

2010年普通高等学校招生全国统一考试

数学(理) (北京卷)

本试卷分第I卷和第II卷两部分。第I卷1至2页、第II卷3至5页,共150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效,考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第I卷 (选择题 共40分)

一、本大题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

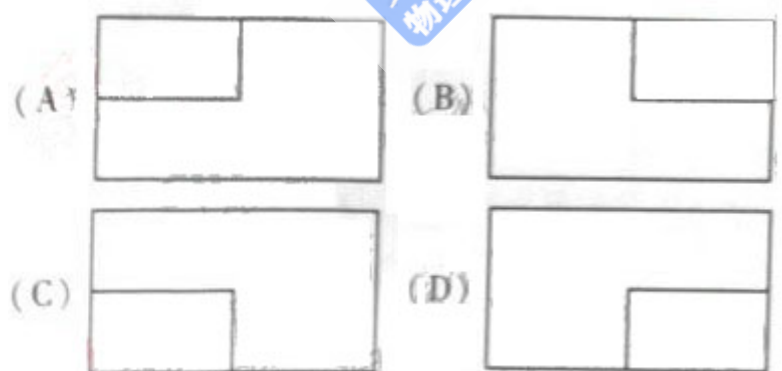
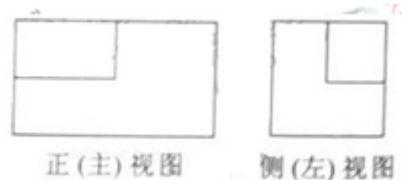
(1) 集合 $P = \{x \in Z | 0 \leq x < 3\}$, $M = \{x \in Z | x^2 \leq 9\}$, 则 $P \cap M =$

- (A) $\{1, 2\}$ (B) $\{0, 1, 2\}$ (C) $\{x | 0 \leq x < 3\}$ (D) $\{x | 0 \leq x \leq 3\}$

(2) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 公比 $|q| \neq 1$. 若 $a_m = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$, 则 $m =$

- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12

(3) 一个长方体去掉一个小长方体, 所得几何体的正(主)视图与侧(左)视图分别如右图所示, 则该几何体的俯视图为



(4) 8名学生和2位第师站成一排合影, 2位老师不相邻的排法种数为

- (A) $A_8^8 A_9^2$ (B) $A_8^8 C_9^2$ (C) $A_8^8 A_7^2$ (D) $A_8^8 C_7^2$

(5) 极坐标方程 $(\rho - 1)(\theta - \pi) = 0 (\rho \geq 0)$ 表示的图形是

- (A) 两个圆 (B) 两条直线
(C) 一个圆和一条射线 (D) 一条直线和一条射线

(6) a 、 b 为非零向量.“ $a \perp b$ ”是“函数 $f(x) = (xa + b) \cdot (xb - a)$ 为一次函数”的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(7) 设不等式组
$$\begin{cases} x + y - 11 \geq 0 \\ 3x - y + 3 \geq 0 \\ 5x - 3y + 9 \leq 0 \end{cases}$$

表示的平面区域为 D ，若指数函数 $y = a^x$ 的图像上存在区域 D 上的点，则 a 的取值范围是

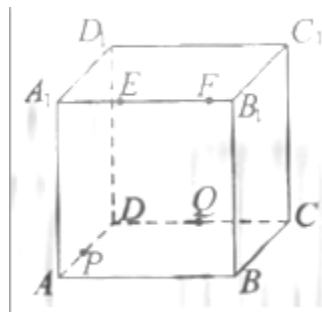
- (A) (1,3] (B) [2,3] (C) (1,2] (D) [3, +∞]

(8) 如图，正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，动点 E 、 F 在棱 A_1B_1 上，动

点 P 、 Q 分别在棱 AD 、 CD 上，若 $EF=1$ ， $A_1E=x$ ， $DQ=y$ ， $DP=z$ （

x 、 y 、 z 大于零），则四面体 $PEFQ$ 的体积

- (A) 与 x 、 y 、 z 都有关
(B) 与 x 有关，与 y 、 z 无关
(C) 与 y 有关，与 x 、 z 无关
(D) 与 z 有关，与 x 、 y 无关



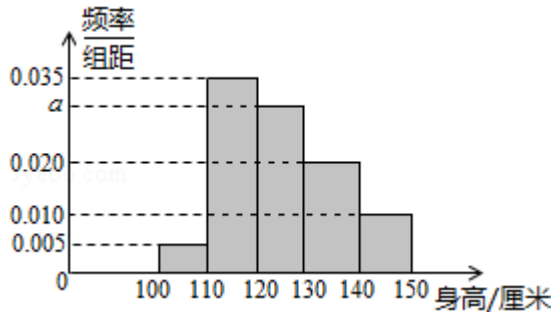
第II卷（共110分）

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分。

(9) 在复平面内，复数 $\frac{2i}{1-i}$ 对应的点的坐标为_____。

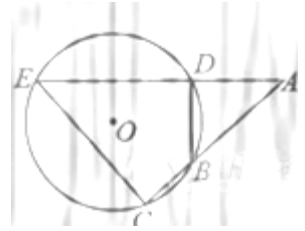
(10) 在 $\triangle ABC$ 中，若 $b=1$ ， $c=\sqrt{3}$ ， $\angle C = \frac{2\pi}{3}$ ，则 $a=$ _____。

(11) 从某小学随机抽取 100 名同学，将他们的身高（单位：厘米）数据绘制成频率分布直方图（如图）。由图中数据可知 $a=$ _____。若要从身高在 $[120, 130)$ ， $[130, 140)$ ， $[140, 150]$ 三组内的学生中，用分层抽样的方法选取 18 人参加一项活动，则从身高在 $[140$



，150]内的学生中选取的人数应为_____。

(12) 如图， $\odot O$ 的弦 ED ， CB 的延长线交于点 A 。若 $BD \perp AE$ ， $AB=4$ ， $BC=2$ ， $AD=3$ ，则 $DE=_____$ ； $CE=_____$ 。



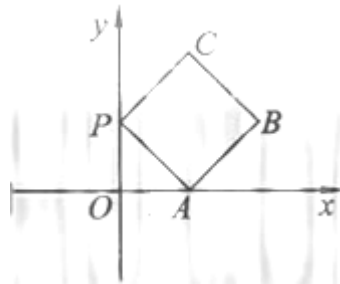
(13) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率为 2，焦点与椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的焦点相同，那么

双曲线的焦点坐标为_____；渐近线方程为_____。

(14) 如图放置的边长为 1 的正方形 $PABC$ 沿 x 轴滚动。设顶点 $P(x, y)$ 的轨迹方程是

$y = f(x)$ ，则函数 $f(x)$ 的最小正周期为_____

； $y = f(x)$ 在其两个相邻零点间的图象与 x 轴所围区域的面积为_____。



说明：“正方形 $PABC$ 沿 x 轴滚动”包括沿 x 轴正方向和沿 x 轴负方向滚动。沿 x 轴正方向滚动指的是先以顶点 A 为中心顺时针旋转，当顶点 B 落在 x 轴上时，再以顶点 B 为中心顺时针旋转，如此继续。类似地，正方形 $PABC$ 可以沿 x 轴负方向滚动。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(15) (本小题共 13 分)

已知函数 $f(x) = 2 \cos 2x + \sin^2 x - 4 \cos x$.

(I) 求 $f(\frac{\pi}{3})$ 的值;

(II) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值。

(16) (本小题共14分)

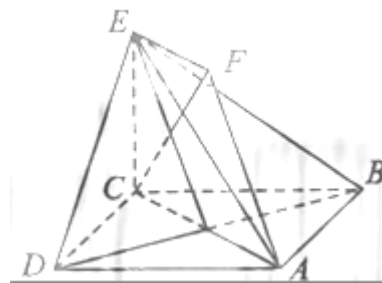
如图, 正方形 $ABCD$ 和四边形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直, $CE \perp AC$,

$EF \parallel AC, AB = \sqrt{2}, CE = EF = 1$.

(I) 求证: $AF \parallel$ 平面 BDE ;

(II) 求证: $CF \perp$ 平面 BDE ;

(III) 求二面角 $A-BE-D$ 的大小。



(17)(本小题共13分)

某同学参加3门课程的考试.假设该同学第一门课程取得优秀成绩的概率为 $\frac{4}{5}$,第二、第三门课程取得优秀成绩的概率分别为 $p, q (p > q)$,且不同课程是否取得优秀成绩相互独立.记 ξ 为该生取得优秀成绩的课程数,其分布列为

ξ	0	1	2	3
p	$\frac{6}{125}$	a	d	$\frac{24}{125}$

(I)求该生至少有1门课程取得优秀成绩的概率;

(II)求 p, q 的值;

(III)求数学期望 $E\xi$.

(18)(本小题共13分)

已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{k}{2}x^2 (k \geq 0)$

(I)当 $k=2$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程:

(II)求 $f(x)$ 的单调区间。

(19) (本小题共14分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 点 B 与点 A (-

1,1) 关于原点 O 对称, P 是动点, 且直线 AP 与 BP 的斜率之积等于 $-\frac{1}{3}$.

(I) 求动点 P 的轨迹方程;

(II) 设直线 AP 和 BP 分别与直线 $x=3$ 交于点 M, N , 问: 是否存在点 P 使得 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PMN$ 的面积相等? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由。

(20) (本小题共13分)

已知集合 $S_n = \{X \mid X = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n\} (n \geq 2)$

对于 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n), B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in S_n$, 定义A与B的差为

$$A - B = (|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|);$$

A与B之间的距离为 $d(A, B) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$

(I) 证明: $\forall A, B, C \in S_n$, 有 $A - B \in S_n$, 且 $d(A - C, B - C) = d(A, B)$;

(II) 证明: $\forall A, B, C \in S_n, d(A, B), d(A, C), d(B, C)$ 三个数中至少有一个是偶数

(III) 设 $P \subseteq S_n$, P中有 $m(m \geq 2)$ 个元素, 记P中所有两元素间距离的平均值为 $\bar{d}(P)$.

证明: $\bar{d}(P) \leq \frac{mn}{2(m-1)}$