

# 2008年全国统一高考数学试卷（理科）（全国卷 I）

参考答案与试题解析

## 一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1. （5分）函数  $y = \sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x}$  的定义域为（ ）

- A.  $\{x|x \geq 0\}$       B.  $\{x|x \geq 1\}$       C.  $\{x|x \geq 1\} \cup \{0\}$       D.  $\{x|0 \leq x \leq 1\}$

**【考点】** 33：函数的定义域及其求法.

**【分析】** 偶次开方的被开方数一定非负.  $x(x-1) \geq 0$ ,  $x \geq 0$ , 解关于  $x$  的不等式组, 即为函数的定义域.

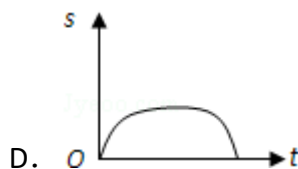
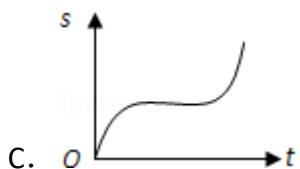
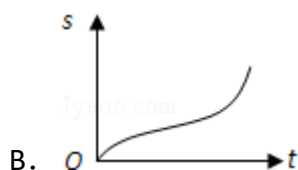
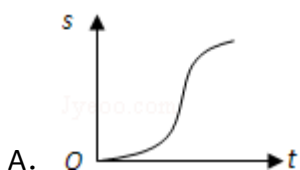
**【解答】** 解: 由  $x(x-1) \geq 0$ , 得  $x \geq 1$ , 或  $x \leq 0$ .

又因为  $x \geq 0$ , 所以  $x \geq 1$ , 或  $x=0$ ; 所以函数的定义域为  $\{x|x \geq 1\} \cup \{0\}$

故选: C.

**【点评】** 定义域是高考必考题通常以选择填空的形式出现, 通常注意偶次开方一定非负, 分式中分母不能为0, 对数函数的真数一定要大于0, 指数和对数的底数大于0且不等于1. 另外还要注意正切函数的定义域.

2. （5分）汽车经过启动、加速行驶、匀速行驶、减速行驶之后停车, 若把这一过程中汽车的行驶路程  $s$  看作时间  $t$  的函数, 其图象可能是（ ）



**【考点】** 3A：函数的图象与图象的变换.

**【专题】** 16：压轴题； 31：数形结合.

**【分析】**由已知中汽车经过启动、加速行驶、匀速行驶、减速行驶之后停车，汽车的行驶路程 $s$ 看作时间 $t$ 的函数，我们可以根据实际分析函数值 $S$ （路程）与自变量 $t$ （时间）之间变化趋势，分析四个答案即可得到结论.

**【解答】**解：由汽车经过启动后的加速行驶阶段，路程随时间上升的速度越来越快，故图象的前边部分为凹升的形状；在汽车的匀速行驶阶段，路程随时间上升的速度保持不变，故图象的中间部分为平升的形状；在汽车减速行驶之后停车阶段，路程随时间上升的速度越来越慢，故图象的前边部分为凸升的形状；分析四个答案中的图象，只有A答案满足要求，故选：A.

**【点评】**从左向右看图象，如果图象是凸起上升的，表明相应的量增长速度越来越慢；如果图象是凹陷上升的，表明相应的量增长速度越来越快；如果图象是直线上升的，表明相应的量增长速度保持不变；如果图象是水平直线，表明相应的量保持不变，即不增长也不降低；如果图象是凸起下降的，表明相应的量降低速度越来越快；如果图象是凹陷下降的，表明相应的量降低速度越来越慢；如果图象是直线下降的，表明相应的量降低速度保持不变.

3. (5分) 在 $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ ， $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ . 若点D满足 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$ ，则 $\overrightarrow{AD}=(\quad)$
- A.  $\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$       B.  $\frac{5}{3}\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{b}$       C.  $\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}$       D.  $\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

**【考点】**9B：向量加减混合运算.

**【分析】**把向量用一组向量来表示，做法是从要求向量的起点出发，尽量沿着已知向量，走到要求向量的终点，把整个过程写下来，即为所求. 本题也可以根据D点把BC分成一比二的两部分入手.

**【解答】**解：∵由 $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})$ ,

$$\therefore 3\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\vec{c}+2\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{b}.$$

故选：A.

**【点评】**用一组向量来表示一个向量，是以后解题过程中常见到的，向量的加减运算是用向量解决问题的基础，要学好运算，才能用向量解决立体几何问题，三角函数问题，好多问题都是以向量为载体的

4. (5分) 设 $a \in \mathbb{R}$ ，且 $(a+i)^2 i$ 为正实数，则 $a=()$

- A. 2                      B. 1                      C. 0                      D. -1

**【考点】**A4：复数的代数表示法及其几何意义.

**【分析】**注意到 $a+bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) 为正实数的充要条件是 $a > 0, b = 0$

**【解答】**解： $(a+i)^2 i = (a^2+2ai-1)i = -2a + (a^2-1)i > 0, a = -1$ . 故选D.

**【点评】**本题的计算中，要注意到相应变量的范围.

5. (5分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_4=4, a_3+a_5=10$ ，则它的前10项的和 $S_{10}=()$

- A. 138                      B. 135                      C. 95                      D. 23

**【考点】**83：等差数列的性质；85：等差数列的前n项和.

**【专题】**11：计算题.

**【分析】**本题考查的知识点是等差数列的性质，及等差数列前n项和，根据 $a_2+a_4=4, a_3+a_5=10$ 我们构造关于基本量（首项及公差）的方程组，解方程组求出基本量（首项及公差），进而代入前n项和公式，即可求解.

**【解答】**解：∵ $(a_3+a_5) - (a_2+a_4) = 2d = 6$ ,

$$\therefore d = 3, a_1 = -4,$$

$$\therefore S_{10} = 10a_1 + \frac{10 \times (10-1)d}{2} = 95.$$

故选：C.

**【点评】**在求一个数列的通项公式或前 $n$ 项和时，如果可以证明这个数列为等差数列，或等比数列，则可以求出其基本项（首项与公差或公比）进而根据等差或等比数列的通项公式，写出该数列的通项公式，如果未知这个数列的类型，则可以判断它是否与某个等差或等比数列有关，间接求其通项公式.

6. (5分) 若函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=\ln\sqrt{x}+1$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，则 $f(x) = (\quad)$

- A.  $e^{2x-2}$                       B.  $e^{2x}$                       C.  $e^{2x+1}$                       D.  $e^{2x+2}$

**【考点】**4R: 反函数.

**【专题】**11: 计算题.

**【分析】**由函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=\ln\sqrt{x}+1$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称知这两个函数互为反函数，故只要求出函数 $y=f(x)$ 的反函数即可，欲求原函数的反函数，即从原函数 $y=\ln\sqrt{x}+1$ 中反解出 $x$ ，后再进行 $x, y$ 互换，即得反函数的解析式.

**【解答】**解： $\because y-1=\ln\sqrt{x}$ ， $\therefore \sqrt{x}=e^{y-1}$ ， $\therefore x=(e^{y-1})^2=e^{2y-2}$ ，改写为： $y=e^{2x-2}$

$\therefore$ 答案为A.

**【点评】**本题主要考查了互为反函数图象间的关系及反函数的求法.

7. (5分) 已知曲线 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 在点(3, 2)处的切线与直线 $ax+y+1=0$ 垂直，则 $a$ 的值为( )

- A. 2                      B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $-\frac{1}{2}$                       D. -2

**【考点】**6H: 利用导数研究曲线上某点切线方程.

**【专题】**53: 导数的综合应用.

**【分析】**求出函数的导数，切线的斜率，由两直线垂直的条件，即可得到 $a$ 的值.

**【解答】**解：∵ $y=\frac{x+1}{x-1}$ ，  
 $\therefore y'=\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$ ，  
 ∴曲线 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 在点(3, 2)处的切线的斜率 $k=-\frac{1}{2}$ ，  
 ∴曲线 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 在点(3, 2)处的切线与直线 $ax+y+1=0$ 垂直，  
 ∴直线 $ax+y+1=0$ 的斜率 $k'=-a\times(-\frac{1}{2})=-1$ ，即 $a=-2$ 。

故选：D.

**【点评】**本题考查导数的几何意义的求法，考查导数的运算，解题时要认真审题，仔细解答，注意直线与直线垂直的性质的灵活运用.

8. (5分) 为得到函数 $y=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象，只需将函数 $y=\sin 2x$ 的图象( )

- A. 向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个长度单位      B. 向右平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个长度单位  
 C. 向左平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个长度单位      D. 向右平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个长度单位

**【考点】**HJ: 函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的图象变换.

**【专题】**11: 计算题.

**【分析】**先根据诱导公式将函数 $y=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$ 化为正弦的形式，再根据左加右减的原则进行平移即可得到答案.

**【解答】**解：∵ $y=\cos(2x+\frac{\pi}{3})=\sin(2x+\frac{5\pi}{6})=\sin 2(x+\frac{5\pi}{12})$ ，

只需将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位得到函数 $y=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象.

故选：A.

**【点评】**本题主要考查诱导公式和三角函数的平移. 属基础题.

9. (5分) 设奇函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，且 $f(1)=0$ ，则不等式 $\frac{f(x)-f(-x)}{x}<0$ 的解集为( )

- A.  $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$                       B.  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$   
 C.  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$                       D.  $(-1, 0) \cup (0, 1)$

**【考点】**3N: 奇偶性与单调性的综合.

**【专题】**16: 压轴题.

**【分析】**首先利用奇函数定义与 $\frac{f(x)-f(-x)}{x} < 0$ 得出 $x$ 与 $f(x)$ 异号,

然后由奇函数定义求出 $f(-1) = -f(1) = 0$ ,

最后结合 $f(x)$ 的单调性解出答案.

**【解答】**解: 由奇函数 $f(x)$ 可知 $\frac{f(x)-f(-x)}{x} = \frac{2f(x)}{x} < 0$ , 即 $x$ 与 $f(x)$ 异号,

而 $f(1) = 0$ , 则 $f(-1) = -f(1) = 0$ ,

又 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 则奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上也为增函数

当 $0 < x < 1$ 时,  $f(x) < f(1) = 0$ , 得 $\frac{f(x)}{x} < 0$ , 满足;

当 $x > 1$ 时,  $f(x) > f(1) = 0$ , 得 $\frac{f(x)}{x} > 0$ , 不满足, 舍去;

当 $-1 < x < 0$ 时,  $f(x) > f(-1) = 0$ , 得 $\frac{f(x)}{x} < 0$ , 满足;

当 $x < -1$ 时,  $f(x) < f(-1) = 0$ , 得 $\frac{f(x)}{x} > 0$ , 不满足, 舍去;

所以 $x$ 的取值范围是 $-1 < x < 0$ 或 $0 < x < 1$ .

故选: D.

**【点评】**本题综合考查奇函数定义与它的单调性.

10. (5分) 若直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 有公共点, 则 ( )

- A.  $a^2 + b^2 \leq 1$                       B.  $a^2 + b^2 \geq 1$                       C.  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \leq 1$                       D.  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 1$

**【考点】**J9: 直线与圆的位置关系.

**【分析】**用圆心到直线的距离小于或等于半径, 可以得到结果.

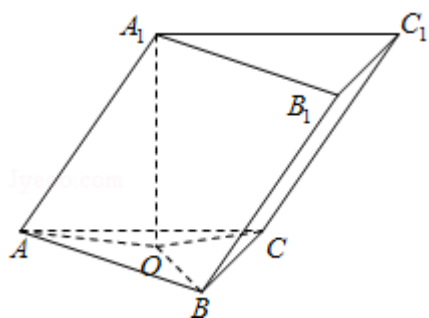
**【解答】**解: 直线与圆有公共点, 即直线与圆相切或相交得:  $d \leq r$

$$d = \frac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \leq 1, \therefore \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 1,$$

故选：D.

**【点评】** 本题考查点到直线的距离公式，直线和圆的位置关系，是基础题.

11. (5分) 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面边长都相等， $A_1$ 在底面 $ABC$ 内的射影为 $\triangle ABC$ 的中心，则 $AB_1$ 与底面 $ABC$ 所成角的正弦值等于 ( )



- A.  $\frac{1}{3}$       B.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$       C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       D.  $\frac{2}{3}$

**【考点】** LP: 空间中直线与平面之间的位置关系.

**【专题】** 11: 计算题; 31: 数形结合; 4R: 转化法; 5G: 空间角.

**【分析】** 法一：由题意可知三棱锥 $A_1 - ABC$ 为正四面体，设棱长为2，求出 $AB_1$ 及三棱锥的高，由线面角的定义可求出答案；

法二：先求出点 $A_1$ 到底面的距离 $A_1D$ 的长度，即知点 $B_1$ 到底面的距离 $B_1E$ 的长度，再求出 $AE$ 的长度，在直角三角形 $AEB_1$ 中求 $AB_1$ 与底面 $ABC$ 所成角的正切，再由同角三角函数的关系求出其正弦.

**【解答】** 解：（法一）因为三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面边长都相等， $A_1$ 在底面 $ABC$ 内的射影为 $\triangle ABC$ 的中心，设为 $D$ ,

所以三棱锥 $A_1 - ABC$ 为正四面体，设棱长为2，

则 $\triangle AA_1B_1$ 是顶角为 $120^\circ$ 等腰三角形，

$$\text{所以 } AB_1 = 2 \times 2 \times \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}, \quad A_1D = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2}{3} \times \sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{所以 } AB_1 \text{ 与底面 } ABC \text{ 所成角的正弦值为 } \frac{A_1D}{AB_1} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3};$$

(法二) 由题意不妨令棱长为2, 点 $B_1$ 到底面的距离是 $B_1E$ ,  
如图,  $A_1$ 在底面 $ABC$ 内的射影为 $\triangle ABC$ 的中心, 设为 $D$ ,

$$\text{故 } DA = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{由勾股定理得 } A_1D = \sqrt{4 - \frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ 故 } B_1E = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

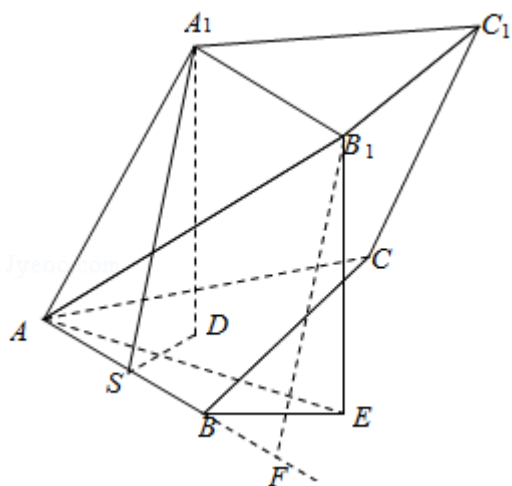
如图作 $A_1S \perp AB$ 于中点 $S$ , 过 $B_1$ 作 $AB$ 的垂线段, 垂足为 $F$ ,

$$BF = 1, B_1F = A_1S = \sqrt{3}, AF = 3,$$

在直角三角形 $B_1AF$ 中用勾股定理得:  $AB_1 = 2\sqrt{3}$ ,

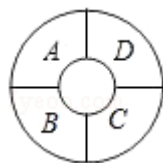
$$\text{所以 } AB_1 \text{ 与底面 } ABC \text{ 所成角的正弦值 } \sin \angle B_1AE = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

故选: B.



**【点评】** 本题考查了几何体的结构特征及线面角的定义, 还有点面距与线面距的转化, 考查了转化思想和空间想象能力.

12. (5分) 如图, 一环形花坛分成A, B, C, D四块, 现有4种不同的花供选种, 要求在每块里种1种花, 且相邻的2块种不同的花, 则不同的种法总数为 ( )



A. 96

B. 84

C. 60

D. 48

【考点】C6：等可能事件和等可能事件的概率.

【专题】16：压轴题.

【分析】这道题比起前几年出的高考题要简单些，只要分类清楚没有问题，分为三类：分别种两种花、三种花、四种花，分这三类来列出结果.

【解答】解：分三类：种两种花有 $A_4^2$ 种种法；

种三种花有 $2A_4^3$ 种种法；

种四种花有 $A_4^4$ 种种法.

共有 $A_4^2+2A_4^3+A_4^4=84$ .

故选：B.

【点评】本题也可以这样解：按A - B - C - D顺序种花，可分A、C同色与不同色有 $4 \times 3 \times (1 \times 3 + 2 \times 2) = 84$ .

## 二、填空题（共4小题，每小题5分，满分20分）

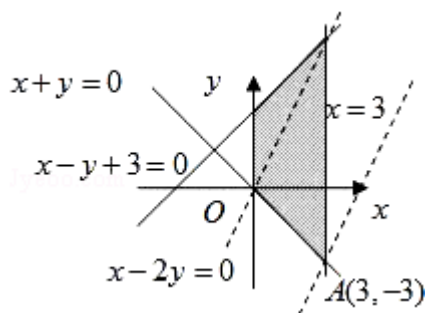
13. （5分）若 $x, y$ 满足约束条件
$$\begin{cases} x+y \geq 0 \\ x-y+3 \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$
，则 $z=2x-y$ 的最大值为 9.

【考点】7C：简单线性规划.

【专题】11：计算题；13：作图题.

【分析】首先作出可行域，再作出直线 $l_0: y=2x$ ，将 $l_0$ 平移与可行域有公共点，直线 $y=2x-z$ 在 $y$ 轴上的截距最小时， $z$ 有最大值，求出此时直线 $y=2x-z$ 经过的可行域内的点的坐标，代入 $z=2x-y$ 中即可.

【解答】解：如图，作出可行域，作出直线 $l_0: y=2x$ ，将 $l_0$ 平移至过点A处时，函数 $z=2x-y$ 有最大值9.



【点评】本题考查线性规划问题，考查数形结合思想.

14. (5分) 已知抛物线 $y=ax^2-1$ 的焦点是坐标原点, 则以抛物线与两坐标轴的三个交点为顶点的三角形面积为 2.

【考点】K8: 抛物线的性质.

【专题】11: 计算题.

【分析】先根据抛物线 $y=ax^2-1$ 的焦点坐标为坐标原点, 求得 $a$ , 得到抛物线方程, 进而可知与坐标轴的交点的坐标, 进而可得答案.

【解答】解: 由抛物线 $y=ax^2-1$ 的焦点坐标为 $(0, \frac{1}{4a}-1)$ 坐标原点得,

$$a=\frac{1}{4}, \text{ 则 } y=\frac{1}{4}x^2-1$$

与坐标轴的交点为 $(0, -1)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(2, 0)$

, 则以这三点围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times 4 \times 1=2$

故答案为2

【点评】本题主要考查抛物线的应用. 考查了学生综合运用所学知识, 解决实际问题的能力.

15. (5分) 在 $\triangle ABC$ 中,  $AB=BC$ ,  $\cos B=-\frac{7}{18}$ . 若以 $A, B$ 为焦点的椭圆经过点 $C$ , 则该椭圆的离心率 $e=\frac{3}{8}$ .

【考点】K4: 椭圆的性质.

【专题】11: 计算题; 16: 压轴题.

【分析】设 $AB=BC=1$ ,  $\cos B=-\frac{7}{18}$ , 则 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB \cdot BC \cdot \cos B=\frac{25}{9}$ , 由此可知

知 $2a=\frac{8}{3}$ ,  $2c=1$ , 从而求出该椭圆的离心率.

【解答】解: 设 $AB=BC=1$ ,  $\cos B=-\frac{7}{18}$ , 则 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB \cdot BC \cdot \cos B=\frac{25}{9}$ ,

$$\therefore AC=\frac{5}{3}, 2a=1+\frac{5}{3}=\frac{8}{3}, 2c=1, e=\frac{2c}{2a}=\frac{3}{8}.$$

答案:  $\frac{3}{8}$ .

【点评】 本题考查椭圆的性质及应用，解题时要注意的正确计算.

16. (5分) 等边三角形ABC与正方形ABDE有一公共边AB, 二面角C - AB - D的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , M, N分别是AC, BC的中点, 则EM, AN所成角的余弦值等于 $\frac{1}{6}$ .

【考点】 LM: 异面直线及其所成的角; MJ: 二面角的平面角及求法.

【专题】 11: 计算题; 16: 压轴题.

【分析】 先找出二面角的平面角, 建立边之间的等量关系, 再利用向量法将所求异面直线用基底表示, 然后利用向量的所成角公式求出所成角即可.

【解答】 解: 设AB=2, 作CO⊥面ABDE,

OH⊥AB, 则CH⊥AB, ∠CHO为二面角C - AB - D的平面角

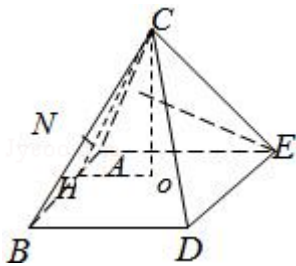
$$CH=\sqrt{3}, OH=CH \cdot \cos \angle CHO=1,$$

结合等边三角形ABC与正方形ABDE可知此四棱锥为正四棱锥,

$$\text{则 } \overrightarrow{AN}=\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{CH}=\sqrt{3}\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}), \overrightarrow{EM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE},$$

$$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{EM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) \cdot (\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE})=\frac{1}{2}$$

故EM, AN所成角的余弦值 $\frac{\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{EM}}{|\overrightarrow{AN}| |\overrightarrow{EM}|}=\frac{1}{6}$ 故答案为:  $\frac{1}{6}$



【点评】 本小题主要考查异面直线所成的角, 考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力, 属于基础题.

### 三、解答题 (共6小题, 满分70分)

17. (10分) 设△ABC的内角A, B, C所对的边长分别为a, b, c, 且 $a \cos B - b \cos A$

$$sA = \frac{3}{5}c.$$

(I) 求  $\frac{\tan A}{\tan B}$  的值;

(II) 求  $\tan(A - B)$  的最大值.

**【考点】** GP: 两角和与差的三角函数; HP: 正弦定理.

**【分析】** 本题考查的知识点是正弦定理及两角和与差的正切函数,

(I) 由正弦定理的边角互化, 我们可将已知中  $a\cos B - b\cos A = \frac{3}{5}c$ , 进行转化得到  $\sin A\cos B = 4\cos A\sin B$ , 再利用弦化切的方法即可求  $\frac{\tan A}{\tan B}$  的值.

(II) 由 (I) 的结论, 结合角 A, B, C 为  $\triangle ABC$  的内角, 我们易得  $\tan A = 4\tan B > 0$ , 则  $\tan(A - B)$  可化为  $\frac{3}{\cot B + 4\tan B}$ , 再结合基本不等式即可得到  $\tan(A - B)$  的最大值.

**【解答】** 解: (I) 在  $\triangle ABC$  中,  $a\cos B - b\cos A = \frac{3}{5}c$ ,

由正弦定理得

$$\sin A\cos B - \sin B\cos A = \frac{3}{5}\sin C = \frac{3}{5}\sin(A+B) = \frac{3}{5}\sin A\cos B + \frac{3}{5}\cos A\sin B$$

即  $\sin A\cos B = 4\cos A\sin B$ ,

$$\text{则 } \frac{\tan A}{\tan B} = 4;$$

(II) 由  $\frac{\tan A}{\tan B} = 4$  得

$$\tan A = 4\tan B > 0$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} = \frac{3\tan B}{1 + 4\tan^2 B} = \frac{3}{\cot B + 4\tan B} \leq \frac{3}{2\sqrt{\cot B \cdot 4\tan B}} = \frac{3}{4}$$

当且仅当  $4\tan B = \cot B$ ,  $\tan B = \frac{1}{2}$ ,  $\tan A = 2$  时, 等号成立,

故当  $\tan A = 2$ ,  $\tan B = \frac{1}{2}$  时,

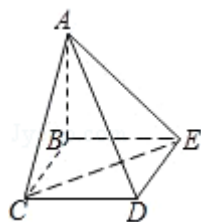
$\tan(A - B)$  的最大值为  $\frac{3}{4}$ .

**【点评】** 在解三角形时, 正弦定理和余弦定理是最常用的方法, 正弦定理多用于边角互化, 使用时要注意一般是等式两边是关于三边的齐次式.

18. (12分) 四棱锥A - BCDE中, 底面BCDE为矩形, 侧面ABC⊥底面BCDE, BC=2, CD=√2, AB=AC.

(I) 证明: AD⊥CE;

(II) 设CE与平面ABE所成的角为45°, 求二面角C - AD - E的大小.



**【考点】** LY: 平面与平面垂直; MJ: 二面角的平面角及求法.

**【专题】** 5F: 空间位置关系与距离.

**【分析】** (1) 取BC中点F, 证明CE⊥面ADF, 通过证明线面垂直来达到证明线线垂直的目的.

(2) 在面AED内过点E作AD的垂线, 垂足为G, 由(1)知, CE⊥AD, 则∠CGE即为所求二面角的平面角, △CGE中, 使用余弦定理求出此角的大小.

**【解答】** 解: (1) 取BC中点F, 连接DF交CE于点O,

∵AB=AC, ∴AF⊥BC.

又面ABC⊥面BCDE, ∴AF⊥面BCDE, ∴AF⊥CE.

再根据  $\tan\angle CED = \tan\angle FDC = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 可得∠CED=∠FDC.

又∠CDE=90°, ∴∠OED+∠ODE=90°,

∴∠DOE=90°, 即CE⊥DF, ∴CE⊥面ADF, ∴CE⊥AD.

(2) 在面ACD内过C点作AD的垂线, 垂足为G.

∴CG⊥AD, CE⊥AD, ∴AD⊥面CEG, ∴EG⊥AD,

则∠CGE即为所求二面角的平面角.

作CH⊥AB, H为垂足.

∵平面ABC⊥平面BCDE, 矩形BCDE中, BE⊥BC, 故BE⊥平面ABC, CH⊂平面ABC, 故BE⊥CH, 而AB∩BE=B, 故CH⊥平面ABE,

∴∠CEH=45°为CE与平面ABE所成的角.

∵CE=√6, ∴CH=EH=√3.

直角三角形CBH中，利用勾股定理求得 $BH = \sqrt{CB^2 - CH^2} = \sqrt{4-3} = 1$ ， $\therefore AH = AB - BH = AC - 1$ ；

C - 1；

直角三角形ACH中，由勾股定理求得 $AC^2 = CH^2 + AH^2 = 3 + (AC - 1)^2$ ， $\therefore AB = AC = 2$ 。

由面 $ABC \perp$ 面 $BCDE$ ，矩形 $BCDE$ 中 $CD \perp CB$ ，可得 $CD \perp$ 面 $ABC$ ，

故 $\triangle ACD$ 为直角三角形， $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$ ，

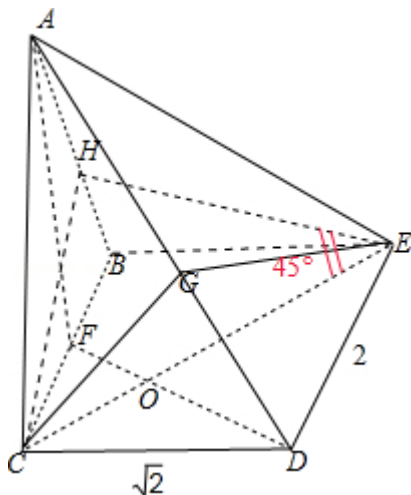
故 $CG = \frac{AC \cdot CD}{AD} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ， $DG = \sqrt{CD^2 - CG^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

$EG = \sqrt{DE^2 - DG^2} = \frac{\sqrt{30}}{3}$ ，又 $CE = \sqrt{6}$ ，

则 $\cos \angle CGE = \frac{CG^2 + GE^2 - CE^2}{2CG \cdot GE} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ ，

$\therefore \angle CGE = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$ ，

即二面角 $C - AD - E$ 的大小 $\pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$ 。



**【点评】** 本题主要考查通过证明线面垂直来证明线线垂直的方法，以及求二面角的大小的方法，属于中档题。

19. (12分) 已知函数 $f(x) = -x^2 + ax + 1 - \ln x$ 。

(I) 当 $a=3$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

(II) 若 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{2})$ 上是减函数，求实数 $a$ 的取值范围。

**【考点】** 3D：函数的单调性及单调区间；3E：函数单调性的性质与判断。

**【专题】** 16：压轴题。

**【分析】** (1) 求单调区间, 先求导, 令导函数大于等于0即可.

(2) 已知 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{2})$ 上是减函数, 即 $f'(x) \leq 0$ 在区间 $(0, \frac{1}{2})$ 上恒成立, 然后用分离参数求最值即可.

**【解答】** 解: (I) 当 $a=3$ 时,  $f(x) = -x^2+3x+1 - \ln x$

$$\therefore f'(x) = -2x+3 - \frac{1}{x} = \frac{-(2x^2-3x+1)}{x}$$

解 $f'(x) > 0$ ,

$$\text{即: } 2x^2 - 3x + 1 < 0$$

函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(\frac{1}{2}, 1)$ .

$$(II) f'(x) = -2x+a - \frac{1}{x},$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上为减函数,

$\therefore x \in (0, \frac{1}{2})$ 时  $-2x+a - \frac{1}{x} \leq 0$ 恒成立.

即 $a \leq 2x + \frac{1}{x}$ 恒成立.

设 $g(x) = 2x + \frac{1}{x}$ , 则 $g'(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$

$\therefore x \in (0, \frac{1}{2})$ 时,  $\frac{1}{x^2} > 4$ ,

$\therefore g'(x) < 0$ ,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上递减,

$\therefore g(x) > g(\frac{1}{2}) = 3$ ,

$\therefore a \leq 3$ .

**【点评】** 本题考查函数单调性的判断和已知函数单调性求参数的范围, 此类问题一般用导数解决, 综合性较强.

20. (12分) 已知5只动物中有1只患有某种疾病, 需要通过化验血液来确定患病的动物. 血液化验结果呈阳性的即为患病动物, 呈阴性即没患病. 下面是两种化验方法:

方案甲: 逐个化验, 直到能确定患病动物为止.

方案乙：先任取3只，将它们的血液混在一起化验。若结果呈阳性则表明患病动物为这3只中的1只，然后再逐个化验，直到能确定患病动物为止；若结果呈阴性则在另外2只中任取1只化验。

(I) 求依方案甲所需化验次数不少于依方案乙所需化验次数的概率；

(II)  $\xi$ 表示依方案乙所需化验次数，求 $\xi$ 的期望。

**【考点】** C6: 等可能事件和等可能事件的概率；CH: 离散型随机变量的期望与方差。

**【分析】** (1) 由题意得到这两种方案的化验次数，算出在各个次数下的概率，写出化验次数的分布列，求出方案甲所需化验次数不少于依方案乙所需化验次数的概率。

(2) 根据上一问乙的化验次数的分布列，利用期望计算公式得到结果。

**【解答】** 解：(I) 若乙验两次时，有两种可能：

①先验三只结果为阳性，再从中逐个验时，恰好一次验中概率为：

$$\frac{C_4^2 A_3^3}{A_5^3} \times \frac{1}{A_3^1} = \frac{6 \times 6}{3 \times 4 \times 5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

②先验三只结果为阴性，再从其它两只中验出阳性（无论第二次试验中有没有，均可以在第二次结束）

$$\frac{A_4^3 A_2^1}{A_5^3 A_2^2} = \frac{24}{5 \times 3 \times 4} = \frac{2}{5},$$

$\therefore$ 乙只用两次的概率为 $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ 。

若乙验三次时，只有一种可能：

先验三只结果为阳性，再从中逐个验时，恰好二次验中概率为在三次验出时概率为 $\frac{2}{5}$

$\therefore$ 甲种方案的次数不少于乙种次数的概率为：

$$\frac{3}{5} \times (1 - \frac{1}{5}) + \frac{2}{5} (1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{5}) = \frac{12}{25} + \frac{6}{25} = \frac{18}{25}$$

(II)  $\xi$ 表示依方案乙所需化验次数，

$\therefore \xi$ 的期望为 $E\xi = 2 \times 0.6 + 3 \times 0.4 = 2.4$ 。

**【点评】** 期望是概率论和数理统计的重要概念之一，是反映随机变量取值分布的特征数，学习期望将为今后学习概率统计知识做铺垫。同时，它在市场预测，经济统计，风险与决策等领域有着广泛的应用，为今后学习数学及相关学科产生深远的影响。

21. (12分) 双曲线的中心为原点O，焦点在x轴上，两条渐近线分别为 $l_1, l_2$ ，经过右焦点F垂直于 $l_1$ 的直线分别交 $l_1, l_2$ 于A, B两点。已知 $|\overrightarrow{OA}|, |\overrightarrow{AB}|, |\overrightarrow{OB}|$ 成等差数列，且 $\overrightarrow{BF}$ 与 $\overrightarrow{FA}$ 同向。

(I) 求双曲线的离心率；

(II) 设AB被双曲线所截得的线段的长为4，求双曲线的方程。

**【考点】** KB: 双曲线的标准方程; KC: 双曲线的性质。

**【专题】** 11: 计算题; 16: 压轴题。

**【分析】** (1) 由2个向量同向，得到渐近线的夹角范围，求出离心率的范围，再用勾股定理得出直角三角形的2个直角边的长度比，联想到渐近线的夹角，求出渐近线的斜率，进而求出离心率。

(2) 利用第(1)的结论，设出双曲线的方程，将AB方程代入，运用根与系数的关系及弦长公式，求出待定系数，即可求出双曲线方程。

**【解答】** 解: (1) 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $c^2 = a^2 + b^2$ , 由 $\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{FA}$ 同向,

$\therefore$  渐近线的倾斜角范围为  $(0, \frac{\pi}{4})$ ,

$\therefore$  渐近线斜率为:  $k_1 = \frac{b}{a} < 1 \therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = e^2 - 1 < 1, \therefore 1 < e^2 < 2$ .

$\therefore |\overrightarrow{OA}|, |\overrightarrow{AB}|, |\overrightarrow{OB}|$  成等差数列,  $\therefore |\overrightarrow{OB}| + |\overrightarrow{OA}| = 2|\overrightarrow{AB}|$ ,

$\therefore |\overrightarrow{AB}|^2 = (|\overrightarrow{OB}| - |\overrightarrow{OA}|)(|\overrightarrow{OB}| + |\overrightarrow{OA}|) = (|\overrightarrow{OB}| - |\overrightarrow{OA}|) \cdot 2|\overrightarrow{AB}|$ ,

$\therefore |\overrightarrow{AB}| = 2(|\overrightarrow{OB}| - |\overrightarrow{OA}|) \therefore \begin{cases} |\overrightarrow{OB}| - |\overrightarrow{OA}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \\ |\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OB}| = 2|\overrightarrow{AB}| \end{cases}$

$\therefore |\overrightarrow{OA}| = \frac{3}{4} |\overrightarrow{AB}| \therefore |\overrightarrow{OA}|^2 = \frac{9}{16} |\overrightarrow{AB}|^2$ ,

可得：  $\frac{|AB|}{|OA|} = \frac{4}{3}$ ，而在直角三角形OAB中，

注意到三角形OAF也为直角三角形，即  $\tan \angle AOB = \frac{4}{3}$ ，

而由对称性可知：OA的斜率为  $k = \tan \frac{1}{2} \angle AOB$ ，

$$\therefore \frac{2k}{1-k^2} = \frac{4}{3}, \therefore 2k^2 + 3k - 2 = 0, \therefore k = \frac{1}{2} (k = -2 \text{舍去});$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{1}{4}, \therefore e^2 = \frac{5}{4}, \therefore e = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

(2) 由第(1)知， $a = 2b$ ，可设双曲线方程为  $\frac{x^2}{4b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ， $\therefore c = \sqrt{5}b$ 。

由于AB的倾斜角为  $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \angle AOB$ ，故AB的斜率为  $\tan \left( \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \angle AOB \right)$

$$) = -\cot \left( \frac{1}{2} \angle AOB \right) = -2,$$

$\therefore$  AB的直线方程为

$$y = -2(x - \sqrt{5}b), \text{ 代入双曲线方程得: } 15x^2 - 32\sqrt{5}bx + 84b^2 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{32\sqrt{5}b}{15}, x_1 \cdot x_2 = \frac{84b^2}{15},$$

$$\therefore 4 = \sqrt{1+4} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{\left(\frac{32\sqrt{5}b}{15}\right)^2 - 4 \cdot \frac{84b^2}{15}}, \text{ 即 } 16 = \frac{32^2 \cdot b^2}{9} - 11$$
$$2b^2,$$

$$\therefore b^2 = 9, \text{ 所求双曲线方程为: } \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

**【点评】** 做到边做边看，从而发现题中的巧妙，如据  $\frac{|AB|}{|OA|} = \frac{4}{3}$ ，联想到对应的是2渐近线的夹角的正切值，属于中档题。

22. (12分) 设函数  $f(x) = x - x \ln x$ . 数列  $\{a_n\}$  满足  $0 < a_1 < 1$ ,  $a_{n+1} = f(a_n)$ .

(I) 证明：函数  $f(x)$  在区间  $(0, 1)$  是增函数；

(II) 证明：  $a_n < a_{n+1} < 1$ ；

(III) 设  $b \in (a_1, 1)$ ，整数  $k \geq \frac{a_1 - b}{a_1 \ln b}$ . 证明：  $a_{k+1} > b$ .

【考点】6B: 利用导数研究函数的单调性; RG: 数学归纳法.

【专题】16: 压轴题.

【分析】(1) 首先求出函数的导数, 然后令  $f'(x) = 0$ , 解出函数的极值点, 最后根据导数判断函数在区间  $(0, 1)$  上的单调性, 从而进行证明.

(2) 由题意数列  $\{a_n\}$  满足  $0 < a_1 < 1$ ,  $a_{n+1} = f(a_n)$ , 求出  $a_{n+1} = a_n - a_n \ln a_n$ , 然后用归纳法进行证明;

(3) 由题意  $f(x) = x - x \ln x$ ,  $a_{n+1} = f(a_n)$  可得  $a_{k+1} = a_k - b - a_k$ , 然后进行讨论求解.

【解答】解: (I) 证明:  $\because f(x) = x - x \ln x$ ,

$$\therefore f'(x) = -\ln x,$$

当  $x \in (0, 1)$  时,  $f'(x) = -\ln x > 0$

故函数  $f(x)$  在区间  $(0, 1)$  上是增函数;

(II) 证明: (用数学归纳法)

(i) 当  $n=1$  时,  $0 < a_1 < 1$ ,  $a_1 \ln a_1 < 0$ ,

$$a_2 = f(a_1) = a_1 - a_1 \ln a_1 > a_1,$$

$\because$  函数  $f(x)$  在区间  $(0, 1)$  是增函数且函数  $f(x)$  在  $x=1$  处连续,

$\therefore f(x)$  在区间  $(0, 1]$  是增函数,

$$a_2 = f(a_1) = a_1 - a_1 \ln a_1 < 1, \text{ 即 } a_1 < a_2 < 1 \text{ 成立,}$$

(ii) 假设当  $x=k$  ( $k \in \mathbb{N}^+$ ) 时,  $a_k < a_{k+1} < 1$  成立,

$$\text{即 } 0 < a_1 \leq a_k < a_{k+1} < 1,$$

那么当  $n=k+1$  时, 由  $f(x)$  在区间  $(0, 1]$  是增函数,  $0 < a_1 \leq a_k < a_{k+1} < 1$ ,

$$\text{得 } f(a_k) < f(a_{k+1}) < f(1),$$

而  $a_{n+1} = f(a_n)$ ,

$$\text{则 } a_{k+1} = f(a_k), a_{k+2} = f(a_{k+1}), a_{k+1} < a_{k+2} < 1,$$

也就是说当  $n=k+1$  时,  $a_n < a_{n+1} < 1$  也成立,

根据 (i)、(ii) 可得对任意的正整数  $n$ ,  $a_n < a_{n+1} < 1$  恒成立.

(III) 证明: 由  $f(x) = x - x \ln x$ ,  $a_{n+1} = f(a_n)$  可得

$$a_{k+1} = a_k - a_k \ln a_k = a_1 - b - \sum_{i=1}^k a_i \ln a_i,$$

1) 若存在某  $i \leq k$ , 满足  $a_i \leq b$ , 则由 (II) 知:  $a_{k+1} - b > a_i - b \geq 0$ ,

2) 若对任意  $i \leq k$ , 都有  $a_i > b$ , 则  $a_{k+1} = a_k - a_k \ln a_k = a_1 - b - \sum_{i=1}^k a_i \ln a_i =$

$$a_1 - b - \sum_{i=1}^k a_i \ln b \geq a_1 - b_1 - k a_1 \ln b = 0,$$

即  $a_{k+1} > b$  成立.

**【点评】** 此题主要考查多项式函数的导数, 函数单调性的判定, 函数最值, 函数、方程与不等式等基础知识及数学归纳法的应用, 一般出题者喜欢考查学生的运算求解能力、推理论证能力及分析与解决问题的能力, 要出学生会用数形结合的思想、分类与整合思想, 化归与转化思想、有限与无限的思想来解决问题.