

## 2012 年普通高等学校招生全国统一考试（湖南卷）

数学（理工农医类）

本试题卷包括选择题、填空题和解答题三部分，共 6 页，时量 120 分钟，满分 150 分。

**试卷总评：**总体来说 2012 湖南理科数学试题相对于 2010，2011 年有着很大的变化：试题难度变大，体现于解答题的难度相对于前两年有显著提高。着重体现在 19 题的内容更换为数列的充分必要性的证明，考数列解答题可能很多人都有预测到，但是靠充分必要性的证明可能预测到的少，另外函数应用问题较去年也有提高，着重了函数、不等式应用思想的考查应用。而相对而言今年的选择题、填空题的布局与前两年吻合，注重对考生基础知识，基本技能的考查。内容变换，将原有的三角解答题去掉，对立体集合问题不直接考查角度的计算，而考查几何体体积的计算。突出了重点内容的考查，如函数与导数，圆锥曲线等。

一选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的。

1. 设集合  $M = \{-1, 0, 1\}$ ， $N = \{x | x^2 \leq x\}$ ，则  $M \cap N = ( \quad )$

- A.  $\{0\}$       B.  $\{0, 1\}$       C.  $\{-1, 1\}$       D.  $\{-1, 0, 1\}$

**【答案】** B

**【解析】** 因  $N = \{x | x^2 \leq x\} = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$ ，故  $M \cap N = \{0, 1\}$ ，选 B。

**【考点定位】** 集合的运算

2. 命题“若  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ，则  $\tan \alpha = 1$ ”的逆否命题是 ( )

- A. 若  $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$ ，则  $\tan \alpha \neq 1$       B. 若  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ，则  $\tan \alpha \neq 1$

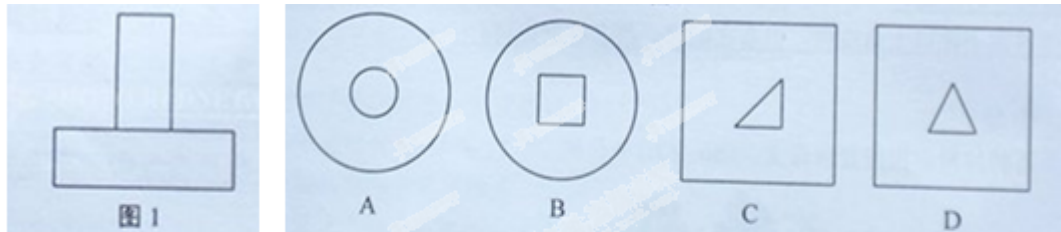
- C. 若  $\tan \alpha \neq 1$ ，则  $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$       D. 若  $\tan \alpha \neq 1$ ，则  $\alpha = \frac{\pi}{4}$

**【答案】** C

**【解析】** 逆否命题是将原命题的条件和结论同时否定，并交换位置，故可知选 C。

**【考点定位】** 四种命题

3. 某几何体的正视图和侧视图均如图 1 所示，则该几何体的俯视图不可能是 ( )



**【答案】** D

**【解析】** 由三视图的识图原理可知，D 不对，其正视图与侧视图有不同，正视图应在中间画一虚线。

**【考点定位】** 三视图和直观图

4. 设某大学的女生体重  $y$ （单位： $kg$ ）与身高  $x$ （单位： $cm$ ）具有线性相关关系，根据

一组样本数据  $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, n)$ ，用最小二乘法建立的回归方程为  $\hat{y} = 0.85x - 85.71$ ，则下列结论不正确的是 ( )

- A.  $y$  与  $x$  具有正的线性相关关系
- B. 回归直线过样本点的中心  $(\bar{x}, \bar{y})$
- C. 若该大学某女生身高增加  $1\text{ cm}$ ，则其体重约增加  $0.85\text{ kg}$
- D. 若该大学某女生身高为  $170\text{ cm}$ ，则可断定其体重必为  $58.79\text{ kg}$

**【答案】 D**

**【解析】**由回归方程的相关知识可知，D 显然不正确，利用回归方程我们只能进行回顾预报，而不能得出绝对预报的结论。

**【考点定位】**相关关系与回归方程

5. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的焦距为 10，点  $P(2, 1)$  在  $C$  的渐近线上，则  $C$  的方程为 ( )

- A.  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$
- B.  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$
- C.  $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$
- D.  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{80} = 1$

**【答案】 A**

**【解析】**因焦距为 10，则  $c = 5$ ，又渐近线为  $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，因点  $P(2, 1)$  在  $C$  的渐近线，则

$a = 2b$ ，故可得  $a^2 = 20, b^2 = 5$ ，选 A。

**【考点定位】**双曲线方程与性质

6. 函数  $f(x) = \sin x - \cos(x + \frac{\pi}{6})$  的值域为 ( )

- A.  $[-2, 2]$
- B.  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$
- C.  $[-1, 1]$
- D.  $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$

**【答案】 B**

**【解析】**因

$$f(x) = \sin x - \cos(x + \frac{\pi}{6}) = \sin x - (\cos x \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \sin \frac{\pi}{6}) = \frac{3}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \sqrt{3} \sin(x - \frac{\pi}{6})$$

，故  $f(x) \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ ，选 B。

**【考点定位】**三角函数恒等变换

7. 在  $\triangle ABC$  中， $AB = 2, AC = 3, \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 1$ ，则  $BC = ( )$

- A.  $\sqrt{3}$     B.  $\sqrt{7}$     C.  $2\sqrt{2}$     D.  $\sqrt{23}$

**【答案】** A

**【解析】** 由  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 = 2 \times BC \times \cos(\pi - B)$ , 所以  $\cos B = -\frac{1}{2BC}$ , 又由余弦定理可得

$$\cos B = \frac{4 + BC^2 - 9}{2 \times 2 \times BC}, \text{ 故可得 } BC^2 = 3, \text{ 即 } BC = \sqrt{3}. \text{ 选 A.}$$

**【考点定位】** 平面向量数量积与解三角形

8. 已知两条直线  $l_1: y = m$  和  $l_2: y = \frac{8}{2m+1} (m > 0)$ ,  $l_1$  与函数  $y = |\log_2 x|$  的图象从左至右相交于点  $A, B$ ,  $l_2$  与函数  $y = |\log_2 x|$  的图象从左至右相交于点  $C, D$ , 记线段  $AC$  和  $BD$  在

$x$  轴上的投影长度分别为  $a, b$ . 当  $m$  变化时,  $\frac{b}{a}$  的最小值为 (    )

- A.  $16\sqrt{2}$     B.  $8\sqrt{2}$     C.  $8\sqrt[3]{4}$     D.  $4\sqrt[3]{4}$

**【答案】** B

**【解析】** 由题可知,  $x_A = 2^{-m}, x_B = 2^m, x_C = 2^{-\frac{8}{2m+1}}, x_D = 2^{\frac{8}{2m+1}}$ , 所以  $a = |2^{-\frac{8}{2m+1}} - 2^{-m}|$ ,

$b = |2^{\frac{8}{2m+1}} - 2^m|$ , 若  $m = \frac{8}{2m+1}$ , 则  $a = b = 0$ , 不合题意; 若  $m > \frac{8}{2m+1}$ , 则

$$a = 2^{-\frac{8}{2m+1}} - 2^{-m}, \quad b = 2^m - 2^{\frac{8}{2m+1}}, \text{ 即}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{2^m - 2^{\frac{8}{2m+1}}}{2^{-\frac{8}{2m+1}} - 2^{-m}} = \frac{(2^m - 2^{\frac{8}{2m+1}}) \cdot 2^{\frac{8}{2m+1}} \cdot 2^m}{(2^{-\frac{8}{2m+1}} - 2^{-m}) \cdot 2^{\frac{8}{2m+1}} \cdot 2^m} = \frac{(2^m - 2^{\frac{8}{2m+1}}) \cdot 2^{\frac{8}{2m+1}} \cdot 2^m}{2^m - 2^{\frac{8}{2m+1}}} = 2^{\frac{8}{2m+1}} \cdot 2^m = 2^{\frac{8}{2m+1} + m}$$

因  $\frac{8}{2m+1} + m = \frac{4}{m + \frac{1}{2}} + m + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{4} - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ , 即此时  $\frac{b}{a}$  的最小值为

$2^{\frac{7}{2}} = \sqrt{2^7} = 8\sqrt{2}$ . 同理若  $m < \frac{8}{2m+1}$ , 则  $a = 2^{-m} - 2^{-\frac{8}{2m+1}}, b = 2^{\frac{8}{2m+1}} - 2^m$ , 即

$$\frac{b}{a} = \frac{2^{\frac{8}{2m+1}} - 2^m}{2^{-m} - 2^{-\frac{8}{2m+1}}} = 2^{\frac{8}{2m+1}} \cdot 2^m = 2^{\frac{8}{2m+1} + m},$$

因  $\frac{8}{2m+1} + m = \frac{4}{m + \frac{1}{2}} + m + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{4} - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ , 即此时  $\frac{b}{a}$  的最小值为

$2^{\frac{7}{2}} = \sqrt{2^7} = 8\sqrt{2}$ 。综上可知  $\frac{b}{a}$  的最小值为  $8\sqrt{2}$ 。

**【考点定位】** 函数图像与性质，基本不等式。

二填空题：本大题共 8 小题，考生作答 7 小题，每小题 5 分，共 35 分，把答案填在答题卡中对应题号的横线上。

一、选做题（请考生在第 9、10、11 三题中任选两题作答，如果全做，则按前两题记分）

9. 在直角坐标系  $xOy$  中，已知曲线  $C_1: \begin{cases} x=t+1 \\ y=1-2t \end{cases}$  ( $t$  为参数) 与曲线  $C_2: \begin{cases} x=a \sin \theta \\ y=3 \cos \theta \end{cases}$

( $\theta$  为参数,  $a > 0$ ) 有一个公共点在  $x$  轴上, 则  $a =$  \_\_\_\_\_。

**【答案】**  $\frac{3}{2}$

**【解析】** 曲线  $C_1: \begin{cases} x=t+1 \\ y=1-2t \end{cases}$  ( $t$  为参数) 化普通方程得  $2x+y-3=0$ , 曲线  $C_2: \begin{cases} x=a \sin \theta \\ y=3 \cos \theta \end{cases}$

( $\theta$  为参数,  $a > 0$ ) 化普通方程得  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1$ , 因有一个公共点在  $x$  轴上, 令  $y=0$ , 则

得公共点  $(\frac{3}{2}, 0)$ , 代入  $C_2$  得  $a = \frac{3}{2}$ 。

**【考点定位】** 极坐标与参数方程

10. 不等式  $|2x+1|-2|x-1| > 0$  的解集为 \_\_\_\_\_

**【答案】**  $\{x | x > \frac{1}{4}\}$

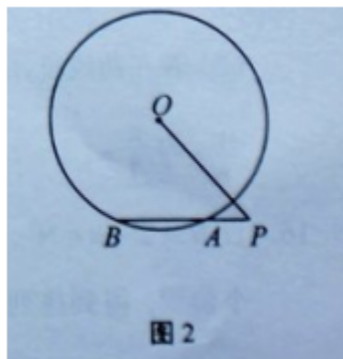
**【解析】** 由零点分段法可知原不等式等价于  $\begin{cases} x \geq 1 \\ 2x+1-2(x-1) > 0 \end{cases}$  或

$\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ -(2x+1)+2(x-1) > 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x < 1 \\ (2x+1)+2(x-1) > 0 \end{cases}$ , 分别解不等式组得  $x \geq 1$  或  $\emptyset$  或

$\frac{1}{4} < x < 1$ , 综上可得解集为  $\{x | x > \frac{1}{4}\}$ 。

**【考点定位】** 不等式选讲—解绝对值不等式

11. 如图 2, 过点 P 的直线与  $\odot O$  相交于 A, B 两点. 若  $PA=1, AB=2, PO=3$ , 则  $\odot O$  的半径等于\_\_\_\_\_。



**【答案】**  $\sqrt{6}$

**【解析】** 设半径为  $r$ , 则由割线定理得  $PA \cdot PB = (PO+r)(PO-r)$ , 即  $1 \times 3 = (3+r)(3-r)$ ,

化简得  $r^2 = 6$ , 故  $r = \sqrt{6}$ 。

**【考点定位】** 几何证明选讲

二、必做题 (12~16 题)

12. 已知复数  $z = (3+i)^2$  ( $i$  为虚数单位), 则  $|z| =$ \_\_\_\_\_。

**【答案】** 10

**【解析】** 因  $z = (3+i)^2 = 9+6i+i^2 = 8+6i$ , 所以  $|z| = \sqrt{8^2+6^2} = 10$ 。

**【考点定位】** 复数的运算。

13.  $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$  的二项展开式中的常数项为\_\_\_\_\_。(用数字作答)

**【答案】** -160

**【解析】** 由二项式展开通项公式得  $T_{r+1} = C_6^r (2\sqrt{x})^{6-r} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = C_6^r 2^{6-r} (-1)^r x^{3-r}$ , 令

$3-r=0$ , 则  $r=3$ , 故常数项为  $T_4 = C_6^3 2^3 \times (-1)^3 = -160$ 。

**【考点定位】** 二项式定理求指定项

14. 如果执行如图 3 所示的程序框图, 输入  $x = -1, n = 3$ , 则输出的数  $S =$ \_\_\_\_\_。

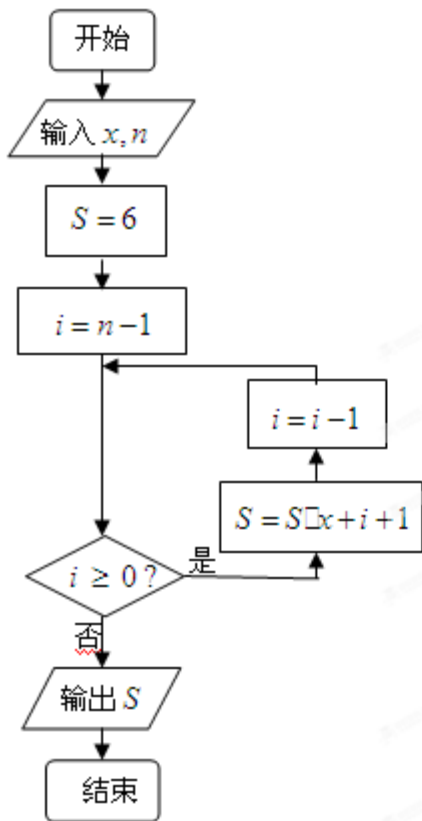


图 3

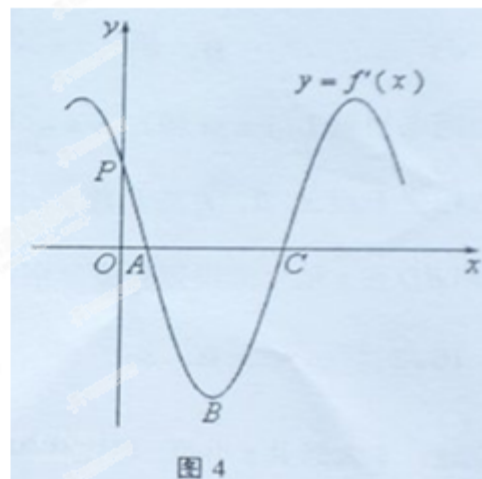


图 4

**【答案】** -4

**【解析】**由程序框图的流程可得  $x = -1, n = 3, S = 6; i = 2, S = 6 \times (-1) + 2 + 1 = -3,$   
 $i = 1; S = (-3) \times (-1) + 1 + 1 = 5, i = 0; S = 5 \times (-1) + 0 + 1 = -4, i = -1,$  输出  $S = -4.$

**【考点定位】**程序框图的推理运.

15. 函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  的导函数  $y = f'(x)$  的部分图象如图 4 所示, 其中,  $P$  为图象与  $y$  轴的交点,  $A, C$  为图象与  $x$  轴的两个交点,  $B$  为图象的最低点。

(1) 若  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ , 点  $P$  的坐标为  $\left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ , 则  $\omega =$  \_\_\_\_\_;

(2) 若在曲线段  $\widehat{ABC}$  与  $x$  轴所围成的区域内随机取一点, 则该点在  $\triangle ABC$  内的概率为 \_\_\_\_\_。

**【答案】** (1) 3, (2)  $\frac{\pi}{4}$

**【解析】** (1) 因  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ , 所以  $f'(x) = \omega \cos(\omega x + \varphi)$ , 由  $\varphi = \frac{\pi}{6}$  时点  $P$  的

坐标为  $\left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ , 则  $\frac{3\sqrt{3}}{2} = \omega \cos \frac{\pi}{6}$ , 解得  $\omega = 3$ ;

(2) 由题可知曲线段  $\overline{ABC}$  与  $x$  轴所围成的区域为  $S_n = \int_{x_1}^{x_2} |\omega \cos(\omega x + \varphi)| = 2$ , 而  $\triangle ABC$

的面积为  $S_{\triangle} = \frac{1}{2} \times \frac{T}{2} \times |\omega| = \frac{\pi}{2}$ , 由几何概型概率计算公式可得所求概率为  $P = \frac{\pi}{4}$ .

【考点定位】三角函数的图像与性质和几何概型概率计算。

16. 设  $N = 2^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ ), 将  $N$  个数  $x_1, x_2, \dots, x_N$  依次放入编号为  $1, 2, \dots, N$

的  $N$  个位置, 得到排列  $P_0 = x_1 x_2 \cdots x_N$ . 将该排列中分别位于奇数与偶数位置的数取出, 并

按原顺序依次放入对应的前  $\frac{N}{2}$  和后  $\frac{N}{2}$  个位置, 得到排列  $P_1 = x_1 x_3 \cdots x_{N-1} x_2 x_4 \cdots x_N$ , 将此

操作称为  $C$  变换. 将  $P_1$  分成两段, 每段  $\frac{N}{2}$  个数, 并对每段作  $C$  变换, 得到  $P_2$ ; 当

$2 \leq i \leq n-2$  时, 将  $P_i$  分成  $2^i$  段, 每段  $\frac{N}{2^i}$  个数, 并对每段作  $C$  变换, 得到  $P_{i+1}$ , 例

如, 当  $N = 8$  时,  $P_2 = x_1 x_3 x_5 x_7 x_2 x_6 x_4 x_8$ , 此时  $x_7$  位于  $P_2$  中的第 4 个位置。

(1) 当  $N = 16$  时,  $x_7$  位于  $P_2$  中的第 \_\_\_\_\_ 个位置;

(2) 当  $N = 2^n$  ( $n \geq 8$ ) 时,  $x_{173}$  位于  $P_4$  中的第 \_\_\_\_\_ 个位置。

【答案】(1) 6 ; (2)  $3 \times 2^{n-4} + 11$

【解析】

(1) 由题,  $P_0 = x_1 x_2 \cdots x_{16}$ ,  $P_1 = x_1 x_3 \cdots x_{15} x_2 x_4 \cdots x_{16}$ ,  $P_2 = x_1 x_5 x_9 x_{13} x_3 x_7 x_{11} x_{15} x_2 x_6 \cdots x_{16}$ ,

可知  $x_7$  位于  $P_2$  中的第 6 个位置;

(2) 当  $N = 2^n$  ( $n \geq 8$ ) 时, 因  $x_{173}$  位于  $P_0$  中的第 173 个位置, 将  $P_0$  分为 2 段, 每段有  $\frac{N}{2}$  个,

经过一次变换后, 位于  $P_1$  中的前  $\frac{N}{2}$  的第 87 个位置; 接下来将  $P_1$  中每段再分成 2 段, 每段  $2^{n-2}$

个, 经过变换后此时位于  $P_2$  中的第 1 段的第 44 个位置; 接下来将  $P_2$  分成 8 段, 每段有

$\frac{2^n}{8} = 2^{n-3}$ , 此时位于  $P_3$  中第二段的 22 个位置, 接下来将  $P_3$  分成 16 段, 每段有  $\frac{2^n}{16} = 2^{n-4}$ ,

此时位于  $P_4$  中第 4 段的 11 个位置, 即  $3 \times 2^{n-4} + 11$ .

【考点定位】数列的综合应用

三. 解答题: 本大题共 6 小题, 共 75 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分) 某超市为了解顾客的购物量及结算时间等信息, 安排一名员工随机收集了在该超市购物的 100 位顾客的相关数据, 如下表所示

一次购物量	1 至 4 件	5 至 8 件	9 至 12 件	13 至 16 件	17 件及以上
顾客数 (人)	$x$	30	25	$y$	10
结算时间 (分钟/人)	1	1.5	2	2.5	3

已知这 100 位顾客中一次购物量超过 8 件的顾客占 55%.

- (1) 确定  $x, y$  的值, 并求顾客一次购物的结算时间  $X$  的分布列与数学期望;  
 (2) 若某顾客到达收银台时前面恰有 2 位顾客需结算, 且各顾客的结算相互独立, 求该顾客结算前的等候时间不超过 2.5 分钟的概率.  
 (注: 将频率视为概率)

**【解析】** (1) 由已知得  $25 + y + 10 = 55, x + 30 = 45$ , 所以  $x = 15, y = 20$ .

该超市所有顾客一次购物的结算时间组成一个总体, 所收集的 100 位顾客一次购物的结算时间可视为总体的一个容量为 100 的简单随机样本, 将频率视为概率得

$$P(X=1) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}, P(X=1.5) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}, P(X=2) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4},$$

$$P(X=2.5) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}, P(X=3) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}.$$

$X$  的分布列为

$X$	1	2	3	4	5
$P$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

$X$  的数学期望为

$$E(X) = 1 \times \frac{3}{20} + 1.5 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{1}{4} + 2.5 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{10} = 1.9.$$

(ii) 记  $A$  为事件“该顾客结算前的等候时间不超过 2.5 分钟”,  $X_i (i=1, 2)$  为该顾客前面第  $i$  位顾客的结算时间, 则

$$P(A) = P(X_1=1 \text{ 且 } X_2=1) + P(X_1=1 \text{ 且 } X_2=1.5) + P(X_1=1.5 \text{ 且 } X_2=1),$$

由于各顾客的结算时间相互独立, 且  $X_1, X_2$  的分布列都与  $X$  的分布列相同, 所以

$$P(A) = P(X_1=1) \times P(X_2=1) + P(X_1=1) \times P(X_2=1.5) + P(X_1=1.5) \times P(X_2=1)$$

$$= \frac{3}{20} \times \frac{3}{20} + \frac{3}{20} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{20} = \frac{9}{80}$$

故该顾客结算前的等候时间不超过 2.5 分钟的概率为  $\frac{9}{80}$ .

**【考点定位】** 概率与随机变量的分布列和数学期望

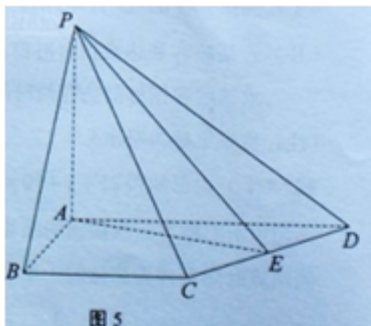
18. (本小题满分 12 分)

如图 5, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AB=3, BC=4, AD=5$ ,

$\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$ ,  $E$  是  $CD$  的中点。

(I) 证明:  $CD \perp$  平面  $PAE$

(II) 若直线  $PB$  与平面  $PAE$  所成的角和  $PB$  与平面  $ABCD$  所成的角相等, 求四棱锥  $P-ABCD$  的体积。



解法 1 (I) 如图(1), 连接  $AC$ 。由  $AB = 4, BC = 3, \angle ABC = 90^\circ$ , 得  $AC = 5$ 。又  $AD = 5$ ,  $E$  是  $CD$  的中点, 所以  $CD \perp AE$ , 因为  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $CD \subset$  平面  $ABCD$ , 所以  $PA \perp CD$ , 而  $PA, PE$  是平面  $PAE$  内的两条相交直线, 所以  $CD \perp$  平面  $PAE$ 。

(II) 过点  $B$  作  $BG \parallel CD$ , 分别与  $AE, AD$  相交于点  $F, G$ , 连接  $PF$ ,

由 (I)  $CD \perp$  平面  $PAE$  知,  $BG \perp$  平面  $PAE$ , 于是  $\angle BPE$  为直线  $PB$  与平面  $PAE$  所成的角, 且  $BG \perp AE$

由  $PA \perp$  平面  $ABCD$  知,  $\angle PBA$  为直线  $PB$  与平面  $ABCD$  所成的角。

由题意  $\angle PBA = \angle BPF$ , 因为  $\sin \angle PBA = \frac{PA}{PB}$ ,  $\sin \angle BPF = \frac{BF}{PB}$ , 所以  $PA = BF$ , 由

$\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$  知  $AD \parallel BC$ , 又  $BG \parallel CD$ , 所以四边形  $BCDG$  是平行四边形, 故  $GD = BC = 3$ , 于是  $AG = 2$ 。

在  $Rt\triangle BAG$  中,  $AB = 4, AG = 2, BG \perp AF$ , 所以

$$BG = \sqrt{AB^2 + AG^2} = 2\sqrt{5}, BF = \frac{AB^2}{BG} = \frac{16}{2\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

于是  $PA = BF = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ 。

又梯形  $ABCD$  的面积为  $S = \frac{1}{2} \times (5+3) \times 4 = 16$ , 所以四棱锥  $P-ABCD$  的体积为

$$V = \frac{1}{3} \times S \times PA = \frac{1}{3} \times 16 \times \frac{8\sqrt{5}}{5} = \frac{128\sqrt{5}}{15}.$$

解法 2 如图 (2), 以  $A$  为坐标原点,  $AB, AD, AP$  所在直线分别为  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴建立

空间直角坐标系，设  $PA = h$ ，则相关各点的坐标为：

$$A(0,0,0), B(4,0,0), C(4,3,0), D(0,5,0), E(2,4,0), P(0,0,h).$$

(I) 易知  $\overrightarrow{CD} = (-4, 2, 0)$ ,  $\overrightarrow{AE} = (2, 4, 0)$ ,  $\overrightarrow{AP} = (0, 0, h)$ . 因为

$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AE} = -8 + 8 + 0 = 0$ ,  $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ , 所以  $CD \perp AE$ ,  $CD \perp AP$ , 而  $AP, AE$  是平面  $PAE$  内的两条相交直线，所以  $CD \perp$  平面  $PAE$ 。

(II) 由题设和 (I) 知， $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{PA}$  分别是平面  $PAE$ , 平面  $ABCD$  的法向量，而  $PB$  与平面  $PAE$  所成的角和  $PB$  与平面  $ABCD$  所成的角相等，所以

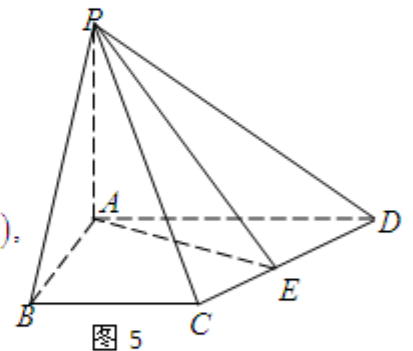
$$|\cos \langle \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{PB} \rangle| = |\cos \langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB} \rangle|, \text{ 即 } \frac{|\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{CD}| |\overrightarrow{PB}|} = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}|}.$$

由题 (I) 知， $\overrightarrow{CD} = (-4, 2, 0)$ ,  $\overrightarrow{PA} = (0, 0, -h)$ , 又  $\overrightarrow{PB} = (4, 0, -h)$ ,

$$\text{故 } \frac{|-16 + 0 + 0|}{2\sqrt{5} \sqrt{16 + h^2}} = \frac{|0 + 0 + h^2|}{h \sqrt{16 + h^2}}, \text{ 解得 } h = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

又梯形  $ABCD$  的面积为  $S = \frac{1}{2} \times (5 + 3) \times 4 = 16$ , 所以四棱锥  $P-ABCD$  的体积为

$$V = \frac{1}{3} \times S \times PA = \frac{1}{3} \times 16 \times \frac{8\sqrt{5}}{5} = \frac{128\sqrt{5}}{15}.$$



**【考点定位】** 立体几何的证明与体积计算

19. (本小题满分 12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的各项均为正数，记  $A(n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ,

$$B(n) = a_2 + a_3 + \dots + a_{n+1}$$

$$C(n) = a_3 + a_4 + \dots + a_{n+2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

(I) 若  $a_1 = 1, a_2 = 5$ , 且对任意  $n \in N^*$ , 三个数  $A(n), B(n), C(n)$  组成等差数列,

求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 证明: 数列  $\{a_n\}$  是公比为  $q$  的等比数列的充分必要条件是: 对任意  $n \in N^*$ , 三个数

$A(n), B(n), C(n)$  组成公比为  $q$  的等比数列.

【解析】(I) 对任意  $n \in N^*$ , 三个数  $A(n)$ ,  $B(n)$ ,  $C(n)$  组成等差数列, 所以

$$B(n) - A(n) = C(n) - B(n).$$

即  $a_{n+1} - a_1 = a_{n+2} - a_2$ , 亦即  $a_{n+2} - a_{n+1} = a_2 - a_1 = 4$ .

故数列  $\{a_n\}$  是首项为 1, 公比为 4 的等差数列. 于是  $a_n = 1 + (n-1) \times 4 = 4n - 3$ .

(II) (1) 必要性: 若数列  $\{a_n\}$  是公比为  $q$  的等比数列, 则对任意  $n \in N^*$ , 有

$a_{n+1} = a_n q$ . 由  $a_n > 0$  知,  $A(n)$ ,  $B(n)$ ,  $C(n)$  均大于 0, 于是

$$\frac{B(n)}{A(n)} = \frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \frac{q(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = q$$

$$\frac{C(n)}{B(n)} = \frac{a_3 + a_4 + \cdots + a_{n+2}}{a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}} = \frac{q(a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1})}{a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}} = q$$

即  $\frac{B(n)}{A(n)} = \frac{C(n)}{B(n)} = q$ . 所以三个数  $A(n)$ ,  $B(n)$ ,  $C(n)$  组成公比为  $q$  的等比数列.

(2) 充分性: 若对任意  $n \in N^*$ , 三个数  $A(n)$ ,  $B(n)$ ,  $C(n)$  组成公比为  $q$  的等比数列,

则  $B(n) = qA(n)$ ,  $C(n) = qB(n)$ .

于是  $C(n) - B(n) = q[B(n) - A(n)]$ , 得  $a_{n+2} - a_2 = q(a_{n+1} - a_1)$ , 即

$$a_{n+2} - qa_{n+1} = a_2 - qa_1.$$

由  $n=1$  有  $B(1) = qA(1)$ , 即  $a_2 = qa_1$ , 从而  $a_{n+2} - qa_{n+1} = 0$ .

因为  $a_n > 0$ , 所以  $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_2}{a_1} = q$ . 故数列  $\{a_n\}$  是首项为  $a_1$ , 公比为  $q$  的等比数列.

综上所述, 数列  $\{a_n\}$  是公比为  $q$  的等比数列的充分必要条件是: 对任意  $n \in N^*$ , 三个数

$A(n)$ ,  $B(n)$ ,  $C(n)$  组成公比为  $q$  的等比数列.

【考点定位】数列的证明

20. (本小题满分 13 分)

某企业接到生产 3000 台某产品的  $A, B, C$  三种部件的订单, 每台产品需要这三种部件的数量分别为 2, 2, 1 (单位: 件). 已知每个工人每天可生产  $A$  部件 6 件, 或  $B$  部件 3 件, 或  $C$  部件 2 件. 该企业计划安排 200 名工人分成三组分别生产这三种部件, 生产  $B$  部件的人数与

生产 A 部件的人数成正比，比例系数为  $k$  ( $k$  为正整数)。

(I) 设生产 A 部件的人数为  $x$ ，分别写出完成 A, B, C 三种部件生产需要的时间；

(II) 假设这三种部件的生产同时开工，试确定正整数  $k$  的值，使完成订单任务的时间最短，并给出时间最短时具体的人数分组方案。

**【解析】**

(I) 设完成 A, B, C 三种部件的生产任务需要事件 (单位: 天) 分别为  $T_1(x), T_2(x), T_3(x)$ ,

由题设有  $T_1(x) = \frac{2 \times 3000}{6x} = \frac{1000}{x}, T_2(x) = \frac{2000}{kx}, T_3(x) = \frac{1500}{200 - (1+k)x}$ , 其中

$x, kx, 200 - (1+k)x$  均为 1 到 200 之间的正整数。

(II) 完成订单任务的时间为  $f(x) = \max\{T_1(x), T_2(x), T_3(x)\}$ , 其定义域为

$\{x \mid 0 < x < \frac{200}{1+k}, x \in \mathbb{N}^*\}$ . 易知,  $T_1(x), T_2(x)$  为减函数,  $T_3(x)$  为增函数. 注意到

$T_2(x) = \frac{2}{k} T_1(x)$ , 于是

① 当  $k = 2$  时,  $T_1(x) = T_2(x)$ , 此时

$f(x) = \max\{T_1(x), T_3(x)\} = \max\{\frac{1000}{x}, \frac{1500}{200 - 3x}\}$ .

由函数  $T_1(x), T_3(x)$  的单调性知, 当  $\frac{1000}{x} = \frac{1500}{200 - 3x}$  时  $f(x)$  取得最小值, 解得  $x = \frac{400}{9}$ .

由于  $44 < \frac{400}{9} < 45$ , 而  $f(44) = T_1(44) = \frac{250}{11}, f(45) = T_3(45) = \frac{300}{13}, f(44) < f(45)$ .

故当  $x = 44$  时完成订单任务的时间最短, 且最短时间为  $f(44) = \frac{250}{11}$ .

② 当  $k > 2$  时,  $T_1(x) > T_2(x)$ , 由于  $k$  为正整数, 故  $k \geq 3$ , 此时

$\frac{1500}{200 - (1+k)x} \geq \frac{1500}{200 - (1+3)x} = \frac{375}{50 - x}$ , 记  $T(x) = \frac{375}{50 - x}$ ,

$\varphi(x) = \max\{T_1(x), T(x)\}$ . 易知  $T(x)$  是增函数, 则

$f(x) = \max\{T_1(x), T_3(x)\} \geq \max\{T_1(x), T(x)\} = \varphi(x) = \max\{\frac{1000}{x}, \frac{375}{50 - x}\}$

由函数  $T_1(x), T(x)$  的单调性知, 当  $\frac{1000}{x} = \frac{375}{50 - x}$  时  $f(x)$  取得最小值, 解得  $x = \frac{400}{11}$ .

于  $36 < \frac{400}{11} < 37$ , 而  $\varphi(36) = T_1(36) = \frac{250}{9} > \frac{250}{11}, \varphi(37) = T(37) = \frac{375}{13} > \frac{250}{11}$ . 此时完

成订单任务的时间最短时间大于  $\frac{250}{11}$ .

③当  $k < 2$  时,  $T_1(x) < T_2(x)$ , 由于  $k$  为正整数, 故  $k = 1$ , 此时

$$f(x) = \max\{T_2(x), T_3(x)\} = \max\left\{\frac{2000}{x}, \frac{750}{100-x}\right\}.$$

由函数  $T_2(x), T_3(x)$  的单调性知, 当  $\frac{2000}{x} = \frac{750}{100-x}$  时  $f(x)$  取得最小值, 解得  $x = \frac{800}{11}$ . 类

似①的讨论, 此时完成订单任务的最短时间为  $\frac{250}{9}$ , 大于  $\frac{250}{11}$ .

综上所述, 当  $k = 2$  时, 完成订单任务的时间最短, 此时  $A, B, C$  三种部件的人数分别为 44, 88, 68.

**【考点定位】**函数的应用问题

21. (本小题满分 13 分)

在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C_1$  上的点均在圆  $C_2: (x-5)^2 + y^2 = 9$  外, 且对  $C_1$  上任意一点  $M$ ,  $M$  到直线  $x = -2$  的距离等于该点与  $C_2$  上点的距离的最小值。

(I) 求曲线  $C_1$  的方程;

(II) 设  $P(x_0, y_0)$  ( $y_0 \neq \pm 3$ ) 为  $C_2$  外一点, 过  $P$  作圆  $C_2$  的两条切线, 分别与曲线  $C_1$  相交于点  $A, B$  和  $C, D$ , 证明: 当  $P$  在直线  $x = -4$  上运动时, 四点  $A, B, C, D$  的纵坐标之积为定值。

**【解析】**(I) 解法 1 设  $M$  的坐标为  $(x, y)$ , 由已知得  $|x+2| = \sqrt{(x-5)^2 + y^2} - 3$ .

易知圆  $C_2$  上的点位于直线  $x = -2$  的右侧, 于是  $x+2 > 0$ , 所以  $\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = x+5$

化简得曲线  $C_1$  的方程为  $y^2 = 20x$

解法 2: 由题设知, 曲线  $C_1$  上任意一点  $M$  到圆心  $C_2$  的距离等于它到直线  $x = -5$  的距离,

因此, 曲线  $C_1$  是以  $(5, 0)$  为焦点, 直线  $x = -5$  为准线的抛物线, 故方程为  $y^2 = 20x$

(II) 当  $P$  在直线  $x = -4$  上运动时,  $P$  的坐标为  $(-4, y_0)$ , 又  $y_0 \neq \pm 3$ , 则过  $P$  且与圆  $C_2$  相切的直线的斜率为  $k$  存在且不为 0, 每条切线都与抛物线有两个交点, 切线方程为  $y - y_0 = k(x + 4)$ , 即  $kx - y + y_0 + 4k = 0$ , 于是

$$\frac{|5k + y_0 + 4k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 3$$

整理得  $72k^2 + 18y_0k + y_0^2 - 9 = 0$  ①

设过点  $P$  所作的两条切线  $PA, PC$  的斜率为  $k_1, k_2$ , 则  $k_1, k_2$  是方程①的两个实根, 故

$$k_1 + k_2 = -\frac{18y_0}{72} = -\frac{y_0}{4} \quad \text{②}$$

$$\text{由} \begin{cases} k_1x - y + y_0 + 4k_1 = 0 \\ y^2 = 20x \end{cases} \text{得 } k_1y^2 - 20y + 20(y_0 + 4k_1) = 0 \quad \text{③}$$

设四点  $A, B, C, D$  的纵坐标为  $y_1, y_2, y_3, y_4$

$$\text{则 } y_1, y_2 \text{ 是方程③的两个实根, 所以 } y_1y_2 = \frac{20(y_0 + 4k_1)}{k_1} \quad \text{④}$$

$$\text{同理可得 } y_3y_4 = \frac{20(y_0 + 4k_2)}{k_2} \quad \text{⑤}$$

由②④⑤三式得

$$\begin{aligned} y_1y_2y_3y_4 &= \frac{400(y_0 + 4k_1)(y_0 + 4k_2)}{k_1k_2} \\ &= \frac{400[y_0^2 + 4(k_1 + k_2)y_0 + 16k_1k_2]}{k_1k_2} \\ &= \frac{400[y_0^2 - y_0^2 + 16k_1k_2]}{k_1k_2} = 6400 \end{aligned}$$

所以, 当  $P$  在直线  $x = -4$  上运动时, 四点  $A, B, C, D$  的纵坐标之积 6400。

**【考点定位】** 直线与曲线的位置关系

22. (本小题满分 13 分)

已知函数  $f(x) = e^{ax} - x$ , 其中  $a \neq 0$ .

(I) 若对一切  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq 1$  恒成立, 求  $a$  的取值集合;

(II) 在函数  $f(x)$  的图象上取定两点  $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2)) (x_1 < x_2)$ , 记直线  $AB$  的斜率为  $k$ . 问: 是否存在  $x_0 \in (x_1, x_2)$ , 使  $f'(x_0) > k$  成立? 若存在, 求  $x_0$  的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

**【解析】** (I) 若  $a < 0$ , 则对一切  $x > 0$ ,  $f(x) = e^{ax} - x < 1$  这与题设矛盾. 又  $a \neq 0$ , 故

$a > 0$ . 而  $f'(x) = ae^{ax} - 1$ , 令  $f'(x) = 0$  得  $x = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}$ ,

当  $x < \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减; 当  $x > \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增. 故当  $x = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}$  时,  $f(x)$  取最小值  $f(\frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a}$ .

于是对一切  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq 1$  恒成立, 当且仅当  $\frac{1}{a} - \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a} \geq 1$  ①

令  $g(t) = t - t \ln t$ , 则  $g'(t) = -\ln t$ .

当  $0 < t < 1$  时,  $g'(t) > 0$ ,  $g(t)$  单调递增; 当  $t > 1$  时,  $g'(t) < 0$ ,  $g(t)$  单调递减, 故当  $t = 1$  时,

$g(t)$  取最大值  $g(1) = 1$ , 因此, 当且仅当  $\frac{1}{a} = 1$ , 即  $a = 1$  时, ①式成立.

综上所述,  $a$  的取值集合为  $\{1\}$ .

(II) 由题意知,  $k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{e^{ax_2} - e^{ax_1}}{x_2 - x_1} - 1$ .

令  $\varphi(x) = f'(x) - k = ae^{ax} - \frac{e^{ax_2} - e^{ax_1}}{x_2 - x_1}$ , 则  $\varphi(x_1) = -\frac{e^{ax_1}}{x_2 - x_1} [e^{a(x_2-x_1)} - a(x_2-x_1) - 1]$ ,

$\varphi(x_2) = \frac{e^{ax_2}}{x_2 - x_1} [e^{a(x_1-x_2)} - a(x_1-x_2) - 1]$ .

令  $F(t) = e^t - t - 1$ , 则  $F'(t) = e^t - 1$ .

当  $t < 0$  时,  $F'(t) < 0$ ,  $F(t)$  单调递减; 当  $t > 0$  时,  $F'(t) > 0$ ,  $F(t)$  单调递增, 故当  $t \neq 0$  时,

$F(t) > F(0) = 0$  即  $e^t - t - 1 > 0$ .

从而  $e^{a(x_2-x_1)} - a(x_2-x_1) - 1 > 0$ ,  $e^{a(x_1-x_2)} - a(x_1-x_2) - 1 > 0$ , 又  $\frac{e^{ax_1}}{x_2-x_1} > 0$ ,  $\frac{e^{ax_2}}{x_2-x_1} > 0$ ,

所以  $\varphi(x_1) < 0$ ,  $\varphi(x_2) > 0$ .

因为函数  $y = \varphi(x)$  在区间  $[x_1, x_2]$  上的图象是连续不断的一条曲线, 所以存在  $c \in (x_1, x_2)$ ,

使得  $\varphi(c) = 0$ . 又  $\varphi'(x) = a^2 e^{ax} > 0$ ,  $\varphi(x)$  单调递增, 故这样的  $c$  是唯一的, 且

$c = \frac{1}{a} \ln \frac{e^{ax_2} - e^{ax_1}}{a(x_2 - x_1)}$ . 故当且仅当  $x \in (\frac{1}{a} \ln \frac{e^{ax_2} - e^{ax_1}}{a(x_2 - x_1)}, x_2)$  时,  $f'(x) > k$ .

综上所述, 存在  $x_0 \in (x_1, x_2)$ , 使  $f'(x_0) > k$  成立, 且  $x_0$  的取值范围为  $(\frac{1}{a} \ln \frac{e^{ax_2} - e^{ax_1}}{a(x_2 - x_1)}, x_2)$ .

**【考点定位】** 导数的综合应用.