2004年黑龙江高考文科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分．共150分．考试时间120分钟．

第Ⅰ卷

参考公式：

如果事件A、B互斥，那么

P（A+B）=P（A）+P（B）

如果事件A、B相互独立，那么

P（A·B）=P（A）·P（B）

如果事件A在一次试验中发生的概率是P，那么

n次独立重复试验中恰好发生k次的概率

$P_n(k)=C_n^k P^k(1-P)^{n-k}$

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

其中R表示球的半径，

球的体积公式

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$，

其中R表示球的半径

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合$M=\{x\mid x^2<4|,N=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，则集合$M\cap N=$　　（　　）

A．$\{x\mid x<-2\}$　　B．$\{x\mid x>3\}$　　C．$\{x\mid -1<x<2\}$　　D．$\{x\mid 2<x<3\}$

2．函数$y=\frac{1}{x+5}(x\neq -5)$的反函数是　　（　　）

A．$y=\frac{1}{x}-5(x\neq 0)$　　B．$y=x+5(x\in R)$

C．$y=\frac{1}{x}+5(x\neq 0)$　　D．$y=x-5(x\in R)$

3．曲线$y=x^3-3x^2+1$在点（1，－1）处的切线方程为　　（　　）

A．$y=3x-4$　　B．$y=-3x+2$　　C．$y=-4x+3$　　D．$y=4x-5$

4．已知圆C与圆$(x-1)^2+y^2=1$关于直线$y=-x$对称，则圆C的方程为　　（　　）

A．$(x+1)^2+y^2=1$　　B．$x^2+y^2=1$

C．$x^2+(y+1)^2=1$　　D．$x^2+(y-1)^2=1$

5．已知函数$y=\tan(2x+\varphi)$的图象过点$(\frac{\pi}{12},0)$，则φ可以是　　（　　）

A．$-\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{6}$　　C．$-\frac{\pi}{12}$　　D．$\frac{\pi}{12}$

6．正四棱锥的侧棱长与底面边长都是1，则侧棱与底面所成的角为　　（　　）

A．75°　　B．60°　　C．45°　　D．30°

7．函数$y=-e^x$的图象　　（　　）

A．与$y=e^x$的图象 关于y轴对称　　B．与$y=e^x$的图象关于坐标原点对称

C．与 $y=e^{-x}$ 的图象关于 y 轴对称　　　D．与 $y=e^{-x}$ 的图象关于坐标原点对称

8．已知点 A（1，2）、B（3，1），则线段 AB 的垂直平分线的方程是　　　　　　　　　　（　　）

A． $4x+2y=5$　　B． $4x-2y=5$　　C． $x+2y=5$　　D． $x-2y=5$

9．已知向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 满足：$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$　　　　　　　　　　（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\sqrt{6}$

10．已知球 O 的半径为 1，A、B、C 三点都在球面上，且每两点间的球面距离均为 $\frac{\pi}{2}$，则球心 O 到平面 ABC 的距离为　　　　　　　　　　（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{6}}{3}$

11．函数 $y=\sin^4 x+\cos^2 x$ 的最小正周期为　　　　　　　　　　（　　）

A．$\frac{\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{2}$　　C．π　　D．2π

12．在由数字 1，2，3，4，5 组成的所有没有重复数字的 5 位数中，大于 23145 且小于 43521 的数共有　　　　　　　　　　（　　）

A．56 个　　B．57 个　　C．58 个　　D．60 个

第 II 卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分. 把答案填在题中横线上.

13．已知 a 为实数，$(x+a)^{10}$ 展开式中 x^7 的系数是－15，则 $a=$__________ .

14．设 x,y 满足约束条件：

$$\begin{cases} x\ge 0, \\ x\ge y, \\ 2x-y\le 1, \end{cases}$$

则 $z=3x+2y$ 的最大值是__________.

15．设中心的原点的椭圆与双曲线 $2x^2-2y^2=1$ 有公共的焦点，且它们的离心率互为倒数，则该椭圆的方程是__________ .

16．下面是关于四棱柱的四个命题：

①若有两个侧面垂直于底面，则该四棱柱为直四棱柱

②若两个过相对侧棱的截面都垂直于底面，则该四棱柱为直四棱柱

③若四个侧面两两全等，则该四棱柱为直四棱柱

④若四棱柱的四条对角线两两相等，则该四棱柱为直四棱柱

其中，真命题的编号是________________（写出所有正确结论的编号）.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 12 分）

已知等差数列$\{a_n\}$，$a_2=9, a_5=21.$

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）令$b_n=2^{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

18.（本小题满分 12 分）

已知锐角三角形 ABC 中，$\sin(A+B)=\frac{3}{5}, \sin(A-B)=\frac{1}{5}.$

（Ⅰ）求证$\tan A=2\tan B$；

（Ⅱ）设 AB=3，求 AB 边上的高.

19.（本小题满分 12 分）

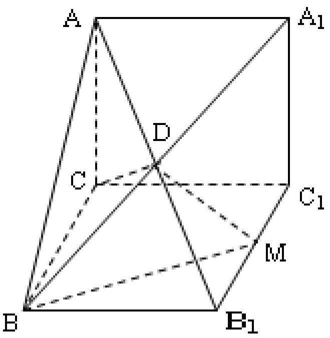
已知 8 支球队中有 3 支弱队，以抽签方式将这 8 支球队分为 A、B 两组，每组 4 支.

求：（Ⅰ）A、B 两组中有一组恰有两支弱队的概率；

（Ⅱ）A 组中至少有两支弱队的概率.

20.（本小题满分 12 分）

如图，直三棱柱 ABC—$A_1B_1C_1$中，∠ACB=90°，AC=1，CB=$\sqrt{2}$，侧棱 AA_1=1，侧面 AA_1B_1B 的两条对角线交点为 D，B_1C_1 的中点为 M.



（Ⅰ）求证 CD⊥平面 BDM；

（Ⅱ）求面 B_1BD 与面 CBD 所成二面角的大小.

21.（本小题满分 12 分）

若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+(a-1)x+1$ 在区间（1，4）内为减函数，在区间（6，+∞）上为增函数，试求实数 a 的取值范围.

22.（本小题满分 14 分）

给定抛物线 C：$y^2=4x$, F 是 C 的焦点，过点 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点.

（Ⅰ）设 l 的斜率为 1，求 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 夹角的大小；

（Ⅱ）设 $\overrightarrow{FB}=\lambda\overrightarrow{AF}$, 若 $\lambda\in[4,9]$，求 l 在 y 轴上截距的变化范围.

参考答案

一、选择题

1 C　2 A　3 B　4 C　5 A　6 C　7 D　8 B　9 D　10 B　11 B　12 C

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分. 把答案填在题中横线上.

13．$-\frac{1}{2}$　14．5　15．$\frac{x^2}{2}+y^2=1$　16．②④

三、解答题

17．本小题主要考查等差、等比数列的概念和性质，考查运算能力，满分 12 分.

解：（Ⅰ）设数列$\{a_n\}$的公差为 d，依题意得方程组

$$\begin{cases} a_1+d=9, \\ a_1+4d=21, \end{cases} \quad 解得 a_1=5, d=4.$$

所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=4n+1$.

（Ⅱ）由$a_n=4n+1$得$b_n=2^{4n+1}$，所以$\{b_n\}$是首项$b_1=2^5$，公式$q=2^4$的等比数列.

于是得$\{b_n\}$的前 n 项和　$S_n=\frac{2^5\times(2^{4n}-1)}{2^4-1}=\frac{32\times(2^{4n}-1)}{15}$.

18．本小题主要考查三角函数概念，两角和、差的三角函数值以及应用、分析和计算能力，满分 12 分.

（Ⅰ）证明：$\because \sin(A+B)=\frac{3}{5},\sin(A-B)=\frac{1}{5}$,

$$\therefore \begin{cases} \sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{3}{5}, \\ \sin A\cos B-\cos A\sin B=\frac{1}{5}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin A\cos B=\frac{2}{5}, \\ \cos A\sin B=\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\tan A}{\tan B}=2.$$

所以$\tan A=2\tan B$.

（Ⅱ）解：$\because \frac{\pi}{2}<A+B<\pi$，$\sin(A+B)=\frac{3}{5}$,　　$\therefore \tan(A+B)=-\frac{3}{4}$,

即$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\frac{3}{4}$　，将$\tan A=2\tan B$代入上式并整理得

$$2\tan^2 B-4\tan B-1=0.$$

解得$\tan B=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$，舍去负值得$\tan B=\frac{2+\sqrt{6}}{2}$，

$\therefore \tan A=2\tan B=2+\sqrt{6}$.　设 AB 边上的高为 CD.

则 AB=AD+DB=$\frac{CD}{\tan A}+\frac{CD}{\tan B}=\frac{2CD}{2+\sqrt{6}}$.

由 AB=3，得 CD=2+$\sqrt{6}$.　所以 AB 边上的高等于 2+$\sqrt{6}$.

19．本小题主要考查组合、概率等基本概念，相互独立事件和互斥事件等概率的计算，运用

数学知识解决问题的能力，满分 12 分.

（Ⅰ）解法一：三支弱队在同一组的概率为 $\dfrac{C_5^1}{C_8^4}+\dfrac{C_5^3}{C_8^4}=\dfrac{1}{7}.$

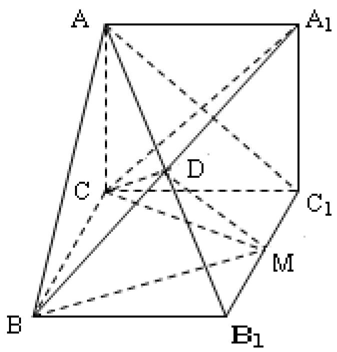
故有一组恰有两支弱队的概率为$1-\dfrac{1}{7}=\dfrac{6}{7}.$

解法二：有一组恰有两支弱队的概率$\dfrac{C_3^2C_5^2}{C_8^4}+\dfrac{C_3^2C_5^2}{C_8^4}=\dfrac{6}{7}.$

（Ⅱ）解法一：A 组中至少有两支弱队的概率 $\dfrac{C_3^2C_5^2}{C_8^4}+\dfrac{C_3^3C_5^1}{C_8^4}=\dfrac{1}{2}$

解法二：A、B 两组有一组至少有两支弱队的概率为 1，由于对 A 组和 B 组来说，至少有两支弱队的概率是相同的，所以 A 组中至少有两支弱队的概率为$\dfrac{1}{2}.$

20．本小题主要考查线面关系和直棱柱等基础知识，同时考查空间想象能力和推理运算能力.
满分 12 分.



解法一：（Ⅰ）如图，连结 CA_1、AC_1、CM，则 $CA_1=\sqrt{2}$.

∵$CB=CA_1=\sqrt{2}$，∴$\triangle CBA_1$为等腰三角形，

又知 D 为其底边 A_1B 的中点，

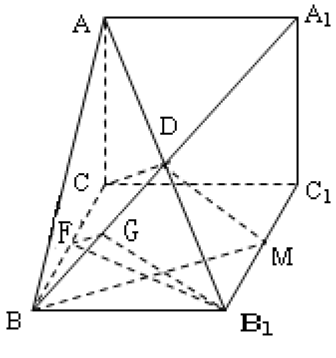
∴$CD\perp A_1B$.　∵$A_1C_1=1$，$C_1B_1=\sqrt{2}$，∴$A_1B_1=\sqrt{3}$

又 $BB_1=1$，$A_1B=2$. ∵$\triangle A_1CB$ 为直角三角形，D 为 A_1B 的中点，

∴$CD=\dfrac{1}{2}A_1B=1$，$CD=CC_1$，又 $DM=\dfrac{1}{2}AC_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$DM=C_1M$.

∴$\triangle CDM\cong\triangle CC_1M$，$\angle CDM=\angle CC_1M=90°$，即 $CD\perp DM$.

因为 A_1B、DM 为在平面 BDM 内两条相交直线，所以 $CD\perp$平面 BDM.



（Ⅱ）设 F、G 分别为 BC、BD 的中点，连结 B_1G、FG、B_1F，则 $FG//CD$，$FG=\dfrac{1}{2}CD$.

∴$FG=\dfrac{1}{2}$，$FG\perp BD$.

由侧面矩形 BB_1A_1A 的对角线的交点为 D 知 $BD=B_1D=\dfrac{1}{2}A_1B=1$，

所以$\triangle BB_1D$ 是边长为 1 的正三角形.

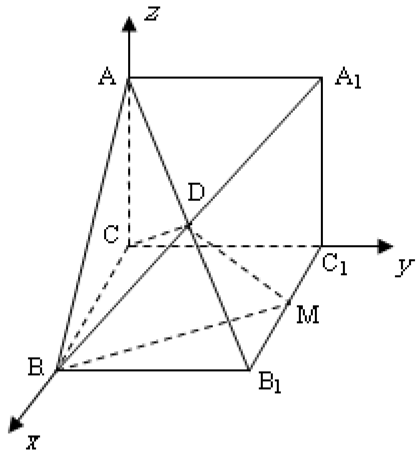
于是 $B_1G\perp BD$，$B_1G=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　∴$\angle B_1GF$ 是所求二面角的平面角，

又 $B_1F^2=B_1B^2+BF^2=1+(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2=\dfrac{3}{2}$，

$$\therefore\quad \cos\angle B_1GF=\frac{B_1G^2+FG^2-B_1F^2}{2B_1C\cdot FG}=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2-\frac{3}{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

即所求二面角的大小为$\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解法二：如图，以 C 为原点建立坐标系.



（Ⅰ）B（$\sqrt{2}$，0，0），B_1（$\sqrt{2}$，1，0），A_1（0，1，1），

D（$\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}$），M（$\frac{\sqrt{2}}{2}$，1，0），

$\overrightarrow{CD}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\overrightarrow{A_1B}=(\sqrt{2},-1,-1),$

$\overrightarrow{DM}=(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),$

则$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DM}=0,$　　∴CD⊥A_1B，CD⊥DM.

因为 A_1B、DM 为平面 BDM 内两条相交直线，所以 CD⊥平面 BDM.

（Ⅱ）设 BD 中点为 G，连结 B_1G，则

G（$\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}$），$\overrightarrow{BD}=(-\frac{\sqrt{2}}{2}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{B_1G}=(-\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{3}{4},\frac{1}{4}),$

$\therefore\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{B_1G}=0,\qquad\therefore BD\perp B_1G.\qquad$ 又$CD\perp BD,$

$\therefore\overrightarrow{BD}$与$\overrightarrow{B_1G}$的夹角$\theta$等于所求的二面角的平面角.

$$\therefore\cos\theta=\frac{\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{B_1G}}{|\overrightarrow{CD}|\cdot|\overrightarrow{B_1G}|}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

所以所求的二面角等于$\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

21．本小题主要考查导数的概念的计算，应用导数研究函数单调性的基本方法，考查综合运用数学知识解决问题的能力.满分 12 分.

解：函数 $f(x)$ 的导数　$f'(x)=x^2-ax+a-1$. 令 $f'(x)=0$，解得

$x=1$或$x=a-1$.

当$a-1\le 1$即$a\le 2$时,函数$f(x)$在$(1,+\infty)$上是增函数,不合题意

当$a-1>1$即$a>2$时,函数$f(x)$在$(-\infty,1)$上为增函数,在$(1,a-1)$内为减函数,在$(a-1,+\infty)$

为增函数.

依题意应有 当$x\in(1,4)$时,$f'(x)<0$,当$x\in(6,+\infty)$时,$f'(x)>0$.

所以　$4 \le a-1 \le 6$.　解得$5 \le a \le 7$.

所以 a 的取值范围是[5，7].

22．本小题主要考查抛物线的性质，直线与抛物线的关系以及解析几何的基本方法、思想和综合解题能力。满分 14 分。

解：（Ⅰ）C 的焦点为 F（1，0），直线 l 的斜率为 1，所以 l 的方程为 $y=x-1$.

将 $y=x-1$ 代入方程 $y^2=4x$，并整理得　$x^2-6x+1=0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, 则有　$x_1+x_2=6, x_1x_2=1$.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2=2x_1x_2-(x_1+x_2)+1=-3.$

$|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\sqrt{x_1x_2[x_1x_2+4(x_1+x_2)+16]}=\sqrt{41}.$

$$\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|OA||OB|}=-\frac{3\sqrt{14}}{41}.$$

所以$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$ 夹角的大小为$\pi-\arccos\frac{3\sqrt{14}}{41}$.

（Ⅱ）由题设$\overrightarrow{FB}=\lambda\overrightarrow{AF}$　得　$(x_2-1,y_2)=\lambda(1-x_1,-y_1)$,

即$\begin{cases} x_2-1=\lambda(1-x_1), & ① \\ y_2=-\lambda y_1. & ② \end{cases}$

由②得 $y_2^2=\lambda^2y_1^2$，　$\because$　$y_1^2=4x_1, y_2^2=4x_2$，　$\therefore x_2=\lambda^2x_1$.③

联立①、③解得 $x_2=\lambda$，依题意有 $\lambda>0$.

$\therefore B(\lambda,2\sqrt{\lambda})$,或$B(\lambda,-2\sqrt{\lambda})$, 又 F（1，0），得直线 l 方程为

$$(\lambda-1)y=2\sqrt{\lambda}(x-1)\text{或}(\lambda-1)y=-2\sqrt{\lambda}(x-1),$$

当 $\lambda\in[4,9]$ 时，l 在方程 y 轴上的截距为$\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}$或$-\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}$,

由　$\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}=\frac{2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}+1}+\frac{2}{\lambda-1}$,　可知$\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}$在[4，9]上是递减的，

$$\therefore\ \frac{3}{4}\le\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}\le\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\le-\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}\le-\frac{3}{4},$$

直线 l 在 y 轴上截距的变化范围为$[-\frac{4}{3},-\frac{3}{4}]\cup[\frac{3}{4},\frac{4}{3}]$.