2017年山东省高考数学试卷（理科）

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符号题目要求的.

1．（5分）设函数$y=\sqrt{4-x^2}$的定义域为A，函数y=ln（1﹣x）的定义域为B，则A∩B=（　　）

A．（1，2）　B．（1，2］C．（﹣2，1）　D．［﹣2，1）

2．（5分）已知a∈R，i是虚数单位，若$z=a+\sqrt{3}i$，$z\cdot\bar{z}=4$，则a=（　　）

A．1或﹣1　B．$\sqrt{7}$或$-\sqrt{7}$　C．$-\sqrt{3}$　D．$\sqrt{3}$

3．（5分）已知命题p：∀x＞0，ln（x+1）＞0；命题q：若a＞b，则$a^2>b^2$，下列命题为真命题的是（　　）

A．p∧q B．p∧¬q　C．¬p∧q　D．¬p∧¬q

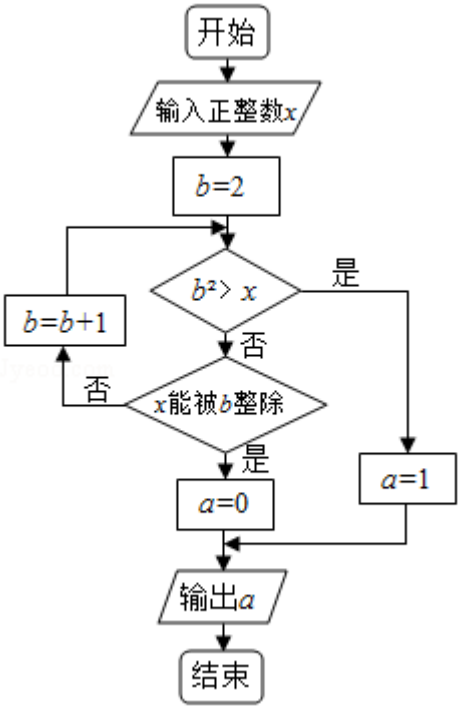
4．（5分）已知x，y满足约束条件$\begin{cases}x-y+3\leqslant 0\\3x+y+5\leqslant 0\\x+3\geqslant 0\end{cases}$，则z=x+2y的最大值是（　　）

A．0　B．2　C．5　D．6

5．（5分）为了研究某班学生的脚长x（单位：厘米）和身高y（单位：厘米）的关系，从该班随机抽取10名学生，根据测量数据的散点图可以看出y与x之间有线性相关关系，设其回归直线方程为$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，已知$\sum_{i=1}^{10}x_i=225$，$\sum_{i=1}^{10}y_i=1600$，$\hat{b}=4$，该班某学生的脚长为24，据此估计其身高为（　　）

A．160 B．163 C．166 D．170

6．（5分）执行两次如图所示的程序框图，若第一次输入的x值为7，第二次输入的x值为9，则第一次，第二次输出的a值分别为（　　）



A．0，0　　B．1，1　　C．0，1　　D．1，0

7．（5分）若a＞b＞0，且ab=1，则下列不等式成立的是（　　）

A．$a+\frac{1}{b}<\frac{b}{2^a}<\log_2(a+b)$）　　B．$\frac{b}{2^a}<\log_2(a+b)<a+\frac{1}{b}$

C．$a+\frac{1}{b}<\log_2(a+b)<\frac{b}{2^a}$　D．$\log_2(a+b))<a+\frac{1}{b}<\frac{b}{2^a}$

8．（5分）从分别标有1，2，…，9的9张卡片中不放回地随机抽取2次，每次抽取1张，则抽到在2张卡片上的数奇偶性不同的概率是（　　）

A．$\frac{5}{18}$　B．$\frac{4}{9}$　C．$\frac{5}{9}$　D．$\frac{7}{9}$

9．（5分）在ABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，若△ABC为锐角三角形，且满足sinB（1+2cosC）=2sinAcosC+cosAsinC，则下列等式成立的是（　　）

A．a=2b　　B．b=2a　　C．A=2B　　D．B=2A

10．（5分）已知当x∈[0，1]时，函数y=$(mx-1)^2$的图象与$y=\sqrt{x}+m$的图象有且只有一个交点，则正实数m的取值范围是（　　）

A．（0，1]∪[$2\sqrt{3}$，+∞）　　B．（0，1]∪[3，+∞）

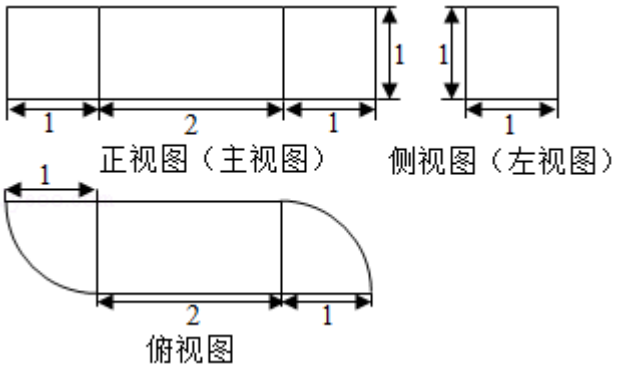
C．（0，$\sqrt{2}$）∪[$2\sqrt{3}$，+∞）　　D．（0，$\sqrt{2}$]∪[3，+∞）

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分

11．（5分）已知（1+3x）^{n}的展开式中含有x^2的系数是54，则n=_____．

12．（5分）已知$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$是互相垂直的单位向量，若$\sqrt{3}\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$与$\overrightarrow{e_1}+\lambda\overrightarrow{e_2}$的夹角为60°，则实数λ的值是_____．

13．（5分）由一个长方体和两个$\frac{1}{4}$圆柱体构成的几何体的三视图如图，则该几何体的体积为_____．



14．（5分）在平面直角坐标系xOy中，双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的右支与焦点为F的抛物线$x^2=2py$（p＞0）交于A，B两点，若|AF|+|BF|=4|OF|，则该双曲线的渐近线方程为_____．

15．（5分）若函数$e^xf(x)$（e≈2.71828…是自然对数的底数）在f（x）的定义域上单调递增，则称函数f（x）具有M性质．下列函数中所有具有M性质的函数的序号为_____．

①$f(x)=2^{-x}$②$f(x)=3^{-x}$③$f(x)=x^3$④$f(x)=x^2+2$．

三、解答题（共6小题，满分75分）

16．（12分）设函数$f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})+\sin(\omega x-\frac{\pi}{2})$，其中0＜ω＜3，已知$f(\frac{\pi}{6})=0$．

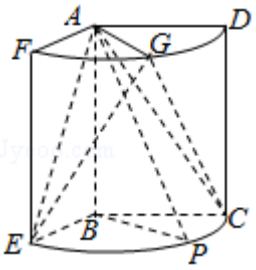
（Ⅰ）求ω；

（Ⅱ）将函数y=f（x）的图象上各点的横坐标伸长为原来的2倍（纵坐标不变），再将得到的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位，得到函数y=g（x）的图象，求g（x）在$[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$上的最小值．

17．（12分）如图，几何体是圆柱的一部分，它是由矩形ABCD（及其内部）以AB边所在直线为旋转轴旋转120°得到的，G是$\overset{\frown}{DF}$的中点．

（Ⅰ）设P是$\overset{\frown}{CE}$上的一点，且AP⊥BE，求∠CBP的大小；

（Ⅱ）当AB=3，AD=2时，求二面角E﹣AG﹣C的大小．



18．（12分）在心理学研究中，常采用对比试验的方法评价不同心理暗示对人的影响，具体方法如下：将参加试验的志愿者随机分成两组，一组接受甲种心理暗示，另一组接受乙种心理暗示，通过对比这两组志愿者接受心理暗示后的结果来评价两种心理暗示的作用，现有6名男志愿者A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6和4名女志愿者B_1，B_2，B_3，B_4，从中随机抽取5人接受甲种心理暗示，另5人接受乙种心理暗示．

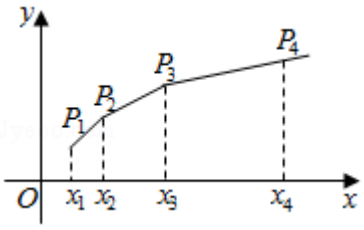
（Ⅰ）求接受甲种心理暗示的志愿者中包含A_1但不包含B_1的概率．

（Ⅱ）用X表示接受乙种心理暗示的女志愿者人数，求X的分布列与数学期望EX．

19．（12分）已知$\{x_n\}$是各项均为正数的等比数列，且$x_1+x_2=3$，$x_3-x_2=2$．

（Ⅰ）求数列$\{x_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）如图，在平面直角坐标系xOy中，依次连接点P_1（x_1，1），P_2（x_2，2）…P_{n+1}（x_{n+1}，n+1）得到折线$P_1P_2…P_{n+1}$，求由该折线与直线y=0，$x=x_1$，$x=x_{n+1}$所围成的区域的面积T_n．



20．（13分）已知函数f（x）=$x^2+2\cos x$，g（x）=e^x（cosx﹣sinx+2x﹣2），其中e≈2.17828…是自然对数的底数．

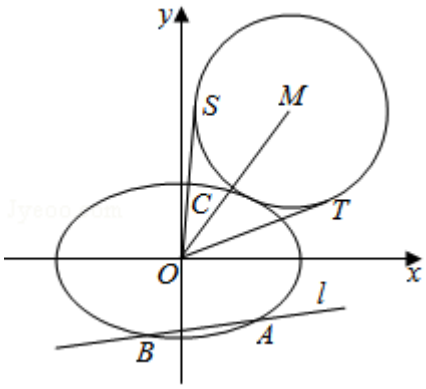
（Ⅰ）求曲线y=f（x）在点（π，f（π））处的切线方程；

（Ⅱ）令h（x）=g（x）－af（x）（a∈R），讨论h（x）的单调性并判断有无极值，有极值时求出极值．

21．（14分）在平面直角坐标系xOy中，椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，焦距为2．

（Ⅰ）求椭圆E的方程．

（Ⅱ）如图，该直线l：$y=k_1x-\frac{\sqrt{3}}{2}$交椭圆E于A，B两点，C是椭圆E上的一点，直线OC的斜率为k_2，且看$k_1k_2=\frac{\sqrt{2}}{4}$，M是线段OC延长线上一点，且|MC|：|AB|=2：3，⊙M的半径为|MC|，OS，OT是⊙M的两条切线，切点分别为S，T，求∠SOT的最大值，并求取得最大值时直线l的斜率．



2017年山东省高考数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符号题目要求的.

1．（5分）（2017•山东）设函数$y=\sqrt{4-x^2}$的定义域为A，函数y=ln（1﹣x）的定义域为B，则A∩B=（　　）

A．（1，2）　B．（1，2］C．（﹣2，1）　D．［﹣2，1）

【解答】解：由$4-x^2\geq 0$，解得：﹣2≤x≤2，则函数$y=\sqrt{4-x^2}$的定义域［﹣2，2］，

由对数函数的定义域可知：1﹣x＞0，解得：x＜1，则函数y=ln（1﹣x）的定义域（﹣∞，1），

则A∩B=［﹣2，1），

故选D.

2．（5分）（2017•山东）已知a∈R，i是虚数单位，若$z=a+\sqrt{3}i$，$z\cdot\overline{z}=4$，则a=（　　）

A．1或﹣1　B．$\sqrt{7}$或$-\sqrt{7}$　C．$-\sqrt{3}$　D．$\sqrt{3}$

【解答】解：由$z=a+\sqrt{3}i$，则z的共轭复数$\overline{z}=a-\sqrt{3}i$，

由$z\cdot\overline{z}=(a+\sqrt{3}i)(a-\sqrt{3}i)=a^2+3=4$，则$a^2=1$，解得：a=±1，

∴a的值为1或﹣1，

故选A.

3．（5分）（2017•山东）已知命题p：∀x＞0，ln（x+1）＞0；命题q：若a＞b，则$a^2>b^2$，下列命题为真命题的是（　　）

A．p∧q B．p∧¬q　C．¬p∧q　D．¬p∧¬q

【解答】解：命题p：∀x＞0，ln（x+1）＞0，则命题p为真命题，则¬p为假命

题；

取a=﹣1，b=﹣2，a＞b，但$a^2<b^2$，则命题q是假命题，则$\neg q$是真命题．

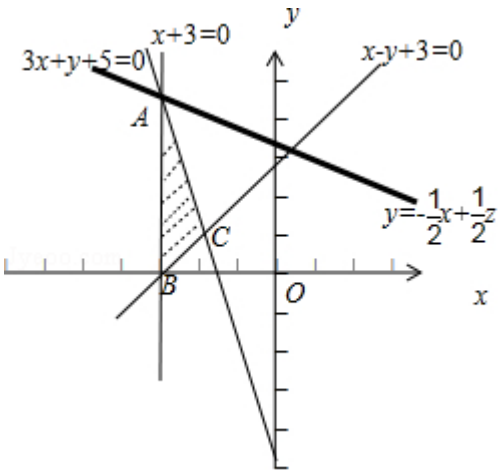
∴$p\wedge q$是假命题，$p\wedge\neg q$是真命题，$\neg p\wedge q$是假命题，$\neg p\wedge\neg q$是假命题．

故选B．

4．（5分）（2017•山东）已知x，y满足约束条件$\begin{cases}x-y+3\leqslant 0\\3x+y+5\leqslant 0\\x+3\geqslant 0\end{cases}$，则z=x+2y的最大值是（　　）

A．0　B．2　C．5　D．6

【解答】解：画出约束条件$\begin{cases}x-y+3\leqslant 0\\3x+y+5\leqslant 0\\x+3\geqslant 0\end{cases}$表示的平面区域，如图所示；



由$\begin{cases}x+3=0\\3x+y+5=0\end{cases}$解得A（﹣3，4），

此时直线$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$在y轴上的截距最大，

所以目标函数z=x+2y的最大值为

$z_{max}=-3+2\times 4=5$．

故选：C．

5．（5分）（2017•山东）为了研究某班学生的脚长x（单位：厘米）和身高y（单位：厘米）的关系，从该班随机抽取10名学生，根据测量数据的散点图可以看出y与x之间有线性相关关系，设其回归直线方程为$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，已知$\sum_{i=1}^{10}x_i=225$，

$\sum_{i=1}^{10} y_i=1600$，$\hat{b}=4$，该班某学生的脚长为24，据此估计其身高为（　　）

A．160 B．163 C．166 D．170

【解答】解：由线性回归方程为$\hat{y}=4x+\hat{a}$，

则$\bar{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i=22.5$，$\bar{y}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i=160$，

则数据的样本中心点（22.5，160），

由回归直线方程样本中心点，则$\hat{a}=\hat{y}-4x=160-4\times22.5=70$，

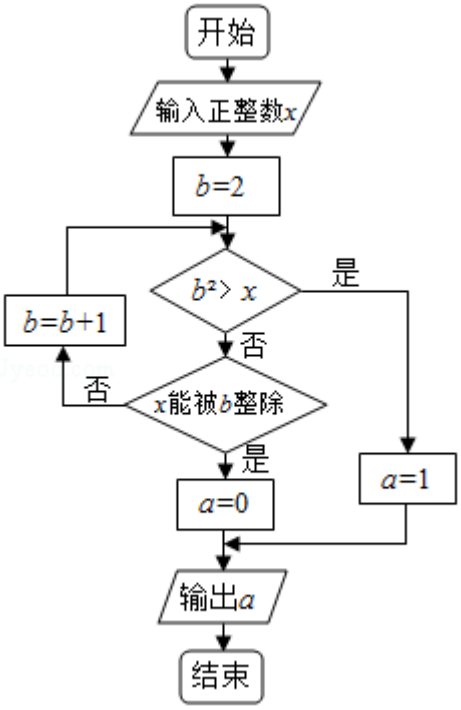
∴回归直线方程为$\hat{y}=4x+70$，

当x=24时，$\hat{y}=4\times24+70=166$，

则估计其身高为166，

故选C．

6．（5分）（2017•山东）执行两次如图所示的程序框图，若第一次输入的x值为7，第二次输入的x值为9，则第一次，第二次输出的a值分别为（　　）



A．0，0　　B．1，1　　C．0，1　　D．1，0

【解答】解：当输入的x值为7时，

第一次，不满足$b^2>x$，也不满足x能被b整数，故b=3；

第二次，满足$b^2>x$，故输出a=1；

当输入的x值为9时，

第一次，不满足$b^2>x$，也不满足x能被b整数，故b=3；

第二次，不满足$b^2>x$，满足x能被b整数，故输出a=0；

故选：D

7．（5分）（2017•山东）若a＞b＞0，且ab=1，则下列不等式成立的是（　　）

A．$a+\frac{1}{b}<\frac{b}{2^a}<\log_2(a+b)$）　B．$\frac{b}{2^a}<\log_2(a+b)<a+\frac{1}{b}$

C．$a+\frac{1}{b}<\log_2(a+b)<\frac{b}{2^a}$　D．$\log_2(a+b))<a+\frac{1}{b}<\frac{b}{2^a}$

【解答】解：∵a＞b＞0，且ab=1，

∴可取a=2，$b=\frac{1}{2}$.

则$a+\frac{1}{b}=4$，$\frac{b}{2^a}=\frac{\frac{1}{2}}{2^2}=\frac{1}{8}$，$\log_2(a+b)=\log_2(2+\frac{1}{2})=\log_2\frac{5}{2}\in(1,2)$，

$\therefore\frac{b}{2^a}<\log_2(a+b)<a+\frac{1}{b}$.

故选：B．

8．（5分）（2017•山东）从分别标有1，2，…，9的9张卡片中不放回地随机抽取2次，每次抽取1张，则抽到在2张卡片上的数奇偶性不同的概率是（　　）

A．$\frac{5}{18}$　B．$\frac{4}{9}$　C．$\frac{5}{9}$　D．$\frac{7}{9}$

【解答】解：从分别标有1，2，…，9的9张卡片中不放回地随机抽取2次，共有$C_9^2=36$种不同情况，

且这些情况是等可能发生的，

抽到在2张卡片上的数奇偶性不同的情况有$C_5^1C_4^1=20$种，

故抽到在2张卡片上的数奇偶性不同的概率$P=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$，

故选：C．

9．（5分）（2017•山东）在ABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，若△ABC为锐角三角形，且满足sinB（1+2cosC）=2sinAcosC+cosAsinC，则下列等式成立的是（　　）

A．a=2b　　B．b=2a　　C．A=2B　　D．B=2A

【解答】解：在ABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，满足sinB（1+2cosC）=2sinAcosC+cosAsinC=sinAcosC+sin（A+C）=sinAcosC+sinB，

可得：2sinBcosC=sinAcosC，因为△ABC为锐角三角形，所以2sinB=sinA，

由正弦定理可得：2b=a．

故选：A．

10．（5分）（2017•山东）已知当x∈[0，1]时，函数y=（mx﹣1）^{2} 的图象与y=$\sqrt{x}$+m的图象有且只有一个交点，则正实数m的取值范围是（　　）

A．（0，1]∪[2$\sqrt{3}$，+∞）　　B．（0，1]∪[3，+∞）

C．（0，$\sqrt{2}$）∪[2$\sqrt{3}$，+∞）　　D．（0，$\sqrt{2}$]∪[3，+∞）

【解答】解：根据题意，由于m为正数，y=（mx﹣1）^{2}

为二次函数，在区间（0，$\frac{1}{m}$）为减函数，（$\frac{1}{m}$，+∞）为增函数，

函数y=$\sqrt{x}$+m为增函数，

分2种情况讨论：

①、当0＜m≤1时，有$\frac{1}{m}$≥1，

在区间[0，1]上，y=（mx﹣1）^{2} 为减函数，且其值域为[（m﹣1）^{2}，1]，

函数y=$\sqrt{x}$+m为增函数，其值域为[m，1+m]，

此时两个函数的图象有1个交点，符合题意；

②、当m＞1时，有$\frac{1}{m}$＜1，

y=（mx﹣1）^{2} 在区间（0，$\frac{1}{m}$）为减函数，（$\frac{1}{m}$，1）为增函数，

函数y=$\sqrt{x}$+m为增函数，其值域为[m，1+m]，

若两个函数的图象有1个交点，则有（m﹣1）^{2}≥1+m，

解可得$m\le 0$或$m\ge 3$，

又由m为正数，则$m\ge 3$；

综合可得：m的取值范围是（0，1]∪[3，+∞）；

故选：B．

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分

11．（5分）（2017•山东）已知$(1+3x)^n$的展开式中含有x^2的系数是54，则n=_4_．

【解答】解：$(1+3x)^n$的展开式中通项公式：$T_{r+1}=C_n^r(3x)^r=3^rC_n^rx^r$．

∵含有x^2的系数是54，∴r=2．

∴$3^2C_n^2=54$，可得$C_n^2=6$，∴$\frac{n(n-1)}{2}=6$，$n\in N^*$．

解得n=4．

故答案为：4．

12．（5分）（2017•山东）已知$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$是互相垂直的单位向量，若$\sqrt{3}\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$与$\overrightarrow{e_1}+\lambda\overrightarrow{e_2}$的夹角为60°，则实数λ的值是_$\frac{\sqrt{3}}{3}$_．

【解答】解：$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$是互相垂直的单位向量，

∴$|\overrightarrow{e_1}|=|\overrightarrow{e_2}|=1$，且$\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}=0$；

又$\sqrt{3}\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$与$\overrightarrow{e_1}+\lambda\overrightarrow{e_2}$的夹角为60°，

∴$(\sqrt{3}\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2})\cdot(\overrightarrow{e_1}+\lambda\overrightarrow{e_2})=|\sqrt{3}\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|\times|\overrightarrow{e_1}+\lambda\overrightarrow{e_2}|\times\cos60°$，

即$\sqrt{3}\overrightarrow{e_1}^2+(\sqrt{3}\lambda-1)\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}-\lambda\overrightarrow{e_2}^2=\sqrt{3\overrightarrow{e_1}^2-2\sqrt{3}\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_2}^2}\times\sqrt{\overrightarrow{e_1}^2+2\lambda\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}+\lambda^2\overrightarrow{e_2}^2}\times\frac{1}{2}$，

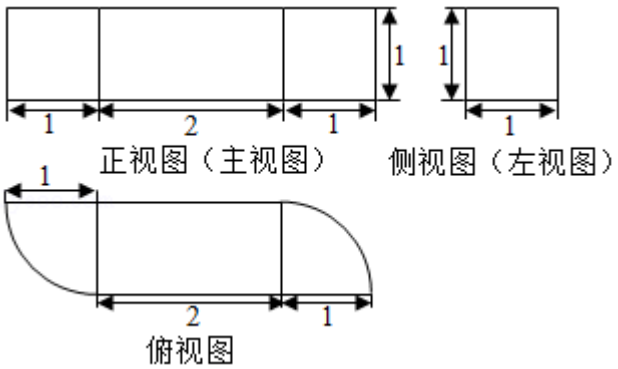
化简得$\sqrt{3}-\lambda=\sqrt{3+1}\times\sqrt{1+\lambda^2}\times\frac{1}{2}$，

即$\sqrt{3}-\lambda=\sqrt{1+\lambda^2}$，

解得$\lambda=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

13．（5分）（2017•山东）由一个长方体和两个$\frac{1}{4}$圆柱体构成的几何体的三视图如图，则该几何体的体积为__$2+\frac{\pi}{2}$__.



【解答】解：由长方体长为2，宽为1，高为1，则长方体的体积$V_1=2\times1\times1=2$，

圆柱的底面半径为1，高为1，则圆柱的体积$V_2=\frac{1}{4}\times\pi\times1^2\times1=\frac{\pi}{4}$，

则该几何体的体积$V=V_1+2V_1=2+\frac{\pi}{2}$，

故答案为：$2+\frac{\pi}{2}$.

14．（5分）（2017•山东）在平面直角坐标系xOy中，双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的右支与焦点为F的抛物线$x^2=2py$（p＞0）交于A，B两点，若|AF|+|BF|=4|OF|，则该双曲线的渐近线方程为__$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$__.

【解答】解：把$x^2=2py$（p＞0）代入双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0），

可得：$a^2y^2-2pb^2y+a^2b^2=0$，

$\therefore y_A+y_B=\frac{2pb^2}{a^2}$，

$\because |AF|+|BF|=4|OF|$，$\therefore y_A+y_B+2\times\frac{p}{2}=4\times\frac{p}{2}$，

$\therefore \frac{2pb^2}{a^2}=p$，

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∴该双曲线的渐近线方程为：$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

故答案为：$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

15．（5分）（2017•山东）若函数$e^x f(x)$（e≈2.71828…是自然对数的底数）在f（x）的定义域上单调递增，则称函数f（x）具有M性质．下列函数中所有具有M性质的函数的序号为__①④__．

①$f(x)=2^{-x}$②$f(x)=3^{-x}$③$f(x)=x^3$④$f(x)=x^2+2$．

【解答】解：对于①，$f(x)=2^{-x}$，则$g(x)=e^x f(x)=e^x\cdot 2^{-x}=(\frac{e}{2})^x$为实数集上的增函数；

对于②，$f(x)=3^{-x}$，则$g(x)=e^x f(x)=e^x\cdot 3^{-x}=(\frac{e}{3})^x$为实数集上的减函数；

对于③，$f(x)=x^3$，则$g(x)=e^x f(x)=e^x\bullet x^3$，

$g'(x)=e^x\bullet x^3+3e^x\bullet x^2=e^x(x^3+3x^2)=e^x\bullet x^2(x+3)$，当$x<-3$时，$g'(x)<0$，

∴$g(x)=e^x f(x)$在定义域R上先减后增；

对于④，$f(x)=x^2+2$，则$g(x)=e^x f(x)=e^x(x^2+2)$，

$g'(x)=e^x(x^2+2)+2xe^x=e^x(x^2+2x+2)>0$在实数集R上恒成立，

∴$g(x)=e^x f(x)$在定义域R上是增函数．

∴具有M性质的函数的序号为①④．

故答案为：①④．

三、解答题（共6小题，满分75分）

16．（12分）（2017•山东）设函数$f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})+\sin(\omega x-\frac{\pi}{2})$，其中$0<\omega<3$，已知$f(\frac{\pi}{6})=0$．

（Ⅰ）求ω；

（Ⅱ）将函数y=f（x）的图象上各点的横坐标伸长为原来的2倍（纵坐标不变），再将得到的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位，得到函数y=g（x）的图象，求g（x）在[

$-\frac{\pi}{4}$，$\frac{3\pi}{4}$]上的最小值．

【解答】解：（Ⅰ）函数f（x）=sin（ωx－$\frac{\pi}{6}$）+sin（ωx－$\frac{\pi}{2}$）

=sinωxcos$\frac{\pi}{6}$－cosωxsin$\frac{\pi}{6}$－sin（$\frac{\pi}{2}$－ωx）

=$\frac{\sqrt{3}}{2}$sinωx－$\frac{3}{2}$cosωx

=$\sqrt{3}$sin（ωx－$\frac{\pi}{3}$），

又f（$\frac{\pi}{6}$）=$\sqrt{3}$sin（$\frac{\pi}{6}$ω－$\frac{\pi}{3}$）=0，

∴$\frac{\pi}{6}$ω－$\frac{\pi}{3}$=kπ，k∈Z，

解得ω=6k+2，

又0＜ω＜3，

∴ω=2；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，f（x）=$\sqrt{3}$sin（2x－$\frac{\pi}{3}$），

将函数y=f（x）的图象上各点的横坐标伸长为原来的2倍（纵坐标不变），得到函数y=$\sqrt{3}$sin（x－$\frac{\pi}{3}$）的图象；

再将得到的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位，得到y=$\sqrt{3}$sin（x+$\frac{\pi}{4}$－$\frac{\pi}{3}$）的图象，

∴函数y=g（x）=$\sqrt{3}$sin（x－$\frac{\pi}{12}$）；

当x∈[－$\frac{\pi}{4}$，$\frac{3\pi}{4}$]时，x－$\frac{\pi}{12}$∈[－$\frac{\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{3}$]，

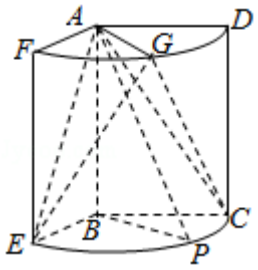
∴sin（x－$\frac{\pi}{12}$）∈[－$\frac{\sqrt{3}}{2}$，1]，

∴当x=－$\frac{\pi}{4}$时，g（x）取得最小值是－$\frac{\sqrt{3}}{2}$×$\sqrt{3}$=－$\frac{3}{2}$.

17．（12分）（2017•山东）如图，几何体是圆柱的一部分，它是由矩形ABCD（及其内部）以AB边所在直线为旋转轴旋转120°得到的，G是$\overset{\frown}{DF}$的中点．

（Ⅰ）设P是$\overset{\frown}{CE}$上的一点，且AP⊥BE，求∠CBP的大小；

（Ⅱ）当AB=3，AD=2时，求二面角E－AG－C的大小．



【解答】解：（Ⅰ）∵AP⊥BE，AB⊥BE，且AB，AP⊂平面ABP，AB∩AP=A，

∴BE⊥平面ABP，又BP⊂平面ABP，

∴BE⊥BP，又∠EBC=120°，

因此∠CBP=30°；

（Ⅱ）解法一、

取$\overset{\frown}{EC}$的中点H，连接EH，GH，CH，

∵∠EBC=120°，∴四边形BECH为菱形，

∴AE=GE=AC=GC=$\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

取AG中点M，连接EM，CM，EC，

则EM⊥AG，CM⊥AG，

∴∠EMC为所求二面角的平面角.

又AM=1，∴EM=CM=$\sqrt{13-1}=2\sqrt{3}$.

在△BEC中，由于∠EBC=120°，

由余弦定理得：$EC^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos120°=12$，

∴$EC=2\sqrt{3}$，因此△EMC为等边三角形，

故所求的角为60°.

解法二、以B为坐标原点，分别以BE，BP，BA所在直线为x，y，z轴建立空间直角坐标系.

由题意得：A（0，0，3），E（2，0，0），G（1，$\sqrt{3}$，3），C（﹣1，$\sqrt{3}$，0），

故$\overrightarrow{AE}=(2,\ 0,\ -3)$，$\overrightarrow{AG}=(1,\ \sqrt{3},\ 0)$，$\overrightarrow{CG}=(2,\ 0,\ 3)$.

设$\vec{m}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$为平面AEG的一个法向量，

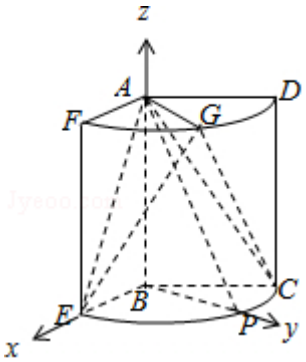
由$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AG}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}2x_1-3z_1=0\\ x_1+\sqrt{3}y_1=0\end{cases}$，取$z_1=2$，得$\vec{m}=(3,\ -\sqrt{3},\ 2)$；

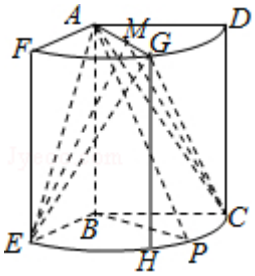
设$\vec{n}=(x_2, y_2, z_2)$为平面ACG的一个法向量，

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AG}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CG}=0\end{cases}$，可得$\begin{cases}x_2+\sqrt{3}y_2=0\\ 2x_2+3z_2=0\end{cases}$，取$z_2=-2$，得$\vec{n}=(3, -\sqrt{3}, -2)$.

$\therefore\cos\langle\vec{m}, \vec{n}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{1}{2}$.

∴二面角E﹣AG﹣C的大小为60°.





18．（12分）（2017•山东）在心理学研究中，常采用对比试验的方法评价不同心理暗示对人的影响，具体方法如下：将参加试验的志愿者随机分成两组，一组接受甲种心理暗示，另一组接受乙种心理暗示，通过对比这两组志愿者接受心理暗示后的结果来评价两种心理暗示的作用，现有6名男志愿者A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6和4名女志愿者B_1，B_2，B_3，B_4，从中随机抽取5人接受甲种心理暗示，另5人接受乙种心理暗示.

（Ⅰ）求接受甲种心理暗示的志愿者中包含A_1但不包含B_1的概率.

（Ⅱ）用X表示接受乙种心理暗示的女志愿者人数，求X的分布列与数学期望EX.

【解答】解：（I）记接受甲种心理暗示的志愿者中包含A_1但不包含B_1的事件为M，

则P（M）=$\frac{C_8^4}{C_{10}^5}$=$\frac{5}{18}$.

（II）X的可能取值为：0，1，2，3，4，

∴P（X=0）=$\frac{C_6^5}{C_{10}^5}$=$\frac{1}{42}$，

P（X=1）=$\frac{C_6^4C_4^1}{C_{10}^5}$=$\frac{5}{21}$，

P（X=2）=$\frac{C_6^3C_4^2}{C_{10}^5}$=$\frac{10}{21}$，

P（X=3）=$\frac{C_6^2C_4^3}{C_{10}^5}$=$\frac{5}{21}$，

P（X=4）=$\frac{C_6^1C_4^4}{C_{10}^5}$=$\frac{1}{42}$.

∴X的分布列为

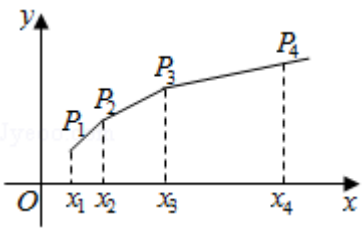
X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

X的数学期望EX=0×$\frac{1}{42}$+1×$\frac{5}{21}$+2×$\frac{10}{21}$+3×$\frac{5}{21}$+4×$\frac{1}{42}$=2.

19．（12分）（2017•山东）已知$\{x_n\}$是各项均为正数的等比数列，且$x_1+x_2=3$，$x_3-x_2=2$.

（Ⅰ）求数列$\{x_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）如图，在平面直角坐标系xOy中，依次连接点P_1（x_1，1），P_2（x_2，2）…P_{n+1}（x_{n+1}，n+1）得到折线$P_1P_2\ldots P_{n+1}$，求由该折线与直线y=0，$x=x_1$，$x=x_{n+1}$所围成的区域的面积T_n.



【解答】解：（I）设数列$\{x_n\}$的公比为q，则q＞0，

由题意得$\begin{cases} x_1+x_1q=3 \\ x_1q^2-x_1q=2 \end{cases}$，

两式相比得：$\frac{1+q}{q^2-q}=\frac{3}{2}$，解得q=2或q=$-\frac{1}{3}$（舍），

$\therefore x_1=1$，

$\therefore x_n=2^{n-1}$.

（II）过P_1，P_2，P_3，…，P_n向x轴作垂线，垂足为Q_1，Q_2，Q_3，…，Q_n，

即梯形$P_nP_{n+1}Q_{n+1}Q_n$的面积为b_n，

则$b_n=\frac{n+n+1}{2}\times 2^{n-1}=(2n+1)\times 2^{n-2}$，

$\therefore T_n=3\times 2^{-1}+5\times 2^0+7\times 2^1+\ldots+(2n+1)\times 2^{n-2}$，①

$\therefore 2T_n=3\times 2^0+5\times 2^1+7\times 2^2+\ldots+(2n+1)\times 2^{n-1}$，②

①－②得：$-T_n=\frac{3}{2}+(2+2^2+\ldots+2^{n-1})-(2n+1)\times 2^{n-1}$

$=\frac{3}{2}+\frac{2(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n+1)\times 2^{n-1}=-\frac{1}{2}+(1-2n)\times 2^{n-1}$.

$\therefore T_n=\frac{(2n-1)\times 2^n+1}{2}$.

20．（13分）（2017•山东）已知函数$f(x)=x^2+2\cos x$，$g(x)=e^x(\cos x-\sin x+2x-2)$，其中e≈2.17828…是自然对数的底数．

（Ⅰ）求曲线y=f（x）在点（π，f（π））处的切线方程；

（Ⅱ）令h（x）=g（x）－af（x）（a∈R），讨论h（x）的单调性并判断有无极值，有极值时求出极值．

【解答】解：（I）$f(\pi)=\pi^2-2$．$f'(x)=2x-2\sin x$，$\therefore f'(\pi)=2\pi$．

∴曲线y=f（x）在点（π，f（π））处的切线方程为：$y-(\pi^2-2)=2\pi(x-\pi)$

．

化为：$2\pi x-y-\pi^2-2=0$.

（II）$h(x)=g(x)-af(x)=e^x(\cos x-\sin x+2x-2)-a(x^2+2\cos x)$

$h'(x)=e^x(\cos x-\sin x+2x-2)+e^x(-\sin x-\cos x+2)-a(2x-2\sin x)$

$=2(x-\sin x)(e^x-a)=2(x-\sin x)(e^x-e^{\ln a})$.

令$u(x)=x-\sin x$，则$u'(x)=1-\cos x\geq 0$，∴函数$u(x)$在R上单调递增.

∵$u(0)=0$，∴$x>0$时，$u(x)>0$；$x<0$时，$u(x)<0$.

（1）$a\leq 0$时，$e^x-a>0$，∴$x>0$时，$h'(x)>0$，函数$h(x)$在$(0,+\infty)$单调递增；

$x<0$时，$h'(x)<0$，函数$h(x)$在$(-\infty,0)$单调递减.

∴$x=0$时，函数$h(x)$取得极小值，$h(0)=-1-2a$.

（2）$a>0$时，令$h'(x)=2(x-\sin x)(e^x-e^{\ln a})=0$.

解得$x_1=\ln a$，$x_2=0$.

①$0<a<1$时，$x\in(-\infty,\ln a)$时，$e^x-e^{\ln a}<0$，$h'(x)>0$，函数$h(x)$单调递增；

$x\in(\ln a,0)$时，$e^x-e^{\ln a}>0$，$h'(x)<0$，函数$h(x)$单调递减；

$x\in(0,+\infty)$时，$e^x-e^{\ln a}>0$，$h'(x)>0$，函数$h(x)$单调递增.

∴当$x=0$时，函数$h(x)$取得极小值，$h(0)=-2a-1$.

当$x=\ln a$时，函数$h(x)$取得极大值，$h(\ln a)=-a[\ln^2 a-2\ln a+\sin(\ln a)+\cos(\ln a)+2]$.

②当$a=1$时，$\ln a=0$，$x\in R$时，$h'(x)\geq 0$，∴函数$h(x)$在R上单调递增.

③$1<a$时，$\ln a>0$，$x\in(-\infty,0)$时，$e^x-e^{\ln a}<0$，$h'(x)>0$，函数$h(x)$单调递增；

$x\in(0,\ln a)$时，$e^x-e^{\ln a}<0$，$h'(x)<0$，函数$h(x)$单调递减；

$x\in(\ln a,+\infty)$时，$e^x-e^{\ln a}>0$，$h'(x)>0$，函数$h(x)$单调递增.

∴当$x=0$时，函数$h(x)$取得极大值，$h(0)=-2a-1$.

当$x=\ln a$时，函数$h(x)$取得极小值，$h(\ln a)=-a[\ln^2 a-2\ln a+\sin(\ln a)+\cos(\ln a)+2]$.

综上所述：$a\leq 0$时，函数$h(x)$在$(0,+\infty)$单调递增；$x<0$时，函数$h(x)$在$(-\infty,0)$单调递减.

x=0时，函数h（x）取得极小值，h（0）=﹣1﹣2a．

0＜a＜1时，函数h（x）在x∈（﹣∞，lna）是单调递增；函数h（x）在x∈（lna，0）上单调递减．当x=0时，函数h（x）取得极小值，h（0）=﹣2a﹣1．当x=lna时，函数h（x）取得极大值，h（lna）=﹣a[ln^2a﹣2lna+sin（lna）+cos（lna）+2]．

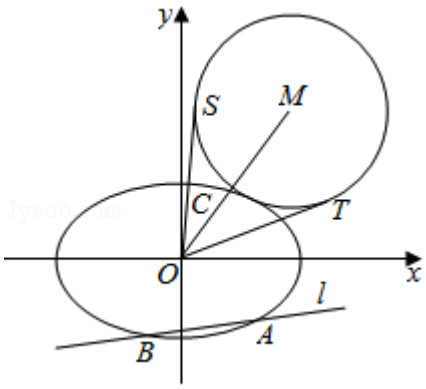
当a=1时，lna=0，函数h（x）在R上单调递增．

a＞1时，函数h（x）在（﹣∞，0），（lna，+∞）上单调递增；函数h（x）在（0，lna）上单调递减．当x=0时，函数h（x）取得极大值，h（0）=﹣2a﹣1．当x=lna时，函数h（x）取得极小值，h（lna）=﹣a[ln^2a﹣2lna+sin（lna）+cos（lna）+2]．

21．（14分）（2017•山东）在平面直角坐标系xOy中，椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，焦距为2．

（Ⅰ）求椭圆E的方程．

（Ⅱ）如图，该直线l：$y=k_1x-\frac{\sqrt{3}}{2}$交椭圆E于A，B两点，C是椭圆E上的一点，直线OC的斜率为k_2，且看$k_1k_2=\frac{\sqrt{2}}{4}$，M是线段OC延长线上一点，且|MC|：|AB|=2：3，⊙M的半径为|MC|，OS，OT是⊙M的两条切线，切点分别为S，T，求∠SOT的最大值，并求取得最大值时直线l的斜率．



【解答】解：（Ⅰ）由题意知，$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\2c=2\\a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得$a=\sqrt{2}$，b=1．

∴椭圆E的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$;

（Ⅱ）设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=k_1x-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$，得$(4k_1^2+2)x^2-4\sqrt{3}k_1x-1=0$.

由题意得△=$64k_1^2+8>0$.

$x_1+x_2=\frac{2\sqrt{3}k_1}{2k_1^2+1}$，$x_1x_2=-\frac{1}{2(2k_1^2+1)}$.

∴$|AB|=\sqrt{1+k_1^2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{1+8k_1^2}}{1+2k_1^2}$.

由题意可知圆M的半径r为

$r=\frac{2}{3}|AB|=\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{1+8k_1^2}}{1+2k_1^2}$.

由题意设知，$k_1k_2=\frac{\sqrt{2}}{4}$，∴$k_2=\frac{\sqrt{2}}{4k_1}$.

因此直线OC的方程为$y=\frac{\sqrt{2}}{4k_1}x$.

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=\frac{\sqrt{2}}{4k_1}x\end{cases}$，得$x^2=\frac{8k_1^2}{1+4k_1^2}$，$y^2=\frac{1}{1+4k_1^2}$.

因此，$|OC|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{1+8k_1^2}{1+4k_1^2}}$.

由题意可知，$\sin\frac{\angle SOT}{2}=\frac{r}{r+|OC|}=\frac{1}{1+\frac{|OC|}{r}}$.

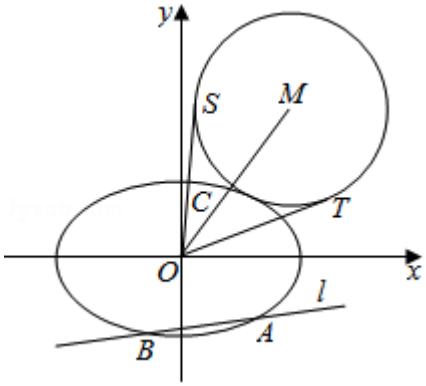
而$\frac{|OC|}{r}=\frac{\sqrt{\frac{1+8k_1^2}{1+4k_1^2}}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{1+8k_1^2}}{1+2k_1^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\frac{1+2k_1^2}{\sqrt{1+4k_1^2}\sqrt{1+k_1^2}}$.

令t= $1+2k_1^2$，则t＞1，$\frac{1}{t}\in$（0，1），

因此，$\frac{|OC|}{r}=\frac{3}{2}\frac{t}{\sqrt{2t^2+t-1}}=\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}}=\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{-(\frac{1}{t}-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}}}\geq 1$.

当且仅当$\frac{1}{t}=\frac{1}{2}$，即t=2时等式成立，此时$k_1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore \sin\frac{\angle SOT}{2}\leqslant\frac{1}{2}$，因此$\frac{\angle SOT}{2}\leqslant\frac{\pi}{6}$.

∴∠SOT的最大值为$\frac{\pi}{3}$.

综上所述：∠SOT的最大值为$\frac{\pi}{3}$，取得最大值时直线l的斜率为$k_1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.