2004年贵州高考理科数学真题及答案

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1．（5分）设集合$M=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1$，$x\in R$，$y\in R\}$，$N=\{(x,y)\,|\,x^2-y=0$，$x\in R$，$y\in R\}$，则集合$M\bigcap N$中元素的个数为(　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

2．（5分）函数$y=|\sin\frac{x}{2}|$的最小正周期是(　　)

A．$\frac{\pi}{2}$　　B．π　　C．2π　　D．4π

3．（5分）设数列$\{a_n\}$是等差数列，$a_2=-6$，$a_8=6$，S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，则(　　)

A．$S_4<S_5$　　B．$S_4=S_5$　　C．$S_6<S_5$　　D．$S_6=S_5$

4．（5分）圆$x^2+y^2-4x=0$在点$P(1,\sqrt{3})$处的切线方程为(　　)

A．$x+\sqrt{3}y-2=0$　　B．$x+\sqrt{3}y-4=0$　　C．$x-\sqrt{3}y+4=0$　　D．$x-\sqrt{3}y+2=0$

5．（5分）函数$y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)}$的定义域是(　　)

A．$[-\sqrt{2}$，$-1)\bigcup(1$，$\sqrt{2}]$　　B．$(-\sqrt{3}$，$-1)\bigcup(1$，$\sqrt{2})$

C．$[-2$，$-1)\bigcup(1$，$2]$　　D．$(-2$，$-1)\bigcup(1$，$2)$

6．（5分）设复数z的幅角的主值为$\frac{2\pi}{3}$，虚部为$\sqrt{3}$，则$z^2=$(　　)

A．$-2-2\sqrt{3}i$　　B．$-2\sqrt{3}-2i$　　C．$2+2\sqrt{3}i$　　D．$2\sqrt{3}+2i$

7．（5分）设双曲线的焦点在x轴上，两条渐近线为$y=\pm\frac{1}{2}x$，则双曲线的离心率$e=$(　　)

A．5　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D．$\frac{5}{4}$

8．（5分）不等式$1<|x+1|<3$的解集为(　　)

A．$(0,2)$　　B．$(-2$，$0)\bigcup(2$，$4)$

C．$(-4,0)$　　D．$(-4$，$-2)\bigcup(0$，$2)$

9．（5分）正三棱锥的底面边长为2，侧面均为直角三角形，则此三棱锥的体积为(　　)

A. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{4}{3}\sqrt{2}$

10.（5 分）在 ΔABC 中，$AB=3,BC=\sqrt{13},AC=4$，则边 AC 上的高为(　　)

A. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$　　B. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $3\sqrt{3}$

11.（5 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & x<1\\ 4-\sqrt{x-1} & x\geqslant 1\end{cases}$ 则使得 $f(x)\geqslant 1$ 的自变量 x 的取值范围为(　　)

A. $(-\infty，-2]\bigcup[0，10]$　　B. $(-\infty，-2]\bigcup[0，1]$

C. $(-\infty，-2]\bigcup[1，10]$　　D. $[-2，0]\bigcup[1，10]$

12.（5 分）将 4 名教师分配到 3 所中学任教，每所中学至少 1 名教师，则不同的分配方案共有(　　)

A. 12 种　　B. 24 种　　C. 36 种　　D. 48 种

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13.（4 分）用平面 α 截半径为 R 的球，如果球心到截面的距离为 $\frac{R}{2}$，那么截得小圆的面积与球的表面积的比值为______.

14.（4 分）函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 的最小值为______.

15.（4 分）已知函数 $y=f(x)$ 是奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=3^x-1$，设 $f(x)$ 的反函数是 $y=g(x)$，则 $g(-8)=$

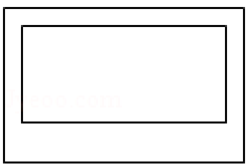
16.（4 分）设 P 是曲线 $y^2=4(x-1)$ 上的一个动点，则点 P 到点 $(0,1)$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离之和的最小值是 ______.

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17.（12 分）已知 α 为锐角，且 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，求 $\frac{\sin 2\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}$ 的值.

18.（12 分）解方程 $4^x+|1-2^x|=11$.

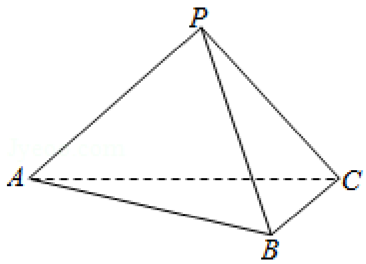
19.（12 分）某村计划建造一个室内面积为 $800m^2$ 的矩形蔬菜温室．在温室内，沿左、右两侧与后侧内墙各保留 $1m$ 宽的通道，沿前侧内墙保留 $3m$ 宽的空地．当矩形温室的边长各为多少时，蔬菜的种植面积最大？最大种植面积是多少？



20．（12 分）三棱锥 $P-ABC$ 中，侧面 PAC 与底面 ABC 垂直，$PA=PB=PC=3$．

（1）求证 $AB\perp BC$；

（2）如果 $AB=BC=2\sqrt{3}$，求 AC 与侧面 PBC 所成角的大小．



21．（12 分）设椭圆 $\dfrac{x^2}{m+1}+y^2=1$ 的两个焦点是 $F_1(-c,0)$，$F_2(c，0)(c>0)$，且椭圆上存在点 P，使得直线 PF_1 与直线 PF_2 垂直．

(I) 求实数 m 的取值范围．

(II) 设 l 是相应于焦点 F_2 的准线，直线 PF_2 与 l 相交于点 Q．若 $\dfrac{|QF_2|}{|PF_2|}=2-\sqrt{3}$，求直线 PF_2 的方程．

22．（14 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足：$S_n=2a_n+(-1)^n$，$n\geq 1$．

（1）写出求数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项 a_1，a_2，a_3；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（3）证明：对任意的整数 $m>4$，有 $\dfrac{1}{a_4}+\dfrac{1}{a_5}+\ldots+\dfrac{1}{a_m}<\dfrac{7}{8}$．

2004年高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1．（5分）设集合 $M=\{(x,y)\,|\,x^{2}+y^{2}=1$，$x\in R$，$y\in R\}$，$N=\{(x,y)\,|\,x^{2}-y=0$，$x\in R$，$y\in R\}$，则集合 $M\bigcap N$ 中元素的个数为(　　)

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

【解答】解：根据题意，$M\bigcap N=\{(x,y)\,|\,x^{2}+y^{2}=1$，$x\in R$，$y\in R\}\bigcap\{(x,y)\,|\,x^{2}-y=0$，$x\in R$，$y\in R\}==\{(x,y)\,|\begin{cases}x^{2}+y^{2}=1\\x^{2}-y=0\end{cases}\}$

将 $x^{2}-y=0$ 代入 $x^{2}+y^{2}=1$，

得 $y^{2}+y-1=0$，$\triangle=5>0$，

所以方程组有两组解，

因此集合 $M\bigcap N$ 中元素的个数为2个，

故选：B．

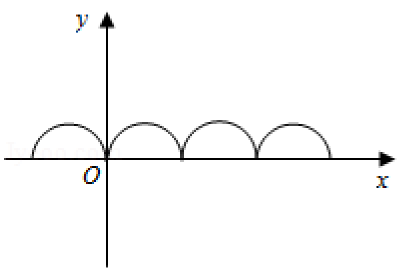
2．（5分）函数 $y=|\sin\frac{x}{2}|$ 的最小正周期是(　　)

A．$\frac{\pi}{2}$　　　　B．π　　　　C．2π　　　　D．4π

【解答】解：对于 $y=\sin\frac{x}{2}$，$T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$，

函数 $y=|\sin\frac{x}{2}|$ 是函数 $y=\sin\frac{x}{2}x$ 轴上方的图象不动将 x 轴下方的图象向上对折得到的，如图示，故 $T'=\frac{1}{2}T=2\pi$，

故选：C．



3．（5 分）设数列$\{a_n\}$是等差数列，$a_2=-6$，$a_8=6$，S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，则(　　)

A．$S_4<S_5$　　B．$S_4=S_5$　　C．$S_6<S_5$　　D．$S_6=S_5$

【解答】解：$\because a_2=-6$，$a_8=6$

$\therefore a_1+d=-6$，$a_1+7d=6$

得$a_1=-8$，$d=2$

$\therefore S_4=S_5$

故选：B．

4．（5 分）圆$x^2+y^2-4x=0$在点$P(1,\sqrt{3})$处的切线方程为(　　)

A．$x+\sqrt{3}y-2=0$　　B．$x+\sqrt{3}y-4=0$　　C．$x-\sqrt{3}y+4=0$　　D．$x-\sqrt{3}y+2=0$

【解答】解：法一：

$x^2+y^2-4x=0$

$y=kx-k+\sqrt{3}\Rightarrow x^2-4x+(kx-k+\sqrt{3})^2=0$．

该二次方程应有两相等实根，即$\triangle=0$，解得$k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

$\therefore y-\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$，

即$x-\sqrt{3}y+2=0$．

法二：

$\because$点$(1,\sqrt{3})$在圆$x^2+y^2-4x=0$上，

$\therefore$点P为切点，从而圆心与P的连线应与切线垂直．

又$\because$圆心为$(2,0)$，$\therefore\dfrac{0-\sqrt{3}}{2-1}\bullet k=-1$．

解得$k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$切线方程为$x-\sqrt{3}y+2=0$．

故选：D．

5．（5 分）函数$y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)}$的定义域是(　　)

A. $[-\sqrt{2}$，$-1)\cup(1$，$\sqrt{2}]$　　B. $(-\sqrt{3}$，$-1)\cup(1$，$\sqrt{2})$

C. $[-2$，$-1)\cup(1$，$2]$　　D. $(-2$，$-1)\cup(1$，$2)$

【解答】解：$\begin{cases}x^2-1>0\\ log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2>1\\ x^2-1\leqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2>1\\ x^2\leqslant 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1或x<-1\\ -\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow$

$-\sqrt{2}\leqslant x<-1$或$1<x\leqslant\sqrt{2}$.

$\therefore y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)}$的定义域为$[-\sqrt{2}$，$-1)\cup(1$，$\sqrt{2}]$.

故选：A.

6.（5 分）设复数z的幅角的主值为$\dfrac{2\pi}{3}$，虚部为$\sqrt{3}$，则$z^2=($　　$)$

A. $-2-2\sqrt{3}i$　　B. $-2\sqrt{3}-2i$　　C. $2+2\sqrt{3}i$　　D. $2\sqrt{3}+2i$

【解答】解：$\because$复数z的幅角的主值为$\dfrac{2\pi}{3}$

设复数$z=r(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3})=-\dfrac{1}{2}r+\dfrac{\sqrt{3}}{2}r$

$\because$虚部为$\sqrt{3}$

$\therefore\dfrac{\sqrt{3}}{2}r=\sqrt{3}$

$\therefore r=2$

$\therefore z=2(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3})$

$\therefore z^2=4(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3})=-2-2\sqrt{3}i$

故选：A.

7.（5 分）设双曲线的焦点在x轴上，两条渐近线为$y=\pm\dfrac{1}{2}x$，则双曲线的离心率$e=($　　$)$

A. 5　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\dfrac{5}{4}$

【解答】解：依题意可知$\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}$，求得$a=2b$

$\therefore c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}b$

$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

故选：C.

8.（5 分）不等式$1<|x+1|<3$的解集为$($　　$)$

A. $(0,2)$　　　　　　　　　　　　B. $(-2，0)\cup(2，4)$

C. $(-4,0)$　　　　　　　　　　　　D. $(-4，-2)\cup(0，2)$

【解答】解：$1<|x+1|<3\Leftrightarrow 1<|x+1|^2<9$

即$\begin{cases}(x+1)^2>1\\(x+1)^2<9\end{cases}$即$\begin{cases}x^2+2x>0\\x^2+2x-8<0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x\langle -2或x\rangle 0\\-4<x<2\end{cases}$，即$x\in(-4，-2)\cup(0，2)$

解法二：$1<|x+1|<3\Leftrightarrow\begin{cases}|x+1|>1\\|x+1|<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\langle -1或x+1\rangle 1\\-3<x+1<3\end{cases}$

解得$x\in(-4，-2)\cup(0，2)$

故选：D.

9.（5 分）正三棱锥的底面边长为 2，侧面均为直角三角形，则此三棱锥的体积为(　　)

A. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$　　　　B. $\sqrt{2}$　　　　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　　　D. $\frac{4}{3}\sqrt{2}$

【解答】解：由题意正三棱锥的底面边长为 2，侧面均为直角三角形，

可知：侧棱长为$\sqrt{2}$，三条侧棱两两垂直，

所以此三棱锥的体积为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

故选：C.

10.（5 分）在ΔABC中，$AB=3,BC=\sqrt{13},AC=4$，则边AC上的高为(　　)

A. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$　　　　B. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$　　　　C. $\frac{3}{2}$　　　　D. $3\sqrt{3}$

【解答】解：由点B向AC作垂线，交点为D.

设$AD=x$，则$CD=4-x$，

$\therefore BD=\sqrt{9-x^2}=\sqrt{13-(4-x)^2}$，解得$x=\frac{3}{2}$

$\therefore BD=\sqrt{9-x^2}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

故选：B.

11.（5 分）设函数$f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & x<1\\4-\sqrt{x-1} & x\ldots 1\end{cases}$则使得$f(x)\ldots 1$的自变量$x$的取值范围为(　　)

A．$(-\infty，-2]\bigcup[0，10]$　　B．$(-\infty，-2]\bigcup[0，1]$　　C．$(-\infty，-2]\bigcup[1，10]$

D．$[-2，0]\bigcup[1，10]$

【解答】解：$f(x)\geqslant 1$ 等价于 $\begin{cases}x<1\\(x+1)^2\geqslant 1\end{cases}$ 解得：$x\leqslant -2$ 或 $0\leqslant x<1$．

或 $\begin{cases}x\geqslant 1\\4-\sqrt{x-1}\geqslant 1\end{cases}$ 解得：$1\leqslant x\leqslant 10$

综上所述，$x\leqslant -2$ 或 $0\leqslant x\leqslant 10$．

故选：A．

12．（5 分）将 4 名教师分配到 3 所中学任教，每所中学至少 1 名教师，则不同的分配方案共有(　　)

A．12 种　　B．24 种　　C．36 种　　D．48 种

【解答】解：将 4 名教师分配到 3 所中学任教，每所中学至少 1 名教师，

只有一种结果 1，1，2，

首先从 4 个人中选 2 个作为一个元素，

使它与其他两个元素在一起进行排列，

共有 $C_4^2A_3^3=36$ 种结果，

故选：C．

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13．（4 分）用平面 α 截半径为 R 的球，如果球心到截面的距离为 $\dfrac{R}{2}$，那么截得小圆的面积与球的表面积的比值为__$3:16$__．

【解答】解：小圆半径是：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}R$，小圆的面积是：$\dfrac{3\pi}{4}R^2$，

球的表面积是；$4\pi R^2$

截得小圆的面积与球的表面积的比值为：$\dfrac{3\pi}{4}R^2:4\pi R^2=3:16$

故答案为：$3:16$

14．（4 分）函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 的最小值为__1__．

【解答】解：$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

$=2(\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x)$

$=2\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$，

$\because x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，

$\therefore x+\dfrac{\pi}{3}\in$【$\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}$】，

$\therefore 2\sin(x+\dfrac{\pi}{3})\in[1,2]$，

$\therefore$最小值为 1，

故答案为：1．

15．（4 分）已知函数 $y=f(x)$ 是奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=3^{x}-1$，设 $f(x)$ 的反函数是 $y=g(x)$，则 $g(-8)=$ -2 __

【解答】解：法一：当 $x<0$ 时，$-x>0$，由已知 $f(-x)=3^{-x}-1$．

又 $\because f(x)$ 是奇函数，

$\therefore f(-x)=-f(x)$，即 $-f(x)=3^{-x}-1$．

$\therefore f(x)=1-3^{-x}$．

$$\therefore f(x)=\begin{cases}3^{x}-1 \\ 1-3^{-x}\end{cases}\begin{cases}x\geqslant 0 \\ x<0.\end{cases}$$

$$\therefore f^{-1}(x)=\begin{cases}\log_3(x+1) & x\geqslant 0 \\ -\log_3(1-x) & x<0.\end{cases}$$

$\therefore f^{-1}(-8)=g(-8)=-\log_3(1+8)=-\log_3 3^{2}=-2$．

法二：当 $x<0$ 时，$-x>0$，由已知 $f(-x)=3^{-x}-1$．

又 $\because f(x)$ 是奇函数，

$\therefore f(-x)=-f(x)$，即 $-f(x)=3^{-x}-1$．

$\therefore f(x)=1-3^{-x}$．根据反函数定义

令 $1-3^{-x}=-8$ 得 $x=-2$，即：$g(-8)=-2$

答案为：-2

16．（4 分）设 P 是曲线 $y^{2}=4(x-1)$ 上的一个动点，则点 P 到点 $(0,1)$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离之和的最

小值是 __$\sqrt{5}$__.

【解答】解：$y^2=4(x-1)$ 的图象是以 y 轴为准线，$(2,0)$ 为焦点的抛物线，$\therefore$ 当点 P 为 $(0,1)$ 点与 $(2,0)$ 点的连线与抛物线的交点时，距离和最小，

最小值为：$\sqrt{(2-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{5}$.

故答案为：$\sqrt{5}$.

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17．（12 分）已知 α 为锐角，且 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，求 $\dfrac{\sin 2\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}$ 的值．

【解答】解：$\because$ $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，α 为锐角 $\therefore$ $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ $\dfrac{\sin 2\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=\dfrac{\sin\alpha(2\cos^2\alpha-1)}{2\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha}=\dfrac{1}{2\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

18．（12 分）解方程 $4^x+|1-2^x|=11$.

【解答】解：当 $x\leqslant 0$ 时，有：$4^x+1-2^x=11$，

化简得：$(2^x)^2-2^x-10=0$，

解之得：$2^x=\dfrac{1+\sqrt{41}}{2}$ 或 $2^x=\dfrac{1-\sqrt{41}}{2}$（舍去）.

又 $\because$ $x\leqslant 0$ 得 $2^x\leqslant 1$，故 $2^x=\dfrac{1+\sqrt{41}}{2}$ 不可能舍去．

当 $x>0$ 时，有：$4^x-1+2^x=11$，

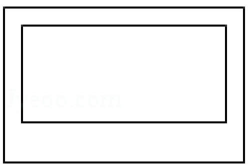
化简得：$(2^x)^2+2^x-12=0$，

解之得：$2^x=3$ 或 $2^x=-4$（舍去）

$\therefore 2^x=3$，$\therefore x=\log_2 3$，

综上可得，原方程的解为 $x=\log_2 3$.

19．（12 分）某村计划建造一个室内面积为 $800m^2$ 的矩形蔬菜温室．在温室内，沿左、右两侧与后侧内墙各保留 $1m$ 宽的通道，沿前侧内墙保留 $3m$ 宽的空地．当矩形温室的边长各为多少时，蔬菜的种植面积最大？最大种植面积是多少？



【解答】解：设矩形温室的左侧边长为am，后侧边长为bm，则$ab=800$.

蔬菜的种植面积

$S=(a-4)(b-2)$

$=ab-4b-2a+8$

$=808-2(a+2b)$.

所以$S\leqslant 808-4\sqrt{2ab}=648(m^2)$

当且仅当$a=2b$，即$a=40(m)$，$b=20(m)$时，

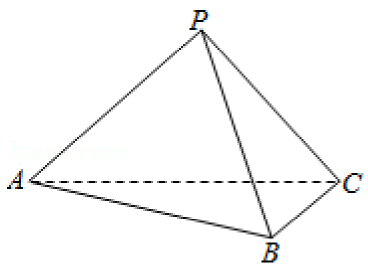
$S_{最大值}=648\left(m^2\right)$.

答：当矩形温室的左侧边长为$40m$，后侧边长为$20m$时，蔬菜的种植面积最大，最大种植面积为$648m^2$.

20．（12 分）三棱锥$P-ABC$中，侧面PAC与底面ABC垂直，$PA=PB=PC=3$.

（1）求证$AB\perp BC$；

（2）如果$AB=BC=2\sqrt{3}$，求AC与侧面PBC所成角的大小．



【解答】解：（1）证明：取AC中点O，连接PO、BO.

$\because PA=PC\therefore PO\perp AC$

又$\because$侧面$PAC\perp$底面ABC

$\therefore PO\perp$底面ABC

又$PA=PB=PC\therefore AO=BO=CO$

$\therefore \Delta ABC$为直角三角形$\therefore AB\perp BC$

（2）解：取BC的中点为M，连接OM，PM，所以有$OM=\dfrac{1}{2}AB=\sqrt{3}$，$AO=\dfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$

$\therefore PO=\sqrt{PA^2-AO^2}=\sqrt{3}$

由（1）有$PO\perp$平面ABC，$OM\perp BC$，由三垂线定理得$PM\perp BC$

$\therefore$平面$POM\perp$平面PBC，又$\because PO=OM=\sqrt{3}$.

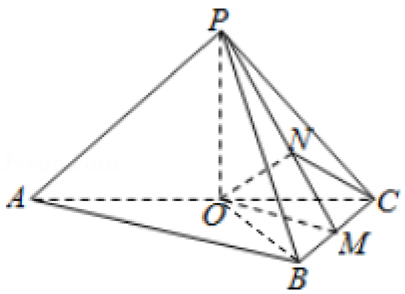
$\therefore \Delta POM$ 是等腰直角三角形，取 PM 的中点 N，连接 ON， NC

则 $ON \perp PM$，又$\because$平面 $POM \perp$ 平面 PBC，且交线是 PM，$\therefore ON \perp$ 平面 PBC

$\therefore \angle OCN$ 即为 AC 与平面 PBC 所成的角 $.ON=\dfrac{1}{2}PM=\dfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2},OC=\sqrt{6}$

$\therefore \sin\angle OCN=\dfrac{ON}{OC}=\dfrac{1}{2}$ $\therefore$ $\angle ONC=\dfrac{\pi}{6}$.

故 AC 与平面 PBC 所成的角为 $\dfrac{\pi}{6}$.



21.（12 分）设椭圆 $\dfrac{x^2}{m+1}+y^2=1$ 的两个焦点是 $F_1(-c,0)$， $F_2(c$， $0)(c>0)$，且椭圆上存在点 P，使得直线 PF_1 与直线 PF_2 垂直.

(I) 求实数 m 的取值范围.

(II) 设 l 是相应于焦点 F_2 的准线，直线 PF_2 与 l 相交于点 Q．若 $\dfrac{|QF_2|}{|PF_2|}=2-\sqrt{3}$，求直线 PF_2 的方程.

【解答】解：（1）$\because$ 直线 $PF_1\perp$ 直线 PF_2

$\therefore$ 以 O 为圆心以 c 为半径的圆：$x^2+y^2=c^2$ 与椭圆：$\dfrac{x^2}{m+1}+y^2=1$ 有交点．即 $\begin{cases}x^2+y^2=c^2\\ \dfrac{x^2}{m+1}+y^2=1\end{cases}$ 有解

又$\because c^2=a^2-b^2=m+1-1=m>0$

$\therefore$ $0\leqslant x^2=\dfrac{m^2-1}{m}<a^2=m+1$

$\therefore m>0$

（2）设 $P(x_0$， $y_0)$，直线 PF_2 方程为： $y=k(x-c)$，

$\because$ 直线 l 的方程为： $x=\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{m+1}{\sqrt{m}}$，

准线 L 的方程为 $x=\dfrac{m+1}{\sqrt{m}}$，

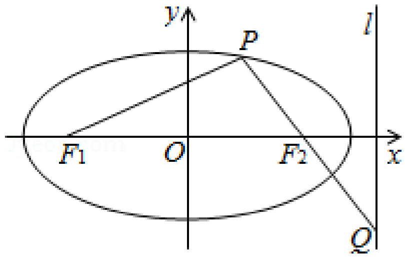
设点 Q 的坐标为 $(x_1$， $y_1)$，则 $x_1=\dfrac{m+1}{\sqrt{m}}$，

$\dfrac{|QF_2|}{|PF_2|}=\dfrac{x_1-c}{c-x_0}=m+\sqrt{m^2-1}=2-\sqrt{3}$ ②

解可得 $m=2$，从而 $x_0=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$， $y_0=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， $c=\sqrt{2}$，

则 $k_{PF_2}=\pm(2+\sqrt{3})$ 或 $k_{PF_2}=\pm(\sqrt{3}-2)$，

得到 PF_2 的方程 $y=\pm(\sqrt{3}-2)(x-\sqrt{2})$ 或 $y=\pm(\sqrt{3}+2)(x-\sqrt{2})$．



22．（14 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足： $S_n=2a_n+(-1)^n$， $n\geqslant1$．

（1）写出求数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项 a_1， a_2， a_3；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（3）证明：对任意的整数 $m>4$，有 $\dfrac{1}{a_4}+\dfrac{1}{a_5}+\ldots+\dfrac{1}{a_m}<\dfrac{7}{8}$．

【解答】解：（1）当 $n=1$ 时，有： $S_1=a_1=2a_1+(-1)\Rightarrow a_1=1$；

当 $n=2$ 时，有： $S_2=a_1+a_2=2a_2+(-1)^2\Rightarrow a_2=0$；

当 $n=3$ 时，有： $S_3=a_1+a_2+a_3=2a_3+(-1)^3\Rightarrow a_3=2$；

综上可知 $a_1=1$， $a_2=0$， $a_3=2$；

（2）由已知得： $a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n+(-1)^n-2a_{n-1}-(-1)^{n-1}$

化简得： $a_n=2a_{n-1}+2(-1)^{n-1}$

上式可化为： $a_n+\dfrac{2}{3}(-1)^n=2[a_{n-1}+\dfrac{2}{3}(-1)^{n-1}]$

故数列 $\{a_n+\dfrac{2}{3}(-1)^n\}$ 是以 $a_1+\dfrac{2}{3}(-1)^1$ 为首项，公比为 2 的等比数列．

故 $a_n+\dfrac{2}{3}(-1)^n=\dfrac{1}{3}2^{n-1}$ $\therefore$ $a_n=\dfrac{1}{3}\bullet2^{n-1}-\dfrac{2}{3}(-1)^n=\dfrac{2}{3}[2^{n-2}-(-1)^n]$

数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为： $a_n=\dfrac{2^{n-1}}{3}-\dfrac{2}{3}(-1)^n$．

（3）由已知得： $\dfrac{1}{a_4}+\dfrac{1}{a_5}+\ldots+\dfrac{1}{a_m}==3[\dfrac{1}{2^3-2}+\dfrac{1}{2^4+2}+\ldots+\dfrac{1}{2^{m-1}-(-1)^m}]$

$$=3[\frac{1}{6}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^8}+\ldots+\frac{1}{2^{m-1}}]<3(\frac{1}{6}+\frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{2}})=\frac{7}{8}$$

故 $\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\ldots+\frac{1}{a_m}<\frac{7}{8}(m>4)$.