

2015 年普通高等学校招生全国统一考试（湖北卷）

数 学（理工类）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. i 为虚数单位， i^{607} 的共轭复数为（ ）.

A. i B. $-i$ C. 1 D. -1
2. 我国古代数学名著《数书九章》有“米谷粒分”题：粮仓开仓收粮，有人送来米 1534 石，验得米内夹谷，抽样取米一把，数得 254 粒内夹谷 28 粒，则这批米内夹谷约为（ ）.

A. 134 石 B. 169 石 C. 338 石 D. 1365 石
3. 已知 $(1+x)^n$ 的展开式中第 4 项与第 8 项的二项式系数相等，则奇数项的二项式系数和为（ ）.

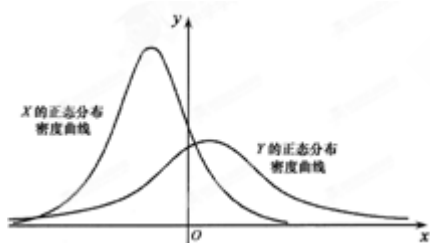
A. 2^{12} B. 2^{11} C. 2^{10} D. 2^9
4. 设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ， $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ，这两个正态分布密度曲线如图所示. 下列结论中正确的是（ ）.

A. $P(Y \geq \mu_2) \geq P(Y \geq \mu_1)$

B. $P(X \leq \sigma_2) \leq P(X \leq \sigma_1)$

C. 对任意正数 t ， $P(X \leq t) \geq P(Y \leq t)$

D. 对任意正数 t ， $P(X \geq t) \geq P(Y \geq t)$



5. 设 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ ， $n \geq 3$. 若 p : a_1, a_2, \dots, a_n 成等比数列；
 q : $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2)(a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2) = (a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n)^2$ ，则（ ）.

A. p 是 q 的充分条件，但不是 q 的必要条件

B. p 是 q 的必要条件，但不是 q 的充分条件

C. p 是 q 的充分必要条件

D. p 既不是 q 的充分条件，也不是 q 的必要条件

6. 已知符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数， $g(x) = f(x) - f(ax)$ ($a > 1$)，则

- A. $\operatorname{sgn}[g(x)] = \operatorname{sgn} x$ B. $\operatorname{sgn}[g(x)] = -\operatorname{sgn} x$

C. $\text{sgn}[g(x)] = \text{sgn}[f(x)]$

D. $\text{sgn}[g(x)] = -\text{sgn}[f(x)]$

7. 在区间 $[0, 1]$ 上随机取两个数 x, y , 记 p_1 为事件 “ $x + y \geq \frac{1}{2}$ ” 的概率, p_2 为事件 “ $|x - y| \leq \frac{1}{2}$ ” 的概率,

p_3 为事件 “ $xy \leq \frac{1}{2}$ ” 的概率, 则 ().

A. $p_1 < p_2 < p_3$

B. $p_2 < p_3 < p_1$

C. $p_3 < p_1 < p_2$

D. $p_3 < p_2 < p_1$

8. 将离心率为 e_1 的双曲线 C_1 的实半轴长 a 和虚半轴长 b ($a \neq b$) 同时增加 m ($m > 0$) 个单位长度, 得到离心率为 e_2 的双曲线 C_2 , 则 ().

A. 对任意的 a, b , $e_1 > e_2$

B. 当 $a > b$ 时, $e_1 > e_2$; 当 $a < b$ 时, $e_1 < e_2$

C. 对任意的 a, b , $e_1 < e_2$

D. 当 $a > b$ 时, $e_1 < e_2$; 当 $a < b$ 时, $e_1 > e_2$

9. 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x, y \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{(x, y) | |x| \leq 2, |y| \leq 2, x, y \in \mathbf{Z}\}$, 定义集合

$A \oplus B = \{(x_1 + x_2, y_1 + y_2) | (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B\}$, 则 $A \oplus B$ 中元素的个数为 ().

A. 77

B. 49

C. 45

D. 30

10. 设 $x \in \mathbf{R}$, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 若存在实数 t , 使得 $[t] = 1, [t^2] = 2, \dots, [t^n] = n$ 同时成立, 则正整数 n 的最大值是 ().

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

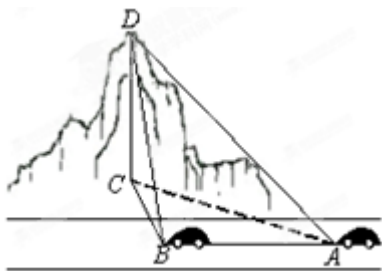
二、填空题: 本大题共 6 小题, 考生需作答 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分. 请将答案填在答题卡对应题号的位置上. 答错位置, 书写不清, 模棱两可均不得分.

(一) 必考题 (11—14 题)

11. 已知向量 $\overline{OA} \perp \overline{AB}$, $|\overline{OA}| = 3$, 则 $\overline{OA} \cdot \overline{OB} =$ _____.

12. 函数 $f(x) = 4 \cos^2 \frac{x}{2} \cos(\frac{\pi}{2} - x) - 2 \sin x - |\ln(x + 1)|$ 的零点个数为 _____.

13. 如图, 一辆汽车在一条水平的公路上向正西行驶, 到 A 处时测得公路北侧一山顶 D 在西偏北 30° 的方向上, 行驶 600m 后到达 B 处, 测得此山顶在西偏北 75° 的方向上, 仰角为 30° , 则此山的高度 $CD =$ _____ m.



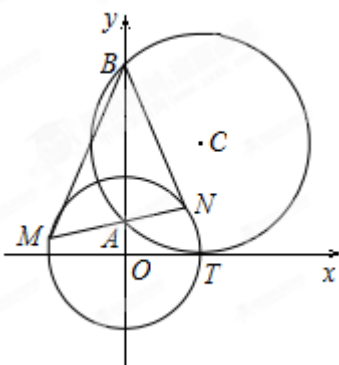
14. 如图, 圆 C 与 x 轴相切于点 $T(1, 0)$, 与 y 轴正半轴交于两点 A, B (B 在 A 的上方), 且 $|AB|=2$.

(I) 圆 C 的标准方程为_____;

(II) 过点 A 任作一条直线与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相交于 M, N 两点, 下列三个结论:

① $\frac{|NA|}{|NB|} = \frac{|MA|}{|MB|}$; ② $\frac{|NB|}{|NA|} - \frac{|MA|}{|MB|} = 2$; ③ $\frac{|NB|}{|NA|} + \frac{|MA|}{|MB|} = 2\sqrt{2}$.

其中正确结论的序号是_____. (写出所有正确结论的序号)

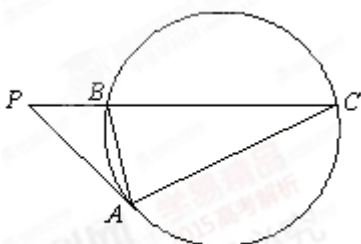


(二) 选考题 (请考生在第 15、16 两题中任选一题作答, 请先在答题卡指定位置将你所选的题目序号后的方框用 2B 铅笔涂黑. 如果全选, 则按第 15 题作答结果计分.)

15. (选修 4-1: 几何证明选讲)

如图, PA 是圆的切线, A 为切点, PBC 是圆的割线,

且 $BC = 3PB$, 则 $\frac{AB}{AC} =$ _____.



第 15 题图

16. (选修 4-4: 坐标系与参数方程)

在直角坐标系 xOy 中, 以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 已知直线 l 的极坐标方程为

$$\rho(\sin\theta - 3\cos\theta) = 0, \text{ 曲线 } C \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = t - \frac{1}{t}, \\ y = t + \frac{1}{t} \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}), \text{ } l \text{ 与 } C \text{ 相交于 } A, B \text{ 两点, 则}$$

$|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 11 分)

某同学用“五点法”画函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 在某一个周期内的图象

时，列表并填入了部分数据，如下表：

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$A\sin(\omega x + \varphi)$	0	5		-5	0

(I) 请将上表数据补充完整，填写在答题卡上相应位置，并直接写出函数 $f(x)$ 的解析式；

(II) 将 $y = f(x)$ 图象上所有点向左平行移动 θ ($\theta > 0$) 个单位长度，得到 $y = g(x)$ 的图象. 若 $y = g(x)$ 图象的一个对称中心为 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$ ，求 θ 的最小值.

18. (本小题满分 12 分)

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，前 n 项和为 S_n ，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q 。已知 $b_1 = a_1$ ， $b_2 = 2$ ， $q = d$ ， $S_{10} = 100$ 。

(I) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式；

(II) 当 $d > 1$ 时，记 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

19. (本小题满分 12 分)

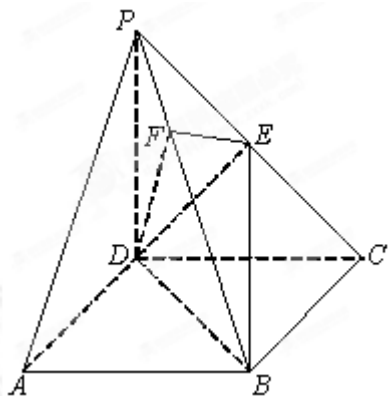
《九章算术》中，将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马，将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑。

如图，在阳马 $P-ABCD$ 中，侧棱 $PD \perp$ 底面 $ABCD$ ，且 $PD = CD$ ，过棱 PC 的中点 E ，作 $EF \perp PB$ 交 PB

于点 F ，连接 DE, DF, BD, BE 。

(I) 证明： $PB \perp$ 平面 DEF 。试判断四面体 $DBEF$ 是否为鳖臑，若是，写出其每个面的直角（只需写出结论）；若不是，说明理由；

(II) 若面 DEF 与面 $ABCD$ 所成二面角的大小为 $\frac{\pi}{3}$, 求 $\frac{DC}{BC}$ 的值.



20. (本小题满分 12 分)

某厂用鲜牛奶在某台设备上生产 A, B 两种奶制品. 生产 1 吨 A 产品需鲜牛奶 2 吨, 使用设备 1 小时, 获利 1000 元; 生产 1 吨 B 产品需鲜牛奶 1.5 吨, 使用设备 1.5 小时, 获利 1200 元. 要求每天 B 产品的产量不超过 A 产品产量的 2 倍, 设备每天生产 A, B 两种产品时间之和不超过 12 小时. 假定每天可获取的鲜牛奶数量 W (单位: 吨) 是一个随机变量, 其分布列为

W	12	15	18
P	0.3	0.5	0.2

该厂每天根据获取的鲜牛奶数量安排生产, 使其获利最大, 因此每天的最大获利 Z (单位: 元) 是一个随机变量.

(I) 求 Z 的分布列和均值;

(II) 若每天可获取的鲜牛奶数量相互独立, 求 3 天中至少有 1 天的最大获利超过 10000 元的概率.

21. (本小题满分 14 分)

一种作图工具如图 1 所示. O 是滑槽 AB 的中点, 短杆 ON 可绕 O 转动, 长杆 MN 通过 N 处铰链与 ON 连接, MN 上的栓子 D 可沿滑槽 AB 滑动, 且 $DN = ON = 1$, $MN = 3$. 当栓子 D 在滑槽 AB 内作往复运动时, 带动 N 绕 O 转动一周 (D 不动时, N 也不动), M 处的笔尖画出的曲线记为 C . 以 O 为原点, AB 所在的直线为 x 轴建立如图 2 所示的平面直角坐标系.

(I) 求曲线 C 的方程;

(II) 设动直线 l 与两定直线 $l_1: x - 2y = 0$ 和 $l_2: x + 2y = 0$ 分别交于 P, Q 两点. 若直线 l 总与曲线 C 有且只有一个公共点, 试探究: $\triangle OPQ$ 的面积是否存在最小值? 若存在, 求出该最小值; 若不存在, 说明理由.

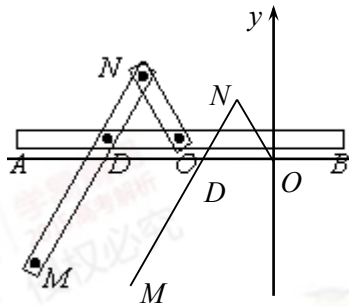


图 1

图 1

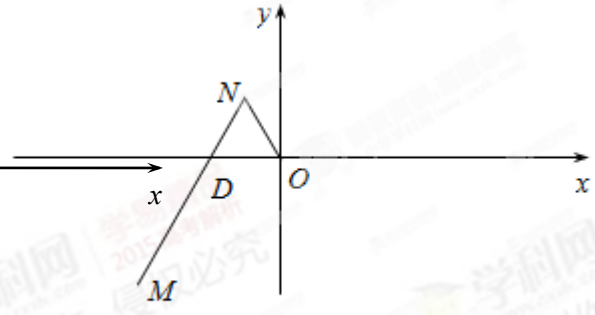


图 2

图 2

22. (本小题满分 14 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, $b_n = n(1 + \frac{1}{n})^n a_n$ ($n \in \mathbf{N}_+$), e 为自然对数的底数.

(I) 求函数 $f(x) = 1 + x - e^x$ 的单调区间, 并比较 $(1 + \frac{1}{n})^n$ 与 e 的大小;

(II) 计算 $\frac{b_1}{a_1}$, $\frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}$, $\frac{b_1 b_2 b_3}{a_1 a_2 a_3}$, 由此推测计算 $\frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 的公式, 并给出证明;

(III) 令 $c_n = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$, 数列 $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ 的前 n 项和分别记为 S_n , T_n , 证明: $T_n < e S_n$.