

## 2012 年福建省高考理科数学

第 I 卷 (选择题 共 50 分)

一、选择题: 本大题共 10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分。在每小题给出四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数  $z$  满足  $zi=1-i$ , 则  $z$  等于

- A.  $-1-i$     B.  $1-i$     C.  $-1+i$     D.  $1+i$

2. 等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1+a_5=10, a_4=7$ , 则数列  $\{a_n\}$  的公差为

- A. 1    B. 2    C. 3    D. 4

3. 下列命题中, 真命题是

A.  $\exists x_0 \in \mathbb{R}, e^{x_0} \leq 0$

B.  $\forall x \in \mathbb{R}, 2^x > x^2$

C.  $a+b=0$  的充要条件是  $\frac{a}{b} = -1$

D.  $a>1, b>1$  是  $ab>1$  的充分条件

4. 一个几何体的三视图形状都相同、大小均相等, 那么这个几何体不可以是

- A. 球    B. 三棱柱    C. 正方形    D. 圆柱

5. 下列不等式一定成立的是

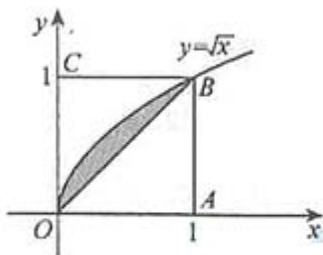
A.  $\log(x^2 + \frac{1}{4}) > \lg x (x > 0)$

B.  $\sin x + \frac{1}{\sin x} \geq 2 (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$

C.  $x^2 + 1 \geq 2|x| (x \in \mathbb{R})$

D.  $\frac{1}{x^2 + 1} > 1 (x \in \mathbb{R})$

6. 如图所示, 在边长为 1 的正方形  $OABC$  中任取一点  $P$ , 则点  $P$  恰好取自阴影部分的概率为



- A.  $\frac{1}{4}$     B.  $\frac{1}{5}$     C.  $\frac{1}{6}$     D.  $\frac{1}{7}$

7. 设函数  $D(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 为有理数} \\ 0 & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ , 则下列结论错误的是

A.  $D(x)$  的值域为  $\{0,1\}$

- B.  $D(x)$  是偶函数  
 C.  $D(x)$  不是周期函数  
 D.  $D(x)$  不是单调函数

8. 已知双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的右焦点与抛物线  $y^2 = 12x$  的焦点重合, 则该双曲线的焦点到其渐近线的距离等于

- A.  $\sqrt{5}$     B.  $4\sqrt{2}$     C. 3    D. 5

9. 若函数  $y=2^x$  图像上存在点  $(x, y)$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y-3 \leq 0 \\ x-2y-3 \leq 0 \\ x \geq m \end{cases}$ , 则实数  $m$  的

最大值为

- A.  $\frac{1}{2}$     B. 1    C.  $\frac{3}{2}$     D. 2

10. 函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有定义, 若对任意  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , 有  $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$

则称  $f(x)$  在  $[a, b]$  上具有性质 P. 设  $f(x)$  在  $[1, 3]$  上具有性质 P, 现给出如下命题:

①  $f(x)$  在  $[1, 3]$  上的图像时连续不断的;

②  $f(x_2)$  在  $[1, \sqrt{3}]$  上具有性质 P;

③ 若  $f(x)$  在  $x=2$  处取得最大值 1, 则  $f(x) = 1, x \in [1, 3]$ ;

④ 对任意  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [1, 3]$ , 有  $f(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}) \leq \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)]$

其中真命题的序号是

- A. ①②    B. ①③    C. ②④    D. ③④

第 II 卷 (非选择题共 100 分)

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分, 把答案填在答题卡的相应位置。

11.  $(a+x)^4$  的展开式中  $x^3$  的系数等于 8, 则实数  $a =$  \_\_\_\_\_。

12. 阅读右图所示的程序框图, 运行相应地程序, 输出的  $s$  值等于 \_\_\_\_\_。

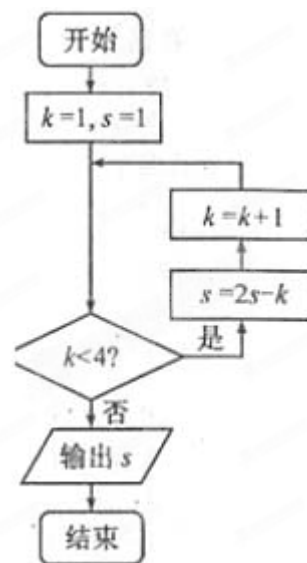
13. 已知  $\triangle ABC$  得三边长成公比为  $\sqrt{2}$  的等比数列, 则其最大角的余弦值为 \_\_\_\_\_。

14. 数列  $\{a_n\}$  的通项公式  $a_n = n \cos \frac{n\pi}{2} + 1$ , 前  $n$  项和为  $S_n$ , 则  $S_{2012} =$  \_\_\_\_\_。

15. 对于实数  $a$  和  $b$ , 定义运算 “\*”:

$$a * b = \begin{cases} a^2 - ab, & (a \leq b), \\ b^2 - ab, & (a > b), \end{cases}$$

设  $f(x) = (2x-1) * (x-1)$ , 且关于  $x$  的方程为  $f(x) = m$  ( $m \in \mathbb{R}$ ) 恰有三个互不相等的实数根  $x_1, x_2, x_3$ , 则  $x_1 x_2 x_3$



的取值范围是\_\_\_\_\_。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分，解答题写出文字说明，证明过程或演算步骤。

16. (本小题满分 13 分)

受轿车在保修期内维修费等因素的影响，企业产生每辆轿车的利润与该轿车首次出现故障的时间有关，某轿车制造厂生产甲、乙两种品牌轿车，保修期均为 2 年，现从该厂已售出的两种品牌轿车中随机抽取 50 辆，统计书数据如下：

| 品牌                | 甲              |                |         | 乙              |         |
|-------------------|----------------|----------------|---------|----------------|---------|
|                   | $0 < x \leq 1$ | $1 < x \leq 2$ | $x > 2$ | $0 < x \leq 2$ | $x > 2$ |
| 首次出现故障的时间 $x$ (年) |                |                |         |                |         |
| 轿车数量 (辆)          | 2              | 3              | 45      | 5              | 45      |
| 每辆利润 (万元)         | 1              | 2              | 3       | 1.8            | 2.9     |

将频率视为概率，解答下列问题：

- (i) 从该厂生产的甲品牌轿车中随机抽取一辆，求首次出现故障发生在保修期内的概率；
- (ii) 若该厂生产的轿车均能售出，记住生产一辆甲品牌轿车的利润为  $X_1$ ，生产一辆乙品牌轿车的利润为  $X_2$ ，分别求  $X_1$ ， $X_2$  的分布列；
- (iii) 该厂预计今后这两种品牌轿车销量相当，由于资金限制，只能生产其中一种品牌轿车，若从经济效益的角度考虑，你认为应该产生哪种品牌的轿车？说明理由。

17 (本小题满分 13 分)

某同学在一次研究性学习中发现，以下五个式子的值都等于同一个常数。

- (1)  $\sin^2 13^\circ + \cos^2 17^\circ - \sin 13^\circ \cos 17^\circ$
- (2)  $\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ - \sin 15^\circ \cos 15^\circ$
- (3)  $\sin^2 18^\circ + \cos^2 12^\circ - \sin 18^\circ \cos 12^\circ$
- (4)  $\sin^2 (-18^\circ) + \cos^2 48^\circ - \sin^2 (-18^\circ) \cos^2 48^\circ$
- (5)  $\sin^2 (-25^\circ) + \cos^2 55^\circ - \sin^2 (-25^\circ) \cos^2 55^\circ$

I 试从上述五个式子中选择一个，求出这个常数

II 根据 (I) 的计算结果，将该同学的发现推广位三角恒等式，并证明你的结论。

18. (本小题满分 13 分)

如图，在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中  $AA_1=AD=1$ ，E 为 CD 中点。

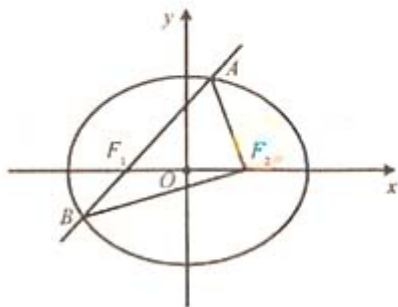
(I) 求证：  $B_1E \perp AD_1$ ；

(II) 在棱  $AA_1$  上是否存在一点 P，使得  $DP \parallel$  平面  $B_1AE$ ？若存在，求 AP 的长；若不存在，说明理由。

(III) 若二面角  $A-B_1E A_1$  的大小为  $30^\circ$ ，求 AB 的长。

19. (本小题满分 13 分)

如图, 椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左焦点为  $F_1$ , 右焦点为  $F_2$ , 离心率  $e = \frac{1}{2}$ . 过  $F_1$  的直线交椭圆于  $A, B$  两点, 且  $\triangle ABF_2$  的周长为 8.



- (I) 求椭圆  $E$  的方程.  
 (II) 设动直线  $l: y = kx + m$  与椭圆  $E$  有且只有一个公共点  $P$ , 且与直线  $x = 4$  相较于点  $Q$ . 试探究: 在坐标平面内是否存在定点  $M$ , 使得以  $PQ$  为直径的圆恒过点  $M$ ? 若存在, 求出点  $M$  的坐标; 若不存在, 说明理由.

20. (本小题满分 14 分)

已知函数  $f(x) = e^x + ax^2 - ex$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

- (I) 若曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线平行于  $x$  轴, 求函数  $f(x)$  的单调区间;  
 (II) 试确定  $a$  的取值范围, 使得曲线  $y = f(x)$  上存在唯一的点  $P$ , 曲线在该点处的切线与曲线只有一个公共点  $P$ .

21. 本题设有 (1)、(2)、(3) 三个选考题, 每题 7 分, 请考生任选 2 题作答, 满分 14 分. 如果多做, 则按所做的前两题计分. 作答时, 先用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应题号右边的方框图黑, 并将所选题号填入括号中.

(1) (本小题满分 7 分) 选修 4-2: 矩阵与变换

设曲线  $2x^2 + 2xy + y^2 = 1$  在矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} (a > 0)$  对应的变换作用下得到的曲线为  $x^2 + y^2 = 1$ .

- (I) 求实数  $a, b$  的值.  
 (II) 求  $A^2$  的逆矩阵.

(2) (本小题满分 7 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系中, 以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 已知直线  $l$  上两点  $M, N$  的极坐标分别为  $(2, 0)$

,  $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\pi}{2})$ , 圆  $C$  的参数方程  $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta \\ y = -\sqrt{3} + 2\sin\theta \end{cases} (\theta \text{ 为参数}).$

- (I) 设  $P$  为线段  $MN$  的中点, 求直线  $OP$  的平面直角坐标方程;  
 (II) 判断直线  $l$  与圆  $C$  的位置关系.

(3) (本小题满分 7 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数  $f(x) = m - |x - 2|$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , 且  $f(x + 2) \geq 0$  的解集为  $[-1, 1]$ .

- (I) 求  $m$  的值;

(II) 若  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , 且  $\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{3c} = m$ , 求证:  $a + 2b + 3c \geq 9$ .

