

2014年全国统一高考数学试卷（文科）（新课标 I）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1. （5分）已知集合 $M=\{x \mid -1 < x < 3\}$ ， $N=\{x \mid -2 < x < 1\}$ ，则 $M \cap N=$ （ ）
- A. $(-2, 1)$ B. $(-1, 1)$ C. $(1, 3)$ D. $(-2, 3)$

【考点】1E：交集及其运算.

【专题】5J：集合.

【分析】根据集合的基本运算即可得到结论.

【解答】解： $M=\{x \mid -1 < x < 3\}$ ， $N=\{x \mid -2 < x < 1\}$ ，
则 $M \cap N=\{x \mid -1 < x < 1\}$ ，

故选：B.

【点评】本题主要考查集合的基本运算，比较基础.

2. （5分）若 $\tan \alpha > 0$ ，则（ ）

A. $\sin \alpha > 0$ B. $\cos \alpha > 0$ C. $\sin 2\alpha > 0$ D. $\cos 2\alpha > 0$

【考点】GC：三角函数值的符号.

【专题】56：三角函数的求值.

【分析】化切为弦，然后利用二倍角的正弦得答案.

【解答】解： $\because \tan \alpha > 0$ ，

$$\therefore \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} > 0,$$

则 $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha > 0$.

故选：C.

【点评】本题考查三角函数值的符号，考查了二倍角的正弦公式，是基础题.

3. (5分) 设 $z=\frac{1}{1+i}+i$, 则 $|z|=(\quad)$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 2

【考点】A5: 复数的运算.

【专题】11: 计算题; 5N: 数系的扩充和复数.

【分析】先求 z , 再利用求模的公式求出 $|z|$.

【解答】解: $z=\frac{1}{1+i}+i=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}+i=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

$$\text{故 } |z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故选: B.

【点评】本题考查复数代数形式的运算, 属于容易题.

4. (5分) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1$ ($a > 0$) 的离心率为2, 则实数 $a=(\quad)$

- A. 2 B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. 1

【考点】KC: 双曲线的性质.

【专题】11: 计算题; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】由双曲线方程找出 a , b , c , 代入离心率, 从而求出 a .

【解答】解: 由题意,

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+3}}{a} = 2,$$

解得, $a=1$.

故选: D.

【点评】本题考查了双曲线的定义, 属于基础题.

5. (5分) 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域都为 $\mathbb{R}$, 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 则下列结论正确的是 $(\quad)$

- A. $f(x) \cdot g(x)$ 是偶函数 B. $|f(x)| \cdot g(x)$ 是奇函数

C. $f(x) \cdot |g(x)|$ 是奇函数

D. $|f(x) \cdot g(x)|$ 是奇函数

【考点】3K: 函数奇偶性的性质与判断.

【专题】51: 函数的性质及应用.

【分析】根据函数奇偶性的性质即可得到结论.

【解答】解: $\because f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数,

$$\therefore f(-x) = -f(x), \quad g(-x) = g(x),$$

$f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot g(x)$, 故函数是奇函数, 故A错误,

$|f(-x)| \cdot |g(-x)| = |f(x)| \cdot |g(x)|$ 为偶函数, 故B错误,

$f(-x) \cdot |g(-x)| = -f(x) \cdot |g(x)|$ 是奇函数, 故C正确.

$|f(-x) \cdot g(-x)| = |f(x) \cdot g(x)|$ 为偶函数, 故D错误,

故选: C.

【点评】本题主要考查函数奇偶性的判断, 根据函数奇偶性的定义是解决本题的关键.

6. (5分) 设D, E, F分别为 $\triangle ABC$ 的三边BC, CA, AB的中点, 则 $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{FC} =$ ()

A. $\overrightarrow{AD}$

B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

C. $\overrightarrow{BC}$

D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

【考点】9S: 数量积表示两个向量的夹角.

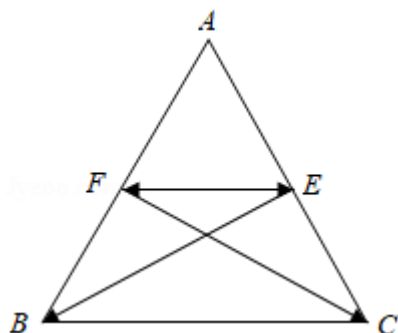
【专题】5A: 平面向量及应用.

【分析】利用向量加法的三角形法则, 将 $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{FC}$ 分解为 $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB}$ 和 $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EC}$ 的形式, 进而根据D, E, F分别为 $\triangle ABC$ 的三边BC, CA, AB的中点, 结合数乘向量及向量加法的平行四边形法则得到答案.

【解答】解: $\because D, E, F$ 分别为 $\triangle ABC$ 的三边BC, CA, AB的中点,

$$\therefore \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{FC} = (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB}) + (\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EC}) = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AD},$$

故选: A.



【点评】 本题考查的知识点是向量在几何中的应用，熟练掌握向量加法的三角形法则和平行四边形法则是解答的关键.

7. (5分) 在函数① $y=\cos |2x|$ ，② $y=|\cos x|$ ，③ $y=\cos \left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ ，④ $y=\tan \left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 中，最小正周期为 π 的所有函数为 ()
- A. ①②③ B. ①③④ C. ②④ D. ①③

【考点】 H1: 三角函数的周期性.

【专题】 57: 三角函数的图像与性质.

【分析】 根据三角函数的周期性，求出各个函数的最小正周期，从而得出结论.

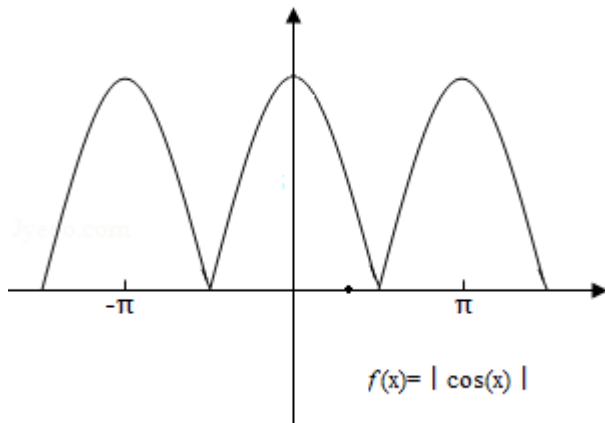
【解答】 解: $\because$ 函数① $y=\cos |2x|=\cos 2x$ ，它的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$ ，

② $y=|\cos x|$ 的最小正周期为 $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{1}=\pi$ ，

③ $y=\cos \left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$ ，

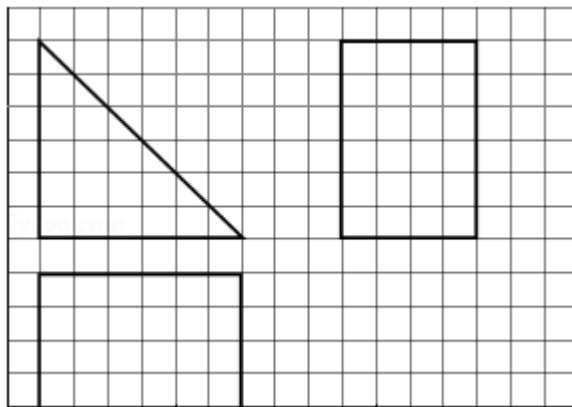
④ $y=\tan \left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ ，

故选: A.



【点评】 本题主要考查三角函数的周期性及求法，属于基础题．

8. （5分）如图，网格纸的各小格都是正方形，粗实线画出的是一个几何体的三视图，则这个几何体是（ ）



- A. 三棱锥 B. 三棱柱 C. 四棱锥 D. 四棱柱

【考点】 L7：简单空间图形的三视图．

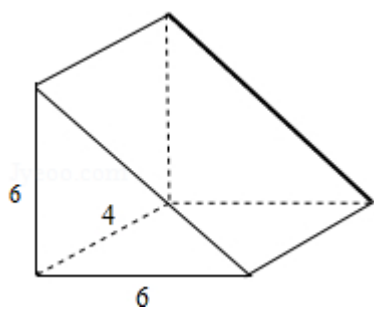
【专题】 5F：空间位置关系与距离．

【分析】 由题意画出几何体的图形即可得到选项．

【解答】 解：根据网格纸的各小格都是正方形，粗实线画出的是一个几何体的三视图，

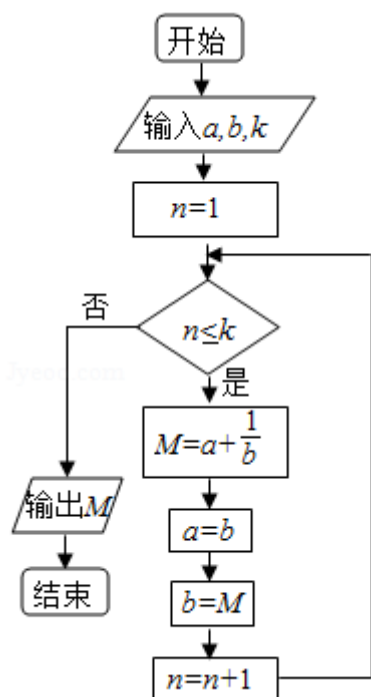
可知几何体如图：几何体是三棱柱．

故选：B．



【点评】 本题考查三视图复原几何体的直观图的判断方法，考查空间想象能力

9. （5分）执行如图的程序框图，若输入的 a, b, k 分别为1, 2, 3，则输出的 $M=$ （ ）



A. $\frac{20}{3}$

B. $\frac{7}{2}$

C. $\frac{16}{5}$

D. $\frac{15}{8}$

【考点】 EF： 程序框图.

【专题】 5I： 概率与统计.

【分析】 根据框图的流程模拟运行程序，直到不满足条件，计算输出 M 的值.

【解答】 解： 由程序框图知： 第一次循环 $M=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ ， $a=2$ ， $b=\frac{3}{2}$ ， $n=2$ ；

第二次循环 $M=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$ ， $a=\frac{3}{2}$ ， $b=\frac{8}{3}$ ， $n=3$ ；

第三次循环 $M=\frac{3}{2}+\frac{3}{8}=\frac{15}{8}$, $a=\frac{8}{3}$, $b=\frac{15}{8}$, $n=4$.

不满足条件 $n\leq 3$, 跳出循环体, 输出 $M=\frac{15}{8}$.

故选: D.

【点评】 本题考查了当型循环结构的程序框图, 根据框图的流程模拟运行程序是解答此类问题的常用方法.

10. (5分) 已知抛物线C: $y^2=x$ 的焦点为F, A (x_0 , y_0) 是C上一点, $AF=|\frac{5}{4}x_0|$, 则 $x_0=$ ()

A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

【考点】 K8: 抛物线的性质.

【专题】 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 利用抛物线的定义、焦点弦长公式即可得出.

【解答】 解: 抛物线C: $y^2=x$ 的焦点为F ($\frac{1}{4}$, 0),

$\because$ A (x_0 , y_0) 是C上一点, $AF=|\frac{5}{4}x_0|$, $x_0>0$.

$$\therefore \frac{5}{4}x_0=x_0+\frac{1}{4},$$

解得 $x_0=1$.

故选: A.

【点评】 本题考查了抛物线的定义、焦点弦长公式, 属于基础题.

11. (5分) 设 x , y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\geq a \\ x-y\leq -1 \end{cases}$ 且 $z=x+ay$ 的最小值为7, 则 $a=$ ()

A. -5 B. 3 C. -5或3 D. 5或-3

【考点】 7F: 基本不等式及其应用.

【专题】 5B: 直线与圆.

【分析】 如图所示, 当 $a\geq 1$ 时, 由 $\begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=a \end{cases}$, 解得A($\frac{a-1}{2}$, $\frac{a+1}{2}$). 当直线 $z=x+ay$

经过A点时取得最小值为7，同理对 $a < 1$ 得出.

【解答】解：如图所示，

当 $a \geq 1$ 时，由 $\begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=a \end{cases}$,

解得 $x=\frac{a-1}{2}$, $y=\frac{a+1}{2}$.

$\therefore A(\frac{a-1}{2}, \frac{a+1}{2})$.

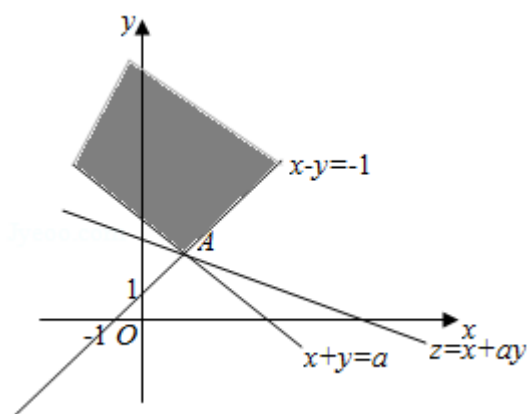
当直线 $z=x+ay$ 经过A点时取得最小值为7，

$\therefore 7=\frac{a-1}{2}+\frac{a(a+1)}{2}$, 化为 $a^2+2a-15=0$,

解得 $a=3$, $a=-5$ 舍去.

当 $a < 1$ 时，不符合条件.

故选：B.



【点评】本题考查了线性规划的有关知识、直线的斜率与交点，考查了数形结合的思想方法，属于中档题.

12. (5分) 已知函数 $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$, 若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0 , 且 $x_0 > 0$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(-\infty, -1)$ D. $(-\infty, -2)$

【考点】53: 函数的零点与方程根的关系.

【专题】11: 计算题; 51: 函数的性质及应用; 53: 导数的综合应用.

【分析】由题意可得 $f'(x) = 3ax^2 - 6x = 3x(ax - 2)$, $f(0) = 1$; 分类讨论确定

函数的零点的个数及位置即可.

【解答】解: $\because f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$,

$$\therefore f'(x) = 3ax^2 - 6x = 3x(ax - 2), \quad f(0) = 1;$$

①当 $a=0$ 时, $f(x) = -3x^2 + 1$ 有两个零点, 不成立;

②当 $a>0$ 时, $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有零点, 故不成立;

③当 $a<0$ 时, $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上有且只有一个零点;

故 $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$ 在 $(-\infty, 0)$ 上没有零点;

而当 $x = \frac{2}{a}$ 时, $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$ 在 $(-\infty, 0)$ 上取得最小值;

$$\text{故 } f\left(\frac{2}{a}\right) = \frac{8}{a^2} - 3 \cdot \frac{4}{a^2} + 1 > 0;$$

故 $a < -2$;

综上所述,

实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -2)$;

故选: D.

【点评】 本题考查了导数的综合应用及分类讨论的思想应用, 同时考查了函数的零点的判定的应用, 属于基础题.

二、填空题: 本大题共4小题, 每小题5分

13. (5分) 将2本不同的数学书和1本语文书在书架上随机排成一行, 则2本数学书相邻的概率为 $\frac{2}{3}$.

【考点】 CB: 古典概型及其概率计算公式.

【专题】 5I: 概率与统计.

【分析】 首先求出所有的基本事件的个数, 再从中找到2本数学书相邻的个数, 最后根据概率公式计算即可.

【解答】 解: 2本不同的数学书和1本语文书在书架上随机排成一行, 所有的基本事件有共有 $A_3^3 = 6$ 种结果,

其中2本数学书相邻的有(数学1, 数学2, 语文), (数学2, 数学1, 语文), (语文, 数学1, 数学2), (语文, 数学2, 数学1) 共4个, 故本数学书相

$$\text{邻的概率 } P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

故答案为: $\frac{2}{3}$.

【点评】 本题考查了古典概型的概率公式的应用, 关键是不重不漏的列出满足条件的基本事件.

14. (5分) 甲、乙、丙三位同学被问到是否去过A, B, C三个城市时,

甲说: 我去过的城市比乙多, 但没去过B城市;

乙说: 我没去过C城市;

丙说: 我们三人去过同一城市;

由此可判断乙去过的城市为 A.

【考点】 F4: 进行简单的合情推理.

【专题】 5M: 推理和证明.

【分析】 可先由乙推出, 可能去过A城市或B城市, 再由甲推出只能是A, B中的一个, 再由丙即可得出结论.

【解答】 解: 由乙说: 我没去过C城市, 则乙可能去过A城市或B城市,

但甲说: 我去过的城市比乙多, 但没去过B城市, 则乙只能是去过A, B中的一个,

再由丙说: 我们三人去过同一城市,

则由此可判断乙去过的城市为A.

故答案为: A.

【点评】 本题主要考查简单的合情推理, 要抓住关键, 逐步推断, 是一道基础题.

$$15. (5分) \text{ 设函数 } f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & x < 1 \\ \frac{1}{x^3}, & x \geq 1 \end{cases}, \text{ 则使得 } f(x) \leq 2 \text{ 成立的 } x \text{ 的取值范}$$

围是 $x \leq 8$.

【考点】5B：分段函数的应用.

【专题】11：计算题；51：函数的性质及应用.

【分析】利用分段函数，结合 $f(x) \leq 2$ ，解不等式，即可求出使得 $f(x) \leq 2$ 成立的 x 的取值范围.

【解答】解： $x < 1$ 时， $e^{x-1} \leq 2$ ，

$$\therefore x \leq \ln 2 + 1,$$

$$\therefore x < 1;$$

$$x \geq 1 \text{ 时, } \frac{1}{x^3} \leq 2,$$

$$\therefore x \leq 8,$$

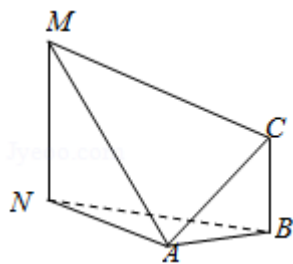
$$\therefore 1 \leq x \leq 8,$$

综上，使得 $f(x) \leq 2$ 成立的 x 的取值范围是 $x \leq 8$.

故答案为： $x \leq 8$.

【点评】本题考查不等式的解法，考查分段函数，考查学生的计算能力，属于基础题.

16. (5分) 如图，为测量山高 MN ，选择 A 和另一座的山顶 C 为测量观测点，从 A 点测得 M 点的仰角 $\angle MAN = 60^\circ$ ， C 点的仰角 $\angle CAB = 45^\circ$ 以及 $\angle MAC = 75^\circ$ ；从 C 点测得 $\angle MCA = 60^\circ$ ，已知山高 $BC = 100\text{m}$ ，则山高 $MN = \underline{150} \text{ m}$.



【考点】HU：解三角形.

【专题】12：应用题；58：解三角形.

【分析】 $\triangle ABC$ 中，由条件利用直角三角形中的边角关系求得

AC ； $\triangle AMC$ 中，由条件利用正弦定理求得 AM ； $\text{Rt}\triangle AMN$ 中，根据 $MN = AM \cdot \sin \angle MAN$ ，计算求得结果.

【解答】解：△ABC中，∵∠BAC=45°，∠ABC=90°，BC=100，

$$\therefore AC = \frac{100}{\sin 45^\circ} = 100\sqrt{2}.$$

△AMC中，∵∠MAC=75°，∠MCA=60°，

$$\therefore \angle AMC = 45^\circ, \text{ 由正弦定理可得 } \frac{AM}{\sin 60^\circ} = \frac{100\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}, \text{ 解得 } AM = 100\sqrt{3}.$$

$$\text{Rt}\triangle AMN \text{ 中, } MN = AM \cdot \sin \angle MAN = 100\sqrt{3} \times \sin 60^\circ = 150 \text{ (m)},$$

故答案为：150.

【点评】本题主要考查正弦定理、直角三角形中的边角关系，属于中档题.

三、解答题：解答应写出文字说明．证明过程或演算步骤

17. (12分) 已知 $\{a_n\}$ 是递增的等差数列， a_2, a_4 是方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\{\frac{a_n}{2^n}\}$ 的前n项和.

【考点】84：等差数列的通项公式；8E：数列的求和.

【专题】15：综合题；54：等差数列与等比数列.

【分析】(1) 解出方程的根，根据数列是递增的求出 a_2, a_4 的值，从而解出通项；

(2) 将第一问中求得的通项代入，用错位相减法求和.

【解答】解：(1) 方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根为2, 3. 又 $\{a_n\}$ 是递增的等差数列，
故 $a_2 = 2, a_4 = 3$ ，可得 $2d = 1, d = \frac{1}{2}$ ，

$$\text{故 } a_n = 2 + (n - 2) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n + 1,$$

(2) 设数列 $\{\frac{a_n}{2^n}\}$ 的前n项和为 S_n ，

$$S_n = \frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{a_n}{2^n}, \quad ①$$

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{a_1}{2^2} + \frac{a_2}{2^3} + \frac{a_3}{2^4} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^n} + \frac{a_n}{2^{n+1}}, \quad ②$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } \frac{1}{2}S_n = \frac{a_1}{2} + d\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) - \frac{a_n}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{a_n}{2^{n+1}}$$

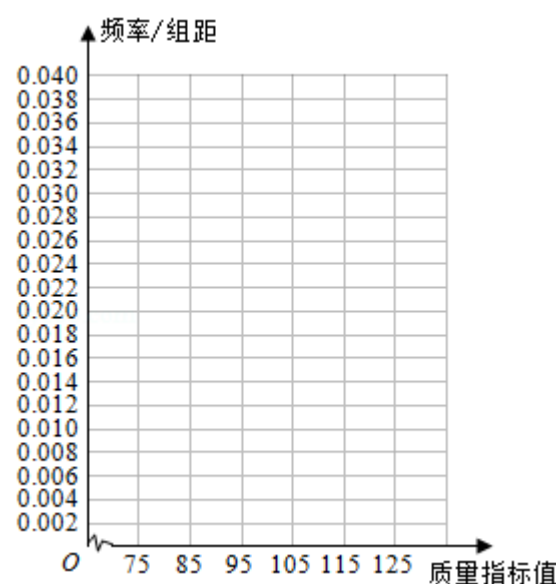
$$\text{解得 } S_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{n+2}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+4}{2^{n+1}}.$$

【点评】 本题考查等的性质及错位相减法求和，是近几年高考对数列解答题考查的主要方式.

18. (12分) 从某企业生产的产品中抽取100件，测量这些产品的一项质量指标值，由测量结果得如下频数分布表：

质量指标值分组	[75, 85)	[85, 95)	[95, 105)	[105, 115)	[115, 125)
频数	6	26	38	22	8

(1) 在表格中作出这些数据的频率分布直方图；



- (2) 估计这种产品质量指标的平均数及方差（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）；
- (3) 根据以上抽样调查数据，能否认为该企业生产的这种产品符合“质量指标值不低于95的产品至少要占全部产品80%”的规定？

【考点】 B8：频率分布直方图； BC：极差、方差与标准差.

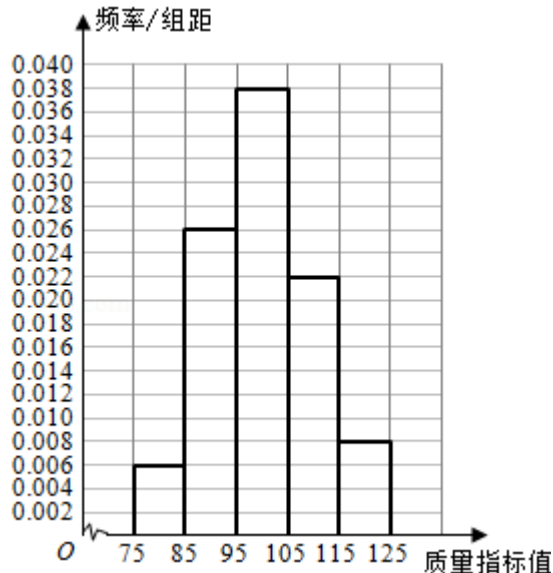
【专题】51：概率与统计.

【分析】（1）根据频率分布直方图做法画出即可；

（2）用样本平均数和方差来估计总体的平均数和方差，代入公式计算即可.

（3）求出质量指标值不低于95的产品所占比例的估计值，再和0.8比较即可.

【解答】解：（1）频率分布直方图如图所示：



（2）质量指标的样本平均数为 $\bar{x}=80 \times 0.06+90 \times 0.26+100 \times 0.38+110 \times 0.22+120 \times 0.08=100$,

质量指标的样本的方差为 $S^2=(-20)^2 \times 0.06+(-10)^2 \times 0.26+0 \times 0.38+10^2 \times 0.22+20^2 \times 0.08=104$,

这种产品质量指标的平均数的估计值为100，方差的估计值为104.

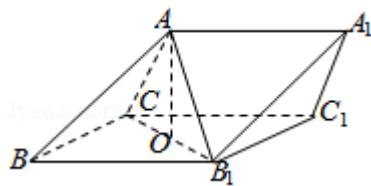
（3）质量指标值不低于95的产品所占比例的估计值为 $0.38+0.22+0.08=0.68$ ，
由于该估计值小于0.8，故不能认为该企业生产的这种产品符合“质量指标值不低于95的产品至少要占全部产品80%”的规定.

【点评】本题主要考查了频率分布直方图，样本平均数和方差，考查了学习的细心的绘图能力和精确的计算能力.

19. （12分）如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BB_1C_1C 为菱形， B_1C 的中点为 O ，且 $AO \perp$ 平面 BB_1C_1C .

（1）证明： $B_1C \perp AB$ ；

（2）若 $AC \perp AB_1$ ， $\angle CBB_1=60^\circ$ ， $BC=1$ ，求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高.



【考点】LF：棱柱、棱锥、棱台的体积；LW：直线与平面垂直．

【专题】15：综合题；5F：空间位置关系与距离．

【分析】（1）连接 BC_1 ，则O为 B_1C 与 BC_1 的交点，证明 $B_1C \perp$ 平面ABO，可得 $B_1C \perp AB$ ；

（2）作 $OD \perp BC$ ，垂足为D，连接AD，作 $OH \perp AD$ ，垂足为H，证明 $\triangle CBB_1$ 为等边三角形，求出 B_1 到平面ABC的距离，即可求三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的高．

【解答】（1）证明：连接 BC_1 ，则O为 B_1C 与 BC_1 的交点，

$\because$ 侧面 BB_1C_1C 为菱形，

$\therefore BC_1 \perp B_1C$ ，

$\because AO \perp$ 平面 BB_1C_1C ，

$\therefore AO \perp B_1C$ ，

$\because AO \cap BC_1 = O$ ，

$\therefore B_1C \perp$ 平面ABO，

$\because AB \subset$ 平面ABO，

$\therefore B_1C \perp AB$ ；

（2）解：作 $OD \perp BC$ ，垂足为D，连接AD，作 $OH \perp AD$ ，垂足为H，

$\because BC \perp AO$ ， $BC \perp OD$ ， $AO \cap OD = O$ ，

$\therefore BC \perp$ 平面AOD，

$\therefore OH \perp BC$ ，

$\because OH \perp AD$ ， $BC \cap AD = D$ ，

$\therefore OH \perp$ 平面ABC，

$\because \angle CBB_1 = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle CBB_1$ 为等边三角形，

$\because BC = 1$ ， $\therefore OD = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ，

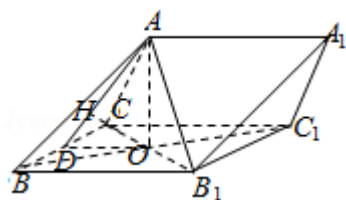
$$\because AC \perp AB_1, \therefore OA = \frac{1}{2} B_1C = \frac{1}{2},$$

$$\text{由 } OH \cdot AD = OD \cdot OA, \text{ 可得 } AD = \frac{\sqrt{OD^2 + OA^2}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{4}, \therefore OH = \frac{\sqrt{21}}{14},$$

$\therefore O$ 为 B_1C 的中点,

$$\therefore B_1 \text{ 到平面 } ABC \text{ 的距离为 } \frac{\sqrt{21}}{7},$$

$$\therefore \text{三棱柱 } ABC - A_1B_1C_1 \text{ 的高 } \frac{\sqrt{21}}{7}.$$



【点评】 本题考查线面垂直的判定与性质，考查点到平面距离的计算，考查学生分析解决问题的能力，属于中档题.

20. (12分) 已知点 $P(2, 2)$ ，圆 $C: x^2 + y^2 - 8y = 0$ ，过点 P 的动直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点，线段 AB 的中点为 M ， O 为坐标原点.

(1) 求 M 的轨迹方程;

(2) 当 $|OP| = |OM|$ 时，求 l 的方程及 $\triangle POM$ 的面积.

【考点】 %H: 三角形的面积公式; J3: 轨迹方程.

【专题】 5B: 直线与圆.

【分析】 (1) 由圆 C 的方程求出圆心坐标和半径，设出 M 坐标，由 $\overrightarrow{CM}$ 与 $\overrightarrow{MP}$ 数量积等于 0 列式得 M 的轨迹方程;

(2) 设 M 的轨迹的圆心为 N ，由 $|OP| = |OM|$ 得到 $ON \perp PM$. 求出 ON 所在直线的斜率，由直线方程的点斜式得到 PM 所在直线方程，由点到直线的距离公式求出 O 到 l 的距离，再由弦心距、圆的半径及弦长间的关系求出 PM 的长度，代入三角形面积公式得答案.

【解答】 解: (1) 由圆 $C: x^2 + y^2 - 8y = 0$ ，得 $x^2 + (y - 4)^2 = 16$,

$\therefore$ 圆 C 的圆心坐标为 $(0, 4)$ ，半径为 4.

设 $M(x, y)$ ，则 $\overrightarrow{CM} = (x, y - 4)$ ， $\overrightarrow{MP} = (2 - x, 2 - y)$.

由题意可得： $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$.

$$\text{即 } x(2-x) + (y-4)(2-y) = 0.$$

$$\text{整理得： } (x-1)^2 + (y-3)^2 = 2.$$

$$\therefore M \text{ 的轨迹方程是 } (x-1)^2 + (y-3)^2 = 2.$$

(2) 由(1)知M的轨迹是以点N(1, 3)为圆心， $\sqrt{2}$ 为半径的圆，

由于 $|OP| = |OM|$,

故O在线段PM的垂直平分线上，

又P在圆N上，

从而 $ON \perp PM$.

$$\therefore k_{ON} = 3,$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 的斜率为 } -\frac{1}{3}.$$

$$\therefore \text{直线 } PM \text{ 的方程为 } y-2 = -\frac{1}{3}(x-2), \text{ 即 } x+3y-8=0.$$

$$\text{则O到直线 } l \text{ 的距离为 } \frac{|-8|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}.$$

$$\text{又N到 } l \text{ 的距离为 } \frac{|1 \times 1 + 3 \times 3 - 8|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

$$\therefore |PM| = 2\sqrt{2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2} = \frac{4\sqrt{10}}{5}.$$

$$\therefore S_{\triangle POM} = \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{10}}{5} \times \frac{4\sqrt{10}}{5} = \frac{16}{5}.$$

【点评】 本题考查圆的轨迹方程的求法，训练了利用向量数量积判断两个向量的垂直关系，训练了点到直线的距离公式的应用，是中档题.

21. (12分) 设函数 $f(x) = a \ln x + \frac{1-a}{2}x^2 - bx$ ($a \neq 1$)，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f$

(1)) 处的切线斜率为0，

(1) 求b；

(2) 若存在 $x_0 \geq 1$ ，使得 $f(x_0) < \frac{a}{a-1}$ ，求a的取值范围.

【考点】 6H：利用导数研究曲线上某点切线方程.

【专题】 53：导数的综合应用.

【分析】(1) 利用导数的几何意义即可得出；

(2) 对 a 分类讨论：当 $a \leq \frac{1}{2}$ 时，当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时，当 $a > 1$ 时，再利用导数研究函数的单调性极值与最值即可得出。

【解答】解：(1) $f'(x) = \frac{a}{x} + (1-a)x - b$ ($x > 0$)，

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为0，

$\therefore f'(1) = a + (1-a) \times 1 - b = 0$ ，解得 $b=1$ 。

(2) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，由(1)可知： $f(x) = a \ln x + \frac{1-a}{2} x^2 - x$

$$\therefore f'(x) = \frac{a}{x} + (1-a)x - 1 = \frac{(1-a)}{x} (x - \frac{a}{1-a}) (x-1).$$

① 当 $a \leq \frac{1}{2}$ 时，则 $\frac{a}{1-a} \leq 1$ ，

则当 $x > 1$ 时， $f'(x) > 0$ ，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增，

$\therefore$ 存在 $x_0 \geq 1$ ，使得 $f(x_0) < \frac{a}{a-1}$ 的充要条件是 $f(1) < \frac{a}{a-1}$ ，即 $\frac{1-a}{2} - 1 < \frac{a}{a-1}$ ，

解得 $-\sqrt{2}-1 < a < \sqrt{2}-1$ ；

② 当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时，则 $\frac{a}{1-a} > 1$ ，

则当 $x \in (1, \frac{a}{1-a})$ 时， $f'(x) < 0$ ，函数 $f(x)$ 在 $(1, \frac{a}{1-a})$ 上单调递减；

当 $x \in (\frac{a}{1-a}, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ，函数 $f(x)$ 在 $(\frac{a}{1-a}, +\infty)$ 上单调递增。

$\therefore$ 存在 $x_0 \geq 1$ ，使得 $f(x_0) < \frac{a}{a-1}$ 的充要条件是 $f(\frac{a}{1-a}) < \frac{a}{a-1}$ ，

而 $f(\frac{a}{1-a}) = a \ln \frac{a}{1-a} + \frac{a^2}{2(1-a)} + \frac{a}{a-1} > \frac{a}{a-1}$ ，不符合题意，应舍去。

③ 若 $a > 1$ 时， $f(1) = \frac{1-a}{2} - 1 = \frac{-a-1}{2} < \frac{a}{a-1}$ ，成立。

综上所述： a 的取值范围是 $(-\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1) \cup (1, +\infty)$ 。

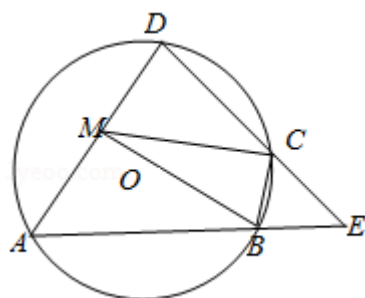
【点评】本题考查了导数的几何意义、利用导数研究函数的单调性极值与最值等基础知识与基本技能方法，考查了分类讨论的思想方法，考查了推理能力和计算能力，属于难题。

请考生在第22，23，24题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分。
【选修4-1：几何证明选讲】

22. (10分) 如图，四边形ABCD是 $\odot O$ 的内接四边形，AB的延长线与DC的延长线交于点E，且CB=CE.

(I) 证明： $\angle D = \angle E$;

(II) 设AD不是 $\odot O$ 的直径，AD的中点为M，且MB=MC，证明： $\triangle ADE$ 为等边三角形.



【考点】NB：弦切角；NC：与圆有关的比例线段.

【专题】15：综合题；5M：推理和证明.

【分析】(I) 利用四边形ABCD是 $\odot O$ 的内接四边形，可得 $\angle D = \angle CBE$ ，由CB=CE，可得 $\angle E = \angle CBE$ ，即可证明： $\angle D = \angle E$;

(II) 设BC的中点为N，连接MN，证明AD $\parallel$ BC，可得 $\angle A = \angle CBE$ ，进而可得 $\angle A = \angle E$ ，即可证明 $\triangle ADE$ 为等边三角形.

【解答】证明：(I) $\because$ 四边形ABCD是 $\odot O$ 的内接四边形，

$\therefore \angle D = \angle CBE$,

$\because CB = CE$,

$\therefore \angle E = \angle CBE$,

$\therefore \angle D = \angle E$;

(II) 设BC的中点为N，连接MN，则由MB=MC知MN $\perp$ BC，

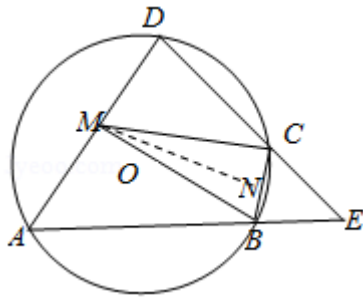
$\therefore O$ 在直线MN上，

$\because AD$ 不是 $\odot O$ 的直径，AD的中点为M，

$\therefore OM \perp AD$,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \triangle ADE$ 为等边三角形.



【解答】解：（Ⅰ）对于曲线C： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ，可令 $x=2\cos\theta$ 、 $y=3\sin\theta$ ，

故曲线C的参数方程为 $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=3\sin\theta \end{cases}$ ，（ θ 为参数）。

对于直线l： $\begin{cases} x=2+t & \text{①} \\ y=2-2t & \text{②} \end{cases}$ ，

由①得： $t=x-2$ ，代入②并整理得： $2x+y-6=0$ ；

（Ⅱ）设曲线C上任意一点P（ $2\cos\theta$ ， $3\sin\theta$ ）。

P到直线l的距离为 $d = \frac{\sqrt{5}}{5} |4\cos\theta + 3\sin\theta - 6|$ 。

则 $|PA| = \frac{d}{\sin 30^\circ} = \frac{2\sqrt{5}}{5} |5\sin(\theta + \alpha) - 6|$ ，其中 α 为锐角。

当 $\sin(\theta + \alpha) = -1$ 时， $|PA|$ 取得最大值，最大值为 $\frac{22\sqrt{5}}{5}$ 。

当 $\sin(\theta + \alpha) = 1$ 时， $|PA|$ 取得最小值，最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 。

【点评】本题考查普通方程与参数方程的互化，训练了点到直线的距离公式，体现了数学转化思想方法，是中档题。

【选修4-5：不等式选讲】

24. 若 $a > 0$ ， $b > 0$ ，且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \sqrt{ab}$ 。

（Ⅰ）求 $a^3 + b^3$ 的最小值；

（Ⅱ）是否存在 a ， b ，使得 $2a + 3b = 6$ ？并说明理由。

【考点】R1：平均值不等式。

【专题】59：不等式的解法及应用。

【分析】（Ⅰ）由条件利用基本不等式求得 $ab \geq 2$ ，再利用基本不等式求得 $a^3 + b^3$ 的最小值。

（Ⅱ）根据

$ab \geq 2$ 及基本不等式求的 $2a + 3b > 8$ ，从而可得不存在 a ， b ，使得 $2a + 3b = 6$ 。

【解答】解：（Ⅰ） $\because a > 0$ ， $b > 0$ ，且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \sqrt{ab}$ ，

$\therefore \sqrt{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$ ， $\therefore ab \geq 2$ ，

当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$ 时取等号.

$\therefore a^3+b^3 \geq 2\sqrt{(ab)^3} \geq 2\sqrt{2^3}=4\sqrt{2}$, 当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$ 时取等号,

$\therefore a^3+b^3$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$.

(II) $\therefore 2a+3b \geq 2\sqrt{2a \cdot 3b} = 2\sqrt{6ab}$, 当且仅当 $2a=3b$ 时, 取等号.

而由(1)可知, $2\sqrt{6ab} \geq 2\sqrt{12}=4\sqrt{3}>6$,

故不存在 a, b , 使得 $2a+3b=6$ 成立.

【点评】 本题主要考查基本不等式在最值中的应用, 要注意检验等号成立条件是否具备, 属于基础题.