1, p_2　　（B）p_3, p_4　　（C）p_2, p_3　　（D）p_1, p_4

（5）某学校组织学生参加英语测试，成绩的频率分布直方图如图，



数据的分组一次为$[20,40),[40,60),[60,80),8[20,100)$.

若低于 60 分的人数是 15 人，则该班的学生人数是（　　）

（A）45　　（B）50

（C）55　　（D）60

（6）在ΔABC，内角A,B,C所对的边长分别为a,b,c. $a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\dfrac{1}{2}b,$

且$a>b$,则$\angle B=$（　　）

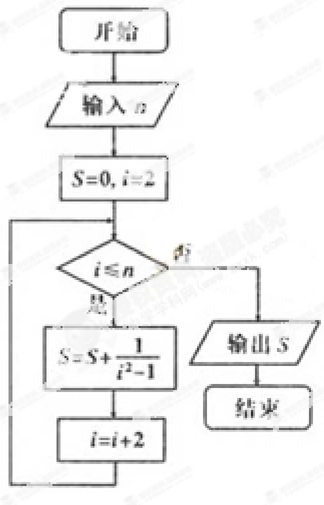
A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{5\pi}{6}$

（7）使得$\left(3x+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)^n$$(n\in N_+)$的展开式中含有常数项的最小的$n$为（　　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

（8）执行如图所示的程序框图，若输入$n=10$,则输出的$S=$（　　）

A. $\dfrac{5}{11}$　　B. $\dfrac{10}{11}$　　C. $\dfrac{36}{55}$　　D. $\dfrac{72}{55}$



（9）已知点$O(0,0),A(0,b),B(a,a^3)$.若ΔABC为直角三角形,则必有（　　）

A. $b=a^3$　　B. $b=a^3+\frac{1}{a}$

C. $\left(b-a^3\right)\left(b-a^3-\frac{1}{a}\right)=0$　　D. $\left|b-a^3\right|+\left|b-a^3-\frac{1}{a}\right|=0$

（10）已知三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的6个顶点都在球O的球面上.若$AB=3$，$AC=4$，$AB\perp AC$, $AA_1=12$，则球O的半径为（　　）

A. $\frac{3\sqrt{17}}{2}$　　B. $2\sqrt{10}$　　C. $\frac{13}{2}$　　D. $3\sqrt{10}$

（11）已知函数$f\left(x\right)=x^2-2\left(a+2\right)x+a^2, g\left(x\right)=-x^2+2\left(a-2\right)x-a^2+8$.设$H_1\left(x\right)=\max\left\{f\left(x\right),g\left(x\right)\right\}, H_2\left(x\right)=\min\left\{f\left(x\right),g\left(x\right)\right\}$,（$\max\left\{p,q\right\}$）表示$p,q$中的较大值，$\min\left\{p,q\right\}$表示$p,q$中的较小值，记$H_1\left(x\right)$得最小值为$A$, $H_2\left(x\right)$得最小值为B，则$A-B=$（　　）

（A）16　　（B）　-16

（C）　$a^2-2a-16$　　（D）$a^2+2a-16$

（11）设函数$f\left(x\right)$满足$x^2f'\left(x\right)+2xf\left(x\right)=\frac{e^x}{x}, f\left(2\right)=\frac{e^2}{8}$,则$x>0$,时，$f\left(x\right)$（　　）

（A）有极大值，无极小值　　（B）有极小值，无极大值

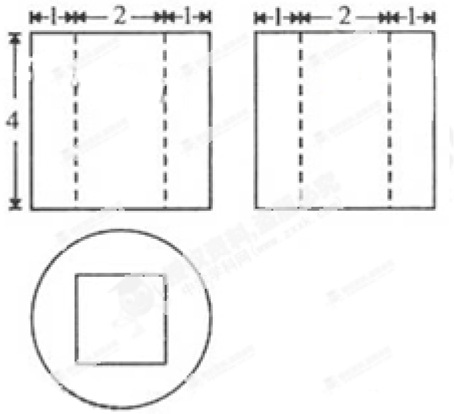
（C）既有极大值又有极小值　　（D）既无极大值也无极小值

第II卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第13题-第22题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22题-第24题为选考题，考生根据要求作答。

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分.

（13）某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积是____________.



（14）已知等比数列$\left\{a_n\right\}$是递增数列,S_n是$\left\{a_n\right\}$的前n项和. 若a_1，a_3是方程$x^2-5x+4=0$的两个根，则$S_6=$____________.

（15）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F,C$与过原点的直线相交于$A,B$两点，连接$AF,BF$.若$|AB|=10,|AF|=6,\cos\angle \mathrm{ABF}=\dfrac{4}{5}$,则$C$的离心率$e$=______.

（16）为了考察某校各班参加课外书法小组的人数，在全校随机抽取 5 个班级，把每个班级参加该小组的认为作为样本数据. 已知样本平均数为 7，样本方差为 4，且样本数据互相不相同，则样本数据中的最大值为____________.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 12 分）

设向量$a=\left(\sqrt{3}\sin x,\sin x\right),b=\left(\cos x,\mathrm{sinx}\right),x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

（I）若$|a|=|b|$.求x的值；

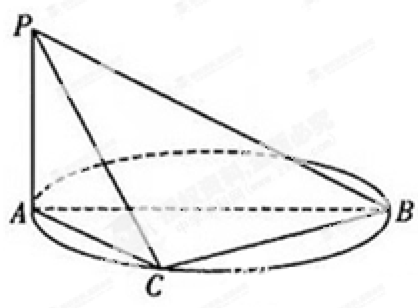
（II）设函数$f\left(x\right)=a\bullet b$,求$f\left(x\right)$的最大值.

18.（本小题满分 12 分）

如图，AB是圆的直径，PA垂直圆所在的平面，C是圆上的点.

（I）求证：平面$PAC\perp$平面PBC;

（II）若$AB=2$，$AC=1$，$PA=1$，求证：二面角$C-PB-A$的余弦值.



19.（本小题满分 12 分）

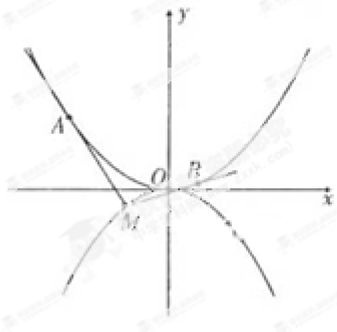
现有 10 道题，其中 6 道甲类题，4 道乙类题，张同学从中任取 3 道题解答.

（I）求张同学至少取到 1 道乙类题的概率；

（II）已知所取的 3 道题中有 2 道甲类题，1 道乙类题. 设张同学答对甲类题的概率都是 $\frac{3}{5}$，答对每道乙类题的概率都是 $\frac{4}{5}$，且各题答对与否相互独立. 用 X 表示张同学答对题的个数，求 X 的分布列和数学期望.

20.（本小题满分 12 分）

如图，抛物线 $C_1: x^2 = 4y, C_2: x^2 = -2py\left(p>0\right)$.点 $M\left(x_0, y_0\right)$ 在抛物线 C_2 上，过 M 作 C_1 的切线，切点为 A, B（M 为原点 O 时，A, B 重合于 O）.当 $x_0 = 1-\sqrt{2}$ 时，切线 MA 的斜率为-$\frac{1}{2}$.



（I） 求 P 的值；

（II） 当 M 在 C_2 上运动时，求线段 AB 中点 N 的轨迹方程（A, B 重合于 O 时,中点为 O）.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f\left(x\right) = \left(1+x\right)e^{-2x}, g\left(x\right) = ax + \frac{x^3}{2} + 1 + 2x\cos x$.当 $x \in \left[0,1\right]$ 时，

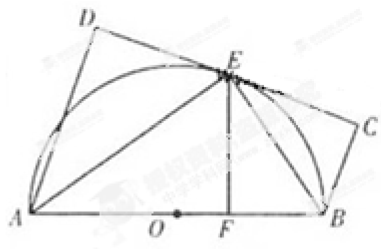
（I）求证：$1-x \le f\left(x\right) \le \frac{1}{1+x}$;

（II）若 $f\left(x\right) \ge g\left(x\right)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

请考生在第 22、23、24 三题中任选一题做答，如果多做，则按所做的第一题计分。作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应题号下方的方框涂黑。

22.（本小题满分 10 分）选修 4-1：几何证明选讲

如图，AB为$\odot O$直径，直线CD与$\odot O$相切于$E.AD$垂直于CD于D, BC垂直于CD于C，EF垂直于F，连接$AE, BE.$证明：



（I）$\angle FEB=\angle CEB;$

（II）$EF^2=AD \bullet BC.$

23.（本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xoy 中以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立坐标系. 圆 C_1，直线 C_2 的极坐标方程分别为 $\rho=4\sin\theta, \rho=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}..$

（I）求C_1与C_2交点的极坐标；

（II）设P为C_1的圆心，Q为C_1与C_2交点连线的中点.已知直线PQ的参数方程为

$\begin{cases} x=t^3+a \\ y=\dfrac{b}{2}t^3+1 \end{cases}\left(t\in R\text{为参数}\right)$，求$a, b$的值.

24.（本小题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f\left(x\right)=\left|x-a\right|$，其中$a>1$.

（I）当$a=2$时，求不等式$f\left(x\right)\geq 4=\left|x-4\right|$的解集;

（II）已知关于x的不等式$\left|f\left(2x+a\right)-2f\left(x\right)\right|\leq 2$的解集为$\left\{x\,|\,1\leq x\leq 2\right\}$，求$a$的值.