

2003 年湖南高考理科数学真题及答案

注意事项:

1. 答第 I 卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上.
2. 每小题选出答案后, 用铅笔把答题卡上对应答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案, 不能答在试题卷上.
3. 考试结束, 监考人将本试卷和答题卡一并收回.

参考公式:

三角函数的积化和差公式:

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

正棱台、圆台的侧面积公式

$$S_{\text{台侧}} = \frac{1}{2}(c' + c)l \quad \text{其中 } c', c \text{ 分别表示}$$

上、下底面周长, l 表示斜高或母线长.

球体的体积公式: $V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3$, 其中 R

表示球的半径.

本试卷分第 I 卷 (选择题) 和第 II 卷 (非选择题) 两部分.

第 I 卷 (选择题共 60 分)

一. 选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合要求的

1. 已知 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $\cos x = \frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x =$ ()

- (A) $\frac{7}{24}$ (B) $-\frac{7}{24}$ (C) $\frac{24}{7}$ (D) $-\frac{24}{7}$

2. 圆锥曲线 $\rho = \frac{8\sin\theta}{\cos^2\theta}$ 的准线方程是 ()

- (A) $\rho \cos\theta = -2$ (B) $\rho \cos\theta = 2$ (C) $\rho \sin\theta = 2$ (D) $\rho \sin\theta = -2$

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1 & x \leq 0 \\ \frac{1}{x^2} & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(x_0) > 1$, 则 x_0 的取值范围是 ()

- (A) $(-1, 1)$ (B) $(-1, +\infty)$
(C) $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

4. 函数 $y = 2\sin x(\sin x + \cos x)$ 的最大值为 ()
- (A) $1 + \sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2} - 1$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2
5. 已知圆 $C: (x-a)^2 + (y-2)^2 = 4$ ($a > 0$) 及直线 $l: x - y + 3 = 0$, 当直线 l 被 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$ 时, 则 a ()
- (A) $\sqrt{2}$ (B) $2 - \sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2} - 1$ (D) $\sqrt{2} + 1$
6. 已知圆锥的底面半径为 R , 高为 $3R$, 在它的所有内接圆柱中, 全面积的最大值是 ()
- (A) $2\pi R^2$ (B) $\frac{9}{4}\pi R^2$ (C) $\frac{8}{3}\pi R^2$ (D) $\frac{3}{2}\pi R^2$
7. 已知方程 $(x^2 - 2x + m)(x^2 - 2x + n) = 0$ 的四个根组成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列, 则 $|m - n| =$ ()
- (A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{8}$
8. 已知双曲线中心在原点且一个焦点为 $F(\sqrt{7}, 0)$, 直线 $y = x - 1$ 与其相交于 M, N 两点, MN 中点的横坐标为 $-\frac{2}{3}$, 则此双曲线的方程是 ()
- (A) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ (B) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ (C) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$ (D) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1$
9. 函数 $f(x) = \sin x$, $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 的反函数 $f^{-1}(x) =$ ()
- (A) $-\arcsin x$ $x \in [-1, 1]$ (B) $-\pi - \arcsin x$ $x \in [-1, 1]$
- (C) $\pi + \arcsin x$ $x \in [-1, 1]$ (D) $\pi - \arcsin x$ $x \in [-1, 1]$
10. 已知长方形的四个顶点 $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 1)$ 和 $D(0, 1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD 、 DA 和 AB 上的点 P_2 、 P_3 和 P_4 (入射角等于反射角), 设 P_4 的坐标为 $(x_4, 0)$, 若 $1 < x_4 < 2$, 则 $\text{tg}\theta$ 的取值范围是 ()
- (A) $(\frac{1}{3}, 1)$ (B) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (C) $(\frac{2}{5}, \frac{1}{2})$ (D) $(\frac{2}{5}, \frac{2}{3})$

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \dots + C_n^2}{n(C_2^1 + C_3^1 + C_4^1 + \dots + C_n^1)} =$ ()

- (A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) 6

12. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$ ，四个顶点在同一球面上，则此球的表面积为 ()

- (A) 3π (B) 4π (C) $3\sqrt{3}\pi$ (D) 6π

2003 年普通高等学校招生全国统一考试（全国卷）

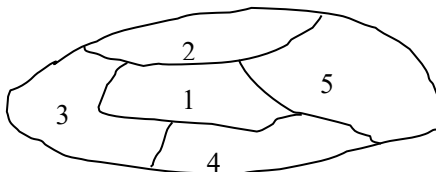
第 II 卷（非选择题共 90 分）

二. 填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分. 把答案填在题中横线上.

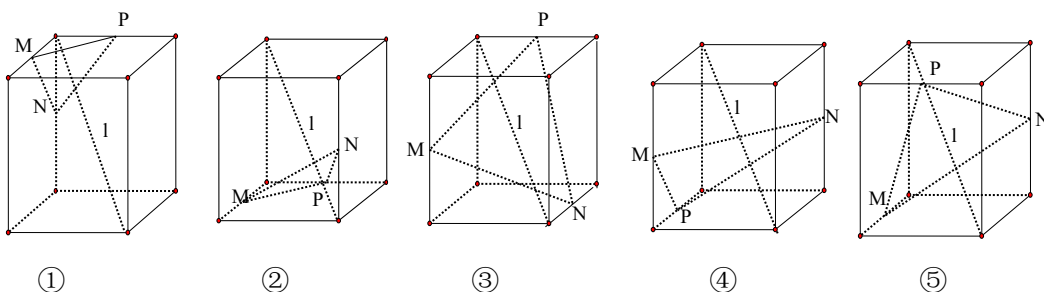
13. $(x^2 - \frac{1}{2x})^9$ 的展开式中 x^9 系数是_____

14. 使 $\log_2(-x) < x+1$ 成立的 x 的取值范围是_____

15. 如图，一个地区分为 5 个行政区域，现给地图着色，要求相邻地区不得使用同一颜色，现有 4 种颜色可供选择，则不同的着色方法共有种。（以数字作答）



16. 下列 5 个正方体图形中， l 是正方体的一条对角线，点 M、N、P 分别为其所在棱的中点，能得出 $l \perp$ 面 MNP 的图形的序号是（写出所有符合要求的图形序号）



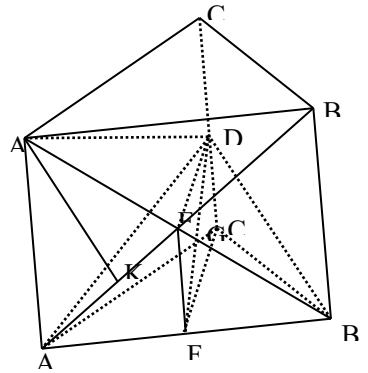
三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

17.（本小题满分 12 分）

已知复数 z 的辐角为 60° ，且 $|z-1|$ 是 $|z|$ 和 $|z-2|$ 的等比中项，求 $|z|$

18. (本小题满分 12 分)

如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 底面是等腰直角三角形, $\angle ACB = 90^\circ$, 侧棱 $AA_1 = 2$, D、E 分别是 CC_1 与 A_1B 的中点, 点 E 在平面 ABD 上的射影是 $\triangle ABD$ 的重心 G



(I) 求 A_1B 与平面 ABD 所成角的大小 (结果用反三角函数值表示)

(II) 求点 A_1 到平面 AED 的距离

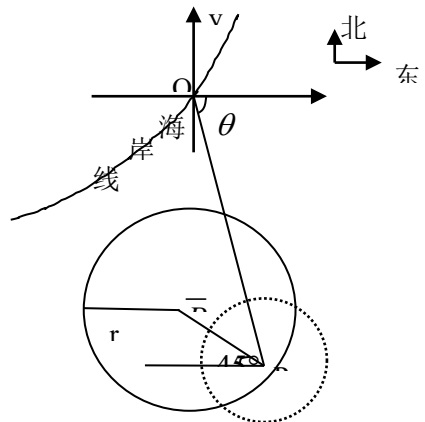
19. (本小题满分 12 分) 已知 $c > 0$, 设

P: 函数 $y = c^x$ 在 \mathbb{R} 上单调递减 Q: 不等式 $x + |x - 2c| > 1$ 的解集为 \mathbb{R}

如果 P 和 Q 有且仅有一个正确, 求 c 的取值范围

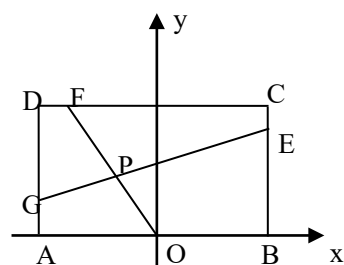
20. (本小题满分 12 分)

在某海滨城市附近海面有一台风, 据监测, 当前台风中心位于城市 O (如图) 的东偏南 θ ($\theta = \arccos \frac{\sqrt{2}}{10}$) 方向 300km 的海面 P 处, 并以 20km/h 的速度向西偏北 45° 方向移动, 台风侵袭的范围为圆形区域, 当前半径为 60km, 并以 10km/h 的速度不断增大, 问几小时后该城市开始受到台风的侵袭?



21. (本小题满分 14 分)

已知常数 $a > 0$, 在矩形 ABCD 中, $AB = 4$,



$BC = 4a$ ， O 为 AB 的中点，点 E 、 F 、 G 分别在 BC 、 CD 、 DA 上移动，且 $\frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CD} = \frac{DG}{DA}$ ， P 为 GE 与 OF 的交点（如图），问是否存在两个定点，使 P 到这两点的距离的和为定值？若存在，求出这两点的坐标及此定值；若不存在，请说明理由。

22.（本小题满分 12 分，附加题 4 分）

(I) 设 $\{a_n\}$ 是集合 $\{2^s + 2^t \mid 0 \leq s < t \text{ 且 } s, t \in \mathbb{Z}\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列，

即 $a_1 = 3$ ， $a_2 = 5$ ， $a_3 = 6$ ， $a_4 = 9$ ， $a_5 = 10$ ， $a_6 = 12$ ， \dots

将数列 $\{a_n\}$ 各项按照上小下大，左小右大的原则写成如下的三角形数表：

$$\begin{array}{cccc}
 & & & 3 \\
 & & 5 & 6 \\
 & 9 & 10 & 12 \\
 \hline
 & & & \dots\dots\dots
 \end{array}$$

(1) 写出这个三角形数表的第四行、第五行各数；

(2) 求 a_{100}

(II)（本小题为附加题，如果解答正确，加 4 分，但全卷总分不超过 150 分）

设 $\{b_n\}$ 是集合 $\{2^r + 2^s + 2^t \mid 0 \leq r < s < t, \text{ 且 } r, s, t \in \mathbb{Z}\}$ 中所有的数从小到大排列成的数

列，已知 $b_k = 1160$ ，求 k 。

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算。每小题 5 分，满分 60 分。

1. D 2. C 3. D 4. A 5. C 6. B 7. C 8. D 9. D 10. C 11. B 12. A

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算。每小题 4 分，满分 16 分。

13. $-\frac{21}{2}$ 14. $(-1, 0)$ 15. 72 16. ①④⑤

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. 解：设 $z = r \cos 60^\circ + r \sin 60^\circ i$ ，则复数 z 的实部为 $\frac{r}{2}$. $z - \bar{z} = r, z\bar{z} = r^2$ 由题设

$$|z-1|^2 = |z| \cdot |z-2| \text{ 即: } (z-1)(\bar{z}-1) = |z| \sqrt{(z-2)(\bar{z}-2)}, \therefore r^2 - r + 1 = r\sqrt{r^2 - 2r + 4},$$

整理得 $r^2 + 2r - 1 = 0$. 解得: $r = \sqrt{2} - 1, r = -\sqrt{2} - 1$ (舍去). 即 $|z| = \sqrt{2} - 1$.

18. (I) 解：连结 BG，则 BG 是 BE 在 ABD 的射影，即 $\angle EBG$ 是 A_1B 与平面 ABD 所成的角.

设 F 为 AB 中点，连结 EF、FC，

$\therefore D, E$ 分别是 CC_1, A_1B 的中点，又 $DC \perp$ 平面 ABC , $\therefore CDEF$ 为矩形

连结 DE, G 是 $\triangle ADB$ 的重心, $\therefore G \in DF$. 在直角三角形 EFD 中

$$EF^2 = FG \cdot FD = \frac{1}{3} FD^2, \therefore EF = 1, \therefore FD = \sqrt{3}. \dots\dots (4\text{分})$$

$$\text{于是 } ED = \sqrt{2}, EG = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\therefore FC = CD = \sqrt{2}, \therefore AB = 2\sqrt{2}, A_1B = 2\sqrt{3}, EB = \sqrt{3}.$$

$$\therefore \sin \angle EBG = \frac{EG}{EB} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$\therefore A_1B \text{ 与平面 } ABD \text{ 所成的角是 } \arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

(II) 解： $\because ED \perp AB, ED \perp EF, \text{ 又 } EF \cap AB = F,$

$\therefore ED \perp$ 面 A_1AB , 又 $ED \subset$ 面 AED . \therefore 平面 $AED \perp$ 平面 A_1AB , 且面 $AED \cap$ 面 $A_1AB = AE$.

作 $A_1K \perp AE$, 垂足为 K . $\therefore A_1K \perp$ 平面 AED , 即 A_1K 是 A_1 到平面 AED 的距离.

$$\text{在 } \triangle A_1AB_1 \text{ 中, } A_1K = \frac{A_1A \cdot A_1B_1}{AB_1} = \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}. \therefore A_1 \text{ 到平面 } AED \text{ 的距离为 } \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

19. 解：函数 $y = c^x$ 在 \mathbb{R} 上单调递减 $\Leftrightarrow 0 < c < 1$.

不等式 $x + |x - 2c| > 1$ 的解集为 $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ 函数 $y = x + |x - 2c|$ 在 \mathbb{R} 上恒大于 1.

$$\therefore x + |x - 2c| = \begin{cases} 2x - 2c, & x \geq 2c, \\ 2c, & x < 2c, \end{cases}$$

\therefore 函数 $y = x + |x - 2c|$ 在 R 上的最小值为 $2c$.

\therefore 不等式 $|x + x - 2c| > 1$ 的解集为 $R \Leftrightarrow 2c > 1 \Leftrightarrow c > \frac{1}{2}$.

如果 P 正确, 且 Q 不正确, 则 $0 < c \leq \frac{1}{2}$.

如果 P 不正确, 且 Q 正确, 则 $c \geq 1$. 所以 c 的取值范围为 $(0, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$.

(以上方法在新疆考区无一人使用, 大都是用解不等式的方法, 个别使用的图象法)

20. 解: 如图建立坐标系以 O 为原点, 正东方向为 x 轴正向.

$$\text{在时刻: (1) 台风中心 } P(\bar{x}, \bar{y}) \text{ 的坐标为 } \begin{cases} \bar{x} = 300 \times \frac{\sqrt{2}}{10} - 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} t, \\ \bar{y} = -300 \times \frac{7\sqrt{2}}{10} + 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} t. \end{cases}$$

此时台风侵袭的区域是 $(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 \leq [r(t)]^2$,

其中 $r(t) = 10t + 60$, 若在 t 时刻城市 O 受到台风的侵袭, 则有

$$(0 - \bar{x})^2 + (0 - \bar{y})^2 \leq (10t + 60)^2. \text{ 即 } (300 \times \frac{\sqrt{2}}{10} - 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} t)^2 + (-300 \times \frac{7\sqrt{2}}{10} + 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} t)^2$$

$$\leq (10t + 60)^2, \text{ 即 } t^2 - 36t + 288 \leq 0, \text{ 解得 } 12 \leq t \leq 24$$

答: 12 小时后该城市开始受到台风的侵袭.

21. 根据题设条件, 首先求出点 P 坐标满足的方程, 据此再判断是否存在的两定点, 使得点 P 到两点距离的和为定值.

按题意有 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 4a)$, $D(-2, 4a)$ 设

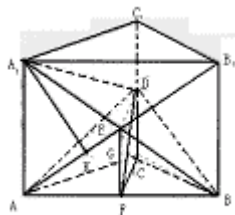
$$\frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CD} = \frac{DG}{DA} = k (0 \leq k \leq 1)$$

由此有 $E(2, 4ak)$, $F(2 - 4k, 4a)$, $G(-2, 4a - 4ak)$

直线 OF 的方程为: $2ax + (2k - 1)y = 0$ ①

直线 GE 的方程为: $-a(2k - 1)x + y - 2a = 0$ ②

从①, ②消去参数 k , 得点 $P(x, y)$ 坐标满足方程 $2a^2x^2 + y^2 - 2ay = 0$



整理得 $\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{(y-a)^2}{a^2} = 1$ 当 $a^2 = \frac{1}{2}$ 时, 点 P 的轨迹为圆弧, 所以不存在符合题意的两点.

当 $a^2 \neq \frac{1}{2}$ 时, 点 P 轨迹为椭圆的一部分, 点 P 到该椭圆焦点的距离的和为定长.

当 $a^2 < \frac{1}{2}$ 时, 点 P 到椭圆两个焦点 $(-\sqrt{\frac{1}{2}-a^2}, a), (\sqrt{\frac{1}{2}-a^2}, a)$ 的距离之和为定值 $\sqrt{2}$.

当 $a^2 > \frac{1}{2}$ 时, 点 P 到椭圆两个焦点 $(0, a - \sqrt{a^2 - \frac{1}{2}}), (0, a + \sqrt{a^2 - \frac{1}{2}})$ 的距离之和为定值

2a.

22. (本小题满分 12 分, 附加题 4 分)

(I) 解: 用 (t, s) 表示 $2^t + 2^s$, 下表的规律为

$$\begin{array}{cccc} & & & 3 \text{ (0, 1)} = 2^0 + 2^1 \\ & & & \\ & & 5 \text{ (0, 2)} & 6 \text{ (1, 2)} \\ 9 \text{ (0, 3)} & 10 \text{ (1, 3)} & & 12 \text{ (2, 3)} \\ \hline & & & \\ & & \dots\dots\dots & \end{array}$$

(i) 第四行 17(0, 4) 18(1, 4) 20(2, 4) 24(3, 4)
 第五行 33(0, 5) 34(1, 5) 36(2, 5) 40(3, 5) 48(4, 5)

(i i) 解法一: 因为 $100 = (1+2+3+4+\dots+13) + 9$, 所以 $a_{100} = (8, 14) = 2^8 + 2^{14} = 16640$

解法二: 设 $a_{100} = 2^{s_0} + 2^{t_0}$, 只须确定正整数 s_0, t_0 .

数列 $\{a_n\}$ 中小于 2^{t_0} 的项构成的子集为 $\{2^t + 2^s \mid 0 \leq s < t < t_0\}$,

其元素个数为 $C_{t_0}^2 = \frac{t_0(t_0-1)}{2}$, 依题意 $\frac{t_0(t_0-1)}{2} < 100$.

满足等式的最大整数 t_0 为 14, 所以取 $t_0 = 14$.

因为 $100 - C_{14}^2 = s_0 + 1$, 由此解得 $s_0 = 8, \therefore a_{100} = 2^{14} + 2^8 = 16640$.

(II) 解: $b_k = 1160 = 2^{10} + 2^7 + 2^3$,

令 $M = \{c \in B \mid C < 1160\}$ (其中, $B = \{2^r + 2^s + 2^t \mid 0 \leq r < s < t\}$)

$$\text{因 } M = \{c \in B \mid c < 2^{10}\} \cup \{c \in B \mid 2^{10} < c < 2^{10} + 2^7\} \cup \{c \in B \mid 2^{10} + 2^7 < c < 2^{10} + 2^7 + 2^3\}.$$

$$\text{现在求 } M \text{ 的元素个数: } \{c \in B \mid c < 2^{10}\} = \{2^r + 2^s + 2^t \mid 0 \leq r < s < t < 10\},$$

$$\text{其元素个数为 } C_{10}^3: \quad \{c \in B \mid 2^{10} < c < 2^{10} + 2^7\} = \{2^{10} + 2^s + 2^r \mid 0 \leq r < s < 7\}.$$

$$\text{某元素个数为 } C_7^2: \{c \in B \mid 2^{10} + 2^7 < c < 2^{10} + 2^7 + 2^3\} = \{2^{10} + 2^7 + 2^r \mid 0 \leq r < 3\}$$

$$\text{某元素个数为 } C_{10}^7: k = C_{10}^3 + C_7^2 + C_3^2 + 1 = 145.$$

另法: 规定 $2^r + 2^t + 2^s = (r, t, s)$, $b_k = 1160 = 2^{10} + 2^7 + 2^3 = (3, 7, 10)$

$$\text{则 } b_1 = 2^0 + 2^1 + 2^2 = (0, 1, 2) \quad C_2^2$$

$$\text{依次为 } (0, 1, 3) \quad (0, 2, 3) \quad (1, 2, 3) \quad C_3^2$$

$$(0, 1, 4) \quad (0, 2, 4) \quad (1, 2, 4) \quad (0, 3, 4) \quad (1, 3, 4) \quad (2, 3, 4) \quad C_4^2$$

.....

$$(0, 1, 9) \quad (0, 2, 9) \quad \dots \quad (6, 8, 9) \quad (7, 8, 9) \quad C_9^2$$

$$(0, 1, 10) \quad (0, 2, 10) \quad \dots \quad (0, 7, 10) \quad (1, 7, 10) \quad (2, 7, 10) \quad (3, 7, 10) \quad \dots \quad C_7^2 + 4$$

$$k = (C_2^2 + C_3^2 + \dots + C_9^2) + C_7^2 + 4 = 145.$$