

# 1998 年北京高考文科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分, 满分 150 分, 考试 120 分钟.

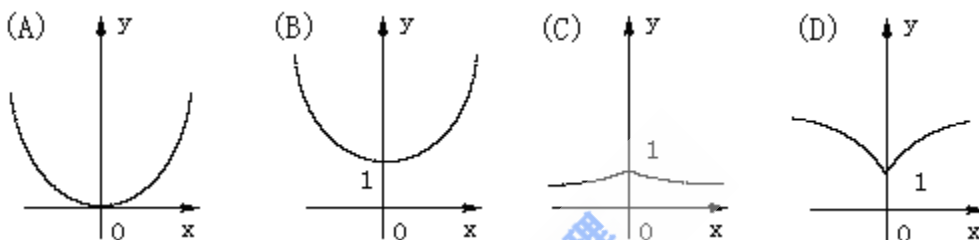
## 第 I 卷(选择题共 65 分)

一. 选择题: 本大题共 15 小题; 第(1)–(10)题每小题 4 分, 第(11)–第(15)题每小题 5 分, 65 分. 在每小题给出四项选项, 只一项符合题目要求的.

(1)  $\sin 600^\circ$  ( )

- (A)  $\frac{1}{2}$                       (B)  $-\frac{1}{2}$                       (C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       (D)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) 函数  $y=a^{|x|}$  ( $a>1$ ) 的图像是 ( )



(3) 已知直线  $x=a$  ( $a>0$ ) 和圆  $(x-1)^2+y^2=4$  相切, 那么  $a$  的值是 ( )

- (A) 5                      (B) 4                      (C) 3                      (D) 2

(4) 两条直线  $A_1x+B_1y+C_1=0$ ,  $A_2x+B_2y+C_2=0$  垂直的充要条件是 ( )

- (A)  $A_1A_2+B_1B_2=0$       (B)  $A_1A_2-B_1B_2=0$       (C)  $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=-1$       (D)  $\frac{B_1B_2}{A_1A_2}=1$

(5) 函数  $f(x)=\frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ ) 的反函数  $f^{-1}(x)=$  ( )

- (A)  $x(x \neq 0)$                       (B)  $\frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ )                      (C)  $-x(x \neq 0)$                       (D)  $-\frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ )

(6) 已知点  $P(\sin \alpha - \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha)$  在第一象限, 则  $[0, 2\pi]$  内  $\alpha$  的取值范围是 ( )

- (A)  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$                       (B)  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$   
 (C)  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$                       (D)  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi)$

(7) 已知圆锥的全面积是底面积的 3 倍, 那么该圆锥的侧面积展开图扇形的圆心角为 ( )

- (A)  $120^\circ$                       (B)  $150^\circ$                       (C)  $180^\circ$                       (D)  $240^\circ$

(8) 复数  $-i$  的一个立方根是  $i$ , 它的另外两个立方根是 ( )

- (A)  $\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$                       (B)  $-\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$                       (C)  $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$                       (D)  $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

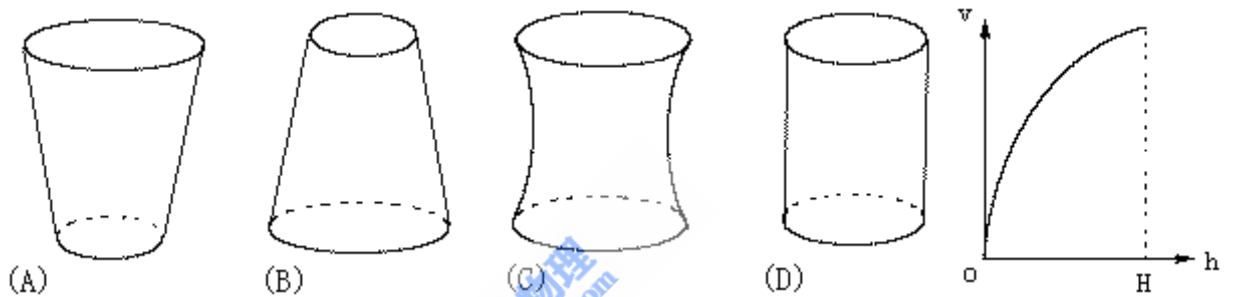
(9) 如果棱台的两底面积是  $S, S'$ ，中截面的面积是  $S_0$ ，那么 ( )

- (A)  $2\sqrt{S_0} = \sqrt{S} + \sqrt{S'}$  (B)  $S_0 = \sqrt{S'S}$   
 (C)  $2S_0 = S + S'$  (D)  $S_0^2 = 2S'S$

(10) 2 名医生和 4 名护士被分配到 2 所学校为学生体检，每校分配 1 名医生和 2 名护士. 不同的分配方法共 ( )

- (A) 6 种 (B) 12 种 (C) 18 种 (D) 24 种

(11) 向高为  $H$  的水瓶中注水，注满为止，如果注水量  $V$  与水深  $h$  的函数关系的图像如右图所示，那么水瓶的形状是 ( )



(12) 椭圆  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$  的焦点为  $F_1$ ，点  $P$  在椭圆上，如果线段  $PF_1$  的中点  $M$  在  $y$  轴上，那么点  $M$  的纵坐标是 ( )

- (A)  $\pm \frac{\sqrt{3}}{4}$  (B)  $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$  (C)  $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  (D)  $\pm \frac{3}{4}$

(13) 球面上有 3 个点，其中任意两点的球面距离都等于大圆周长为  $\frac{1}{6}$ ，经过这 3 个点的小圆的周长为  $4\pi$ ，那么这个球的半径为 ( )

- (A)  $4\sqrt{3}$  (B)  $2\sqrt{3}$  (C) 2 (D)  $\sqrt{3}$

(14) 一个直角三角形三内角的正弦值成等比数列，其最小内角的正弦值为 ( )

- (A)  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+2}}{2}$

(15) 等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $-\frac{1}{2}$ ，前  $n$  项的和  $S_n$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{a_1}$ ，那么  $\frac{1}{a_1}$  的值为 ( )

- (A)  $\pm \sqrt{3}$  (B)  $\pm \frac{3}{2}$  (C)  $\pm \sqrt{2}$  (D)  $\pm \frac{\sqrt{6}}{2}$

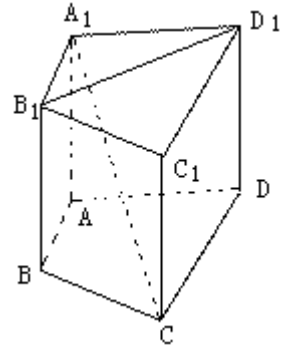
二. 填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分，把答案填在题中横线上.

(16) 设圆过双曲线  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$  的一个顶点和一个焦点，圆心在双曲线上，则

圆心到双曲线中心距离是\_\_\_\_\_.

(17)  $(x+2)^{10}(x^2-1)$  的展开的  $x^{10}$  系数为\_\_\_\_\_ (用数字作答).

(18) 如图，在直四棱柱  $A_1B_1C_1D_1-ABCD$  中，当底面四边形  $ABCD$  满足条件\_\_\_\_\_时，有  $A_1C \perp B_1D_1$ . (注：填上你认为正确的一种条件即可，不必考试所有可能的情形.)



(19) 关于函数  $f(x) = 4\sin(2x + \frac{\pi}{3})$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), 有下列命题

①  $y=f(x)$  的表达式可改写为  $y=4\cos(2x - \frac{\pi}{6})$ ; ②  $y=f(x)$  是以  $2\pi$  为最小正周期的周期函数;

③  $y=f(x)$  的图像关于点  $(-\frac{\pi}{6}, 0)$  对称; ④  $y=f(x)$  的图像关于直线  $x = -\frac{\pi}{6}$  对称.

其中正确的命题的序号是\_\_\_\_\_. (注：把你认为正确的命题的序号都填上.)

三. 解答题：本大题共 6 小题；共 69 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(20) (本小题满分 10 分)

设  $a \neq b$ , 解关于  $x$  的不等式  $a^2x + b^2(1-x) \geq [ax + b(1-x)]^2$ .

(21) (本小题满分 11 分)

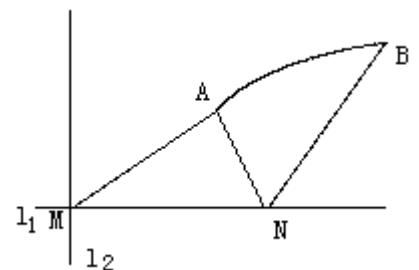
在  $\triangle ABC$  中,  $a, b, c$  分别是角  $A, B, C$  的对边, 设  $a+c=2b, A-C=\frac{\pi}{3}$ , 求  $\sin B$  的

值. 以下公式供解题时参考:

$$\begin{aligned} \sin \theta + \sin \varphi &= 2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \cos \frac{\theta - \varphi}{2}, & \sin \theta - \sin \varphi &= 2 \cos \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \frac{\theta - \varphi}{2}, \\ \cos \theta + \cos \varphi &= 2 \cos \frac{\theta + \varphi}{2} \cos \frac{\theta - \varphi}{2}, & \cos \theta - \cos \varphi &= -2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \frac{\theta - \varphi}{2}. \end{aligned}$$

(22) (本小题满分 12 分)

如图, 直线  $l_1$  和  $l_2$  相交于点  $M, l_1 \perp l_2$ , 点  $N \in l_1$ . 以  $A, B$  为端点的曲线段  $C$  上的任一点到  $l_2$  的距离与到点  $N$  的距离相等. 若

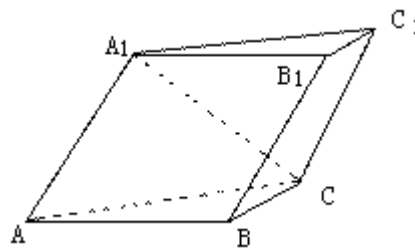


$\triangle AMN$ 为锐角三角形,  $|AM|=\sqrt{17}$ ,  $|AN|=3$ , 且 $|MN|=6$ . 建立适当的坐标系, 求曲线  $C$  的方程.

(23) (本小题满分 12 分)

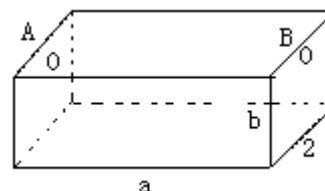
已知斜三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  的侧面  $A_1ACC_1$  与底面  $ABC$  垂直,  $\angle ABC=90^\circ$ ,  $BC=2$ ,  $AC=2\sqrt{3}$ , 且  $AA_1 \perp A_1C$ ,  $AA_1=A_1C$ .

- (I) 求侧棱  $A_1A$  与底面  $ABC$  所成角的大小;
- (II) 求侧面  $A_1ABB_1$  与底面  $ABC$  所成二面角的大小;
- (III) 求侧棱  $B_1B$  和侧面  $A_1ACC_1$  的距离.



(24) (本小题满分 12 分)

如图, 为处理含有某种杂质的污水, 要制造一底宽为 2 米的无盖长方体沉淀箱. 污水从  $A$  孔流入, 经沉淀后从  $B$  孔流出. 设箱体的长度为  $a$  米, 高度为  $b$  米. 已知流出的水中该杂质的质量分数与  $a, b$  的乘积  $ab$  成反比. 现有制箱材料 60 平方米. 问当  $a, b$  各为多少米时, 经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小 ( $A, B$  孔的面积忽略不计).



(25) (本小题满分 12 分)

已知数列  $\{b_n\}$  是等差数列,  $b_1=1$ ,  $b_1+b_2+\dots+b_{10}=100$ .

(I) 求数列  $\{b_n\}$  的通项  $b_n$ ;

(II) 设数列  $\{a_n\}$  的通项  $a_n = \lg(1 + \frac{1}{b_n})$ , 记  $S_n$  是数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项的和. 试比较  $S_n$  与

$\frac{1}{2} \lg b_{n+1}$  的大小, 并证明你的结论.

1998 年普通高等学校招生全国统一考试

数学试题(文史类)参考解答及评分标准

一. 选择题 本题考查基本知识和基本运算. 第(1) - (10)题每小题 4 分, 第(11) - (15)题

每小题 5 分. 满分 65 分.

- (1) D (2) B (3) C (4) A (5) B (6) B (7) C (8) D (9)  
A (10) B (11) B (12) A (13) B (14) C (15) D

二. 填空题: 本题考查基本知识和基本运算. 每小题 4 分, 满分 16 分.

(16)  $\frac{16}{3}$  (17)  $-5120$

(18)  $AC \perp BD$ , 或任何能推导出这个条件的其他条件. 例如  $ABCD$  是正方形, 菱形等

(19) ①, ③注: 第(19)题多填、漏填的错填均给 0 分.

三. 解答题:

(20) 本小题主要考查不等式基本知识, 不等式的解法. 满分 10 分.

解: 将原不等式化为

$$(a^2 - b^2)x + b^2 \geq (a - b)^2 x^2 + 2(a - b)bx + b^2,$$

移项, 整理后得  $(a - b)^2(x^2 - x) \leq 0$ ,

$$\because a \neq b \text{ 即 } (a - b)^2 > 0,$$

$$\therefore x^2 - x \leq 0,$$

$$\text{即 } x(x - 1) \leq 0.$$

解此不等式, 得解集  $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$ .

(21) 本小题考查正弦定理, 同角三角函数基本公式, 诱导公式等基础知识, 考查利用三角公式进行恒等变形的技能及运算能力. 满分 11 分.

解: 由正弦定理和已知条件  $a + c = 2b$  得

$$\sin A + \sin C = 2\sin B.$$

$$\text{由和差化积公式得 } 2\sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = 2\sin B.$$

$$\text{由 } A+B+C = \pi, \text{ 得 } \frac{\sin(A+C)}{2} = \frac{\cos B}{2},$$

$$\text{又 } A-C = \frac{\pi}{3}, \text{ 得 } \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{B}{2} = \sin B,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{B}{2} = 2\sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}.$$

$$\because 0 < \frac{B}{2} < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\cos B}{2} \neq 0,$$

$$\therefore \sin \frac{B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{从而 } \cos \frac{B}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{B}{2}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{4} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

(22) 本小题主要考查根据所给条件选择适当的坐标系, 求曲线方程的解析几何的基本思想. 考查抛物线的概念和性质, 曲线与方程的关系以及综合运用知识的能力. 满分 12 分.

解法一: 如图建立坐标系, 以  $l_1$  为  $x$  轴,  $MN$  的垂直平分线为  $y$  轴, 点  $O$  为坐标原点.

依题意知: 曲线段  $C$  是以点  $N$  为焦点, 以  $l_2$  为准线的抛物线的一段, 其中  $A$ 、 $B$  分别为  $C$  的端点.

设曲线段  $C$  的方程为

$$y^2 = 2px \quad (p > 0), \quad (x_A \leq x \leq x_B, y > 0),$$

其中  $x_A$ ,  $x_B$  分别为  $A$ ,

$B$  的横坐标,  $P = |MN|$ .

$$\text{所以 } M \left(-\frac{P}{2}, 0\right), N \left(\frac{P}{2}, 0\right).$$

$$\text{由 } |AM| = \sqrt{17}, |AN| = 3 \text{ 得}$$

$$\left(x_A + \frac{P}{2}\right)^2 + 2Px_A = 17, \quad \textcircled{1}$$

$$\left(x_A - \frac{P}{2}\right)^2 + 2Px_A = 9. \quad \textcircled{2}$$

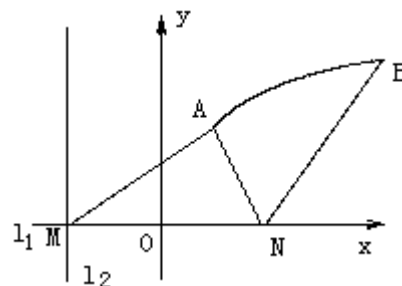
由①、②两式联立解得  $x_A = \frac{4}{P}$ , 再将其代入①式并由  $p > 0$  解得

$$\begin{cases} p = 4 \\ x_A = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} p = 2 \\ x_A = 2 \end{cases}.$$

因为  $\triangle AMN$  是锐角三角形, 所以  $\frac{P}{2} > x_A$ , 故舍去  $\begin{cases} p = 2 \\ x_A = 2 \end{cases}$ .

$$\therefore P = 4, x_A = 1.$$

$$\text{由点 } B \text{ 在曲线段 } C \text{ 上, 得 } x_B = |BM| - \frac{P}{2} = 4.$$



综上得曲线段  $C$  的方程为  $y^2=8x$  ( $1 \leq x \leq 4, y > 0$ ).

解法二：如图建立坐标系，分别以  $l_1, l_2$  为  $x, y$  轴， $M$  为坐标原点.

作  $AE \perp l_1, AD \perp l_2, BF \perp l_2$ ，垂足分别为  $E, D, F$ .

设  $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), N(x_N, 0)$ .

依题意有

$$x_A = |ME| = |DA| = |AN| = 3,$$

$$y_A = |DM| = \sqrt{|AM|^2 - |DA|^2} = 2\sqrt{2}, \text{ 由于 } \triangle AMN \text{ 为锐角三角形, 故}$$



有

$$x_N = |AE| + |EN| = 4.$$

$$= |ME| + \sqrt{|AN|^2 - |AE|^2} = 4$$

$$x_B = |BF| = |BN| = 6.$$

设点  $P(x, y)$  是曲线段  $C$  上任一点，则由题意知  $P$  属于集合

$$\{(x, y) \mid (x - x_N)^2 + y^2 = x^2, x_A \leq x \leq x_B, y > 0\}.$$

故曲线段  $C$  的方程

$$y^2 = 8(x - 2) \quad (3 \leq x \leq 6, y > 0).$$

(23) 本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系，棱柱的性质，空间的角和距离的概念，逻辑思维能力、空间想象能力及运算能力。满分 12 分。

注：题中赋分为得到该结论时所得分值，不给中间分。

解：(I) 作  $A_1D \perp AC$ ，垂足为  $D$ ，由面  $A_1ACC_1 \perp$  面  $ABC$ ，得  $A_1D \perp$  面  $ABC$ ，

$\therefore \angle A_1AD$  为  $A_1A$  与面  $ABC$  所成的角。

$\because AA_1 \perp A_1C, AA_1 = A_1C,$

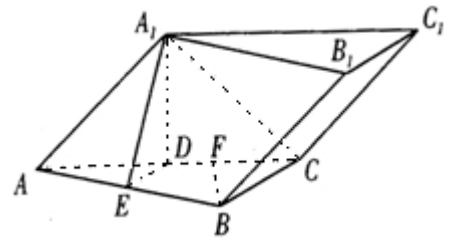
$\therefore \angle A_1AD = 45^\circ$  为所求。

(II) 作  $DE \perp AB$ ，垂足为  $E$ ，连  $A_1E$ ，则由  $A_1D \perp$  面  $ABC$ ，得  $A_1E \perp AB$ 。

$\therefore \angle A_1ED$  是面  $A_1ABB_1$  与面  $ABC$  所成二面角的平面角。

由已知， $AB \perp BC$ ，得  $ED \parallel BC$ 。又  $D$  是  $AC$  的中点， $BC = 2, AC = 2\sqrt{3}$ ，

$$\therefore DE = 1, AD = A_1D = \sqrt{3}, \operatorname{tg} \angle A_1ED = \frac{A_1D}{DE} = \sqrt{3}.$$



故  $\angle A_1ED=60^\circ$  为所求.

(III) 作  $BF \perp AC$ ,  $F$  为垂足, 由面  $A_1ACC_1 \perp$  面  $ABC$ , 知  $BF \perp$  面  $A_1ACC_1$ .

$\because B_1B \parallel$  面  $A_1ACC_1$ ,

$\therefore BF$  的长是  $B_1B$  和面  $A_1ACC_1$  的距离.

在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 2\sqrt{2}$ ,

$$\therefore BF = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ 为所求.}$$

(24) 本小题主要考查综合应用所学数学知识、思想和方法解决实际问题的能力, 考查建立函数关系、不等式性质、最大值、最小值等基础知识. 满分 12 分.

解法一: 设  $y$  为流出的水中杂质的质量分数, 则  $y = \frac{k}{ab}$ , 其中  $k > 0$  为比例系数, 依题意, 即所求的  $a, b$  值使  $y$  值最小.

根据题设, 有  $4b + 2ab + 2a = 60$  ( $a > 0, b > 0$ ),

$$\text{得 } b = \frac{30 - a}{2 + a} \quad (0 < a < 30, \quad \textcircled{1})$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } y &= \frac{k}{ab} = \frac{k}{\frac{30a - a^2}{2 + a}} \\ &= \frac{k}{-a + 32 - \frac{64}{a + 2}} \\ &= \frac{k}{34 - \left(a + 2 + \frac{64}{a + 2}\right)} \\ &\geq \frac{k}{34 - 2\sqrt{\left(a + 2\right) \cdot \frac{64}{a + 2}}} \\ &= \frac{k}{18} \end{aligned}$$

当  $a + 2 = \frac{64}{a + 2}$  时取等号,  $y$  达最小值.

这时  $a = 6, a = -10$  (舍去).

将  $a = 6$  代入  $\textcircled{1}$  式得  $b = 3$ .

故当  $a$  为 6 米,  $b$  为 3 米时, 经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小.

解法二: 依题意, 即所求的  $a, b$  的值使  $ab$  最大.

由题设知  $4a+2ab+2a=60$  ( $a>0, b>0$ )

即  $a+2b+ab=30$  ( $a>0, b>0$ ).

$\therefore a+2b \geq 2\sqrt{ab}$ ,

$\therefore 2\sqrt{2}\sqrt{ab}+ab \leq 30$ ,

当且仅当  $a=2b$  时, 上式取等号.

由  $a>0, b>0$ , 解得  $0 < ab \leq 18$ .

即当  $a=2b$  时,  $ab$  取得最大值, 其最大值 18.

$\therefore 2b^2=18$ . 解得  $b=3, a=6$ .

故当  $a$  为 6 米,  $b$  为 3 米时, 经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小.

(25) 本小题主要考查等差数列基本概念及其通项求法, 考查对数函数性质, 考查归纳, 推理能力以及用数学归纳法进行论证的能力. 满分 12 分.

解: (I) 设数列  $\{b_n\}$  的公差为  $d$ , 由题意得

$$\begin{cases} b_1=1, \\ 10b_1 + \frac{10(10-1)}{2d} = 100. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} b_1=1, \\ d=2. \end{cases}$$

$\therefore b_n=2n-1$ .

(II) 由  $b_n=2n-1$ , 知

$$S_n = \lg(1+1) + \lg\left(1+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \lg\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)$$

$$= \lg\left[(1+1)\left(1+\frac{1}{3}\right) \cdots \left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\right],$$

$$\frac{1}{2} \lg b_{n+1} = \lg \sqrt{2n+1}.$$

因此要比较  $S_n$  与  $\frac{1}{2} \lg b_{n+1}$  的大小, 可先比较  $(1+1)\left(1+\frac{1}{3}\right) \cdots \left(1+\frac{1}{2n-1}\right)$  与

$\sqrt{2n+1}$  的大小.

取  $n=1$  有  $(1+1) > \sqrt{2 \cdot 1 + 1}$ ,

取  $n=2$  有  $(1+1)(1+\frac{1}{3}) > \sqrt{2 \cdot 1 + 1}$

由此推测  $(1+1)(1+\frac{1}{3}) \cdot \dots \cdot (1+\frac{1}{2n-1}) > \sqrt{2n+1}$ . ①

若①式成立，则由对数函数性质可判定：

$$S_n > \frac{1}{2} \lg b_{n+1}.$$

下面用数学归纳法证明①式.

(i) 当  $n=1$  时已验证①式成立.

(ii) 假设当  $n=k$  ( $k \geq 1$ ) 时，①式成立，即

$$(1+1)(1+\frac{1}{3}) \cdot \dots \cdot (1+\frac{1}{2k-1}) > \sqrt{2k+1},$$

那么，当  $n=k+1$  时，

$$(1+1)(1+\frac{1}{3}) \cdot \dots \cdot (1+\frac{1}{2k-1})(1+\frac{1}{2(k+1)-1})$$

$$> \sqrt{2k+1} (1+\frac{1}{2k+1})$$

$$= \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+1} (2k+2).$$

$$\therefore [\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+1} (2k+2)]^2 - [\sqrt{2k+3}]^2$$

$$= \frac{4k^2 + 8k + 4k^2 + 8k + 3}{2k+1}$$

$$= \frac{1}{2k+1} > 0,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+1} (2k+2) > \sqrt{2k+3} = \sqrt{2(k+1)+1}.$$

因而  $(1+1)(1+\frac{1}{3}) \cdot \dots \cdot (1+\frac{1}{2k-1})(1+\frac{1}{2k+1}) > \sqrt{2(k+1)+1}$ .

这就是说①式当  $n=k+1$  时也成立.

由(i)，(ii) 知①式对任何正整数  $n$  都成立. 由此证得： $S_n > \frac{1}{2} \lg b_{n+1}$ .