2007年福建高考理科数学真题及答案

第Ⅰ卷（选择题 共60分）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．复数 $\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})^2}$ 等于（　　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　　B．$-\dfrac{1}{2}$　　　C．$\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　　D．$-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

2．数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$，则S_5等于（　　）

A．1　　　B．$\dfrac{5}{6}$　　　C．$\dfrac{1}{6}$　　　D．$\dfrac{1}{30}$

3．已知集合$A=\{x|x<a\}$，$B=\{x|1<x<2\}$，且$A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\mathbf{R}$，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$a\leqslant 1$　　　B．$a<1$　　　C．$a\geqslant 2$　　　D．$a>2$

4．对于向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$和实数λ，下列命题中真命题是（　　）

A．若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$或$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$　　　B．若$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则$\lambda=0$或$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

C．若$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$，则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$或$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$　　　D．若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，则$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

5．已知函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$的最小正周期为$\pi$，则该函数的图象（　　）

A．关于点$\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)$对称　　　B．关于直线$x=\dfrac{\pi}{4}$对称

C．关于点$\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$对称　　　D．关于直线$x=\dfrac{\pi}{3}$对称

6．以双曲线$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$的右焦点为圆心，且与其渐近线相切的圆的方程是（　　）

A．$x^2+y^2-10x+9=0$　　　B．$x^2+y^2-10x+16=0$

C．$x^2+y^2+10x+16=0$　　　D．$x^2+y^2+10x+9=0$

7．已知$f(x)$为$\mathbf{R}$上的减函数，则满足$f\left(\left|\dfrac{1}{x}\right|\right)<f(1)$的实数$x$的取值范围是（　　）

A．$(-1,1)$　　　B．$(0,1)$　　　C．$(-1,0)\cup(0,1)$　　　D．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

8．已知m，n为两条不同的直线，α，β为两个不同的平面，则下列命题中正确的是（　　）

A．$m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m\parallel\beta$，$n\parallel\beta\Rightarrow\alpha\parallel\beta$

B．$\alpha\parallel\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta\Rightarrow m\parallel n$

C．$m\perp\alpha$，$m\perp n\Rightarrow n\parallel\alpha$

D．$n\parallel m$，$n\perp\alpha\Rightarrow m\perp\alpha$

9．把$1+(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^n$展开成关于$x$的多项式，其各项系数和为$a_n$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_n-1}{a_n+1}$等于（　　）

A．$\dfrac{1}{4}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．1　　D．2

10．顶点在同一球面上的正四棱柱$ABCD-A'B'C'D'$中，$AB=1$，$AA'=\sqrt{2}$，则A，C两点间的球面距离为（　　）

A．$\dfrac{\pi}{4}$　　B．$\dfrac{\pi}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$

11．已知对任意实数x，有$f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=g(x)$，且$x>0$时，$f'(x)>0$，$g'(x)>0$，则$x<0$时（　　）

A．$f'(x)>0$，$g'(x)>0$　　B．$f'(x)>0$，$g'(x)<0$

C．$f'(x)<0$，$g'(x)>0$　　D．$f'(x)<0$，$g'(x)<0$

12．如图，三行三列的方阵中有9个数$a_{ij}(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$，从中任取三个数，则至少有两个数位于同行或同列的概率是（　　）

A．$\dfrac{3}{7}$　　B．$\dfrac{4}{7}$

C．$\dfrac{1}{14}$　　D．$\dfrac{13}{14}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

第Ⅱ卷（非选择题　共90分）

二、填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分，把答案填在答题卡的相应位置．

13．已知实数x，y满足$\begin{cases} x+y\geqslant 2, \\ x-y\leqslant 2, \\ 0\leqslant y\leqslant 3, \end{cases}$则$z=2x-y$的取值范围是________．

14．已知正方形$ABCD$，则以A，B为焦点，且过C，D两点的椭圆的离心率为______．

15．两封信随机投入A，B，C三个空邮箱，则A邮箱的信件数ξ的数学期望

$E\xi=$________.

16．中学数学中存在许多关系，比如“相等关系”、“平行关系”等等．如果集合 A 中元素之间的一个关系“$-$”满足以下三个条件：

（1）自反性：对于任意 $a\in A$，都有 $a-a$；

（2）对称性：对于 a，$b\in A$，若 $a-b$，则有 $b-a$；

（3）传递性：对于 a，b，$c\in A$，若 $a-b$，$b-c$，则有 $a-c$．

则称“$-$”是集合 A 的一个等价关系．例如：“数的相等”是等价关系，而“直线的平行”不是等价关系（自反性不成立）．请你再列出三个等价关系：______．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分 12 分）

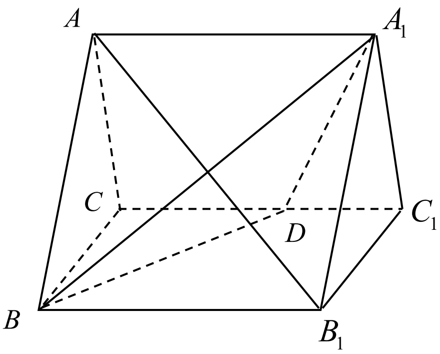
在$\triangle ABC$中，$\tan A=\dfrac{1}{4}$，$\tan B=\dfrac{3}{5}$．

（Ⅰ）求角 C 的大小；

（Ⅱ）若$\triangle ABC$最大边的边长为 $\sqrt{17}$，求最小边的边长．

18．（本小题满分 12 分）

如图，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都为 2，D 为 CC_1 中点．



（Ⅰ）求证：$AB_1\perp$平面 A_1BD；

（Ⅱ）求二面角 $A-A_1D-B$ 的大小；

（Ⅲ）求点 C 到平面 A_1BD 的距离．

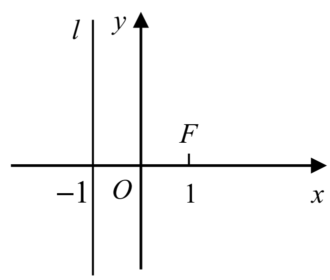
19．（本小题满分 12 分）

某分公司经销某种品牌产品，每件产品的成本为 3 元，并且每件产品需向总公司交 a 元（$3\leqslant a\leqslant 5$）的管理费，预计当每件产品的售价为 x 元（$9\leqslant x\leqslant 11$）时，一年的销售量为 $(12-x)^2$ 万件．

（Ⅰ）求分公司一年的利润 L（万元）与每件产品的售价 x 的函数关系式；

（Ⅱ）当每件产品的售价为多少元时，分公司一年的利润 L 最大，并求出 L 的最大值 $Q(a)$．

20．（本小题满分 12 分）如图，已知点 $F(1,0)$，直线 $l:x=-1$，P 为平面上的动点，过 P 作直线 l 的垂线，垂足为点 Q，且 $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QF}=\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}$．



（Ⅰ）求动点 P 的轨迹 C 的方程；

（Ⅱ）过点 F 的直线交轨迹 C 于 A，B 两点，交直线 l 于点 M，已知 $\overrightarrow{MA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{MB}=\lambda_2\overrightarrow{BF}$，求 $\lambda_1+\lambda_2$ 的值；

21．（本小题满分 12 分）

等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1+\sqrt{2}$，$S_3=9+3\sqrt{2}$．

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 与前 n 项和 S_n；

（Ⅱ）设 $b_n=\dfrac{S_n}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$，求证：数列 $\{b_n\}$ 中任意不同的三项都不可能成为等比数列．

22．（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-kx$，$x\in\mathbf{R}$

（Ⅰ）若 $k=\mathrm{e}$，试确定函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若 $k>0$，且对于任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(|x|)>0$ 恒成立，试确定实数 k 的取值范围；

（Ⅲ）设函数 $F(x)=f(x)+f(-x)$，求证：$F(1)F(2)\cdots F(n)>(\mathrm{e}^{n+1}+2)^{\frac{n}{2}}(n\in\mathbf{N}^*)$．

参考答案

一、选择题：本大题考查基本概念和基本运算，每小题 5 分，满分 60 分．

1．D　2．B　3．C　4．B　5．A　6．A　7．C　8．D　9．D　10．B

11．B　12．D

二、填空题：本大题考查基础知识和基本运算，每小题 4 分，满分 16 分．

13．$[-5,7]$　　14．$\sqrt{2}-1$　　15．$\dfrac{2}{3}$

16．答案不唯一，如“图形的全等”、“图形的相似”、“非零向量的共线”、“命题的充要条件”等等．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．本小题主要考查两角和差公式，用同角三角函数关系等解斜三角形的基本知识以及推理和运算能力，满分 12 分．

解：（Ⅰ）$\because C=\pi-(A+B)$，

$$\therefore \tan C=-\tan(A+B)=-\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}}=-1.$$

又$\because 0<C<\pi$，$\therefore C=\dfrac{3}{4}\pi$．

（Ⅱ）$\because C=\dfrac{3}{4}\pi$，

$\therefore AB$ 边最大，即 $AB=\sqrt{17}$．

又$\because \tan A<\tan B$，A，$B\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

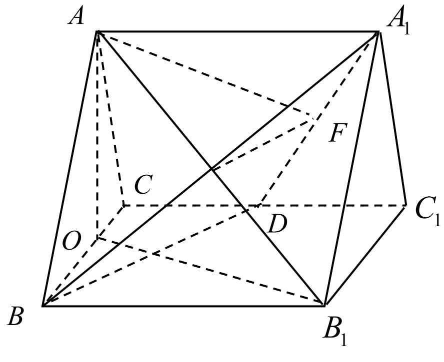
$\therefore$ 角 A 最小，BC 边为最小边．

由$\begin{cases}\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{1}{4},\\ \sin^2 A+\cos^2 A=1,\end{cases}$ 且 $A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

得 $\sin A=\dfrac{\sqrt{17}}{17}$．由 $\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A}$ 得：$BC=AB\bullet\dfrac{\sin A}{\sin C}=\sqrt{2}$．

所以，最小边 $BC=\sqrt{2}$．

18．本小题主要考查直线与平面的位置关系，二面角的大小，点到平面的距离等知识，考查空间想象能力、逻辑思维能力和运算能力．满分 12 分．



解法一：（Ⅰ）取 BC 中点 O，连结 AO．

$\because\triangle ABC$ 为正三角形，$\therefore AO\perp BC$．

$\because$ 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $ABC\perp$ 平面 BCC_1B_1，

$\therefore AO\perp$ 平面 BCC_1B_1．

连结 B_1O，在正方形 BB_1C_1C 中，O，D 分别为

BC，CC_1 的中点，

$\therefore B_1O \perp BD$，

$\therefore AB_1 \perp BD$．

在正方形ABB_1A_1中，$AB_1 \perp A_1B$，

$\therefore AB_1 \perp$平面A_1BD．

（Ⅱ）设AB_1与A_1B交于点G，在平面A_1BD中，作$GF \perp A_1D$于F，连结AF，由（Ⅰ）得$AB_1 \perp$平面A_1BD．

$\therefore AF \perp A_1D$，

$\therefore \angle AFG$为二面角$A-A_1D-B$的平面角．

在$\triangle AA_1D$中，由等面积法可求得$AF=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，

又$\because AG=\dfrac{1}{2}AB_1=\sqrt{2}$，

$\therefore \sin\angle AFG=\dfrac{AG}{AF}=\dfrac{\sqrt{2}}{\dfrac{4\sqrt{5}}{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$．

所以二面角$A-A_1D-B$的大小为$\arcsin\dfrac{\sqrt{10}}{4}$．

（Ⅲ）$\triangle A_1BD$中，$BD=A_1D=\sqrt{5}$，$A_1B=2\sqrt{2}$，$\therefore S_{\triangle A_1BD}=\sqrt{6}$，$S_{\triangle BCD}=1$．

在正三棱柱中，A_1到平面BCC_1B_1的距离为$\sqrt{3}$．

设点C到平面A_1BD的距离为d．

由$V_{A_1-BCD}=V_{C-A_1BD}$得$\dfrac{1}{3}S_{\triangle BCD}\bullet\sqrt{3}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle A_1BD}\bullet d$，

$\therefore d=\dfrac{\sqrt{3}S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle A_1BD}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

$\therefore$点C到平面A_1BD的距离为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

解法二：（Ⅰ）取BC中点O，连结AO．

$\because \triangle ABC$为正三角形，$\therefore AO \perp BC$．

$\because$ 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $ABC\perp$ 平面 BCC_1B_1，

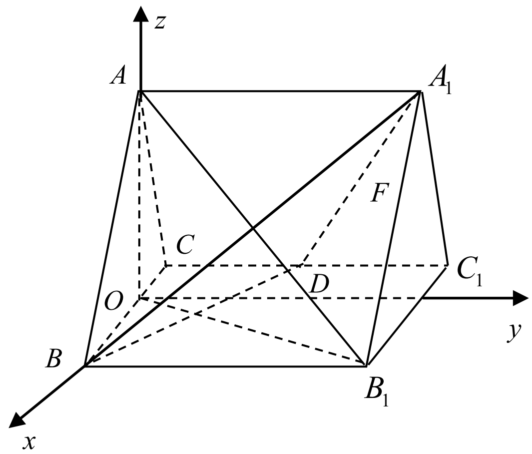
$\therefore AD\perp$ 平面 BCC_1B_1.

取 B_1C_1 中点 O_1，以 O 为原点，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OO_1}$，$\overrightarrow{OA}$ 的方向为 x，y，z 轴的正方向建立空间直角坐标系，则 $B(1,0,0)$，$D(-1,1,0)$，$A_1(0,2,\sqrt{3})$，$A(0,0,\sqrt{3})$，$B_1(1,2,0)$，

$\therefore \overrightarrow{AB_1}=(1,2,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BD}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{BA_1}=(-1,2,\sqrt{3})$.

$\because \overrightarrow{AB_1}\bullet\overrightarrow{BD}=-2+2+0=0$，$\overrightarrow{AB_1}\bullet\overrightarrow{BA_1}=-1+4-3=0$，

$\therefore \overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{BA_1}$.



$\therefore AB_1\perp$ 平面 A_1BD.

（Ⅱ）设平面 A_1AD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$.

$\overrightarrow{AD}=(-1,1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,2,0)$.

$\because \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AD}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AA_1}$，

$\therefore \begin{cases}\boldsymbol{n}\bullet\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{n}\bullet\overrightarrow{AA_1}=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}-x+y-\sqrt{3}z=0,\\ 2y=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}y=0,\\ x=-\sqrt{3}z.\end{cases}$

令 $z=1$ 得 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},0,1)$ 为平面 A_1AD 的一个法向量.

由（Ⅰ）知 $AB_1\perp$ 平面 A_1BD，

$\therefore \overrightarrow{AB_1}$ 为平面 A_1BD 的法向量.

$$\cos<\boldsymbol{n},\ \overrightarrow{AB_1}>=\frac{\boldsymbol{n}\bullet\overrightarrow{AB_1}}{|\boldsymbol{n}|\bullet|\overrightarrow{AB_1}|}=\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2\bullet2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

$\therefore$ 二面角 $A-A_1D-B$ 的大小为 $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

（Ⅲ）由（Ⅱ），$\overrightarrow{AB_1}$ 为平面 A_1BD 法向量，

$\because \overrightarrow{BC}=(-2,0,0),\overrightarrow{AB_1}=(1,2,-\sqrt{3})$.

$\therefore$ 点 C 到平面 A_1BD 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{AB_1}|}{|\overrightarrow{AB_1}|}=\dfrac{|-2|}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

19．本小题考查函数、导数及其应用等知识，考查运用数学知识分析和解决实际问题的能力，满分 12 分．

解：（Ⅰ）分公司一年的利润 L（万元）与售价 x 的函数关系式为：

$$L=(x-3-a)(12-x)^2，x\in[9,11].$$

（Ⅱ）$L'(x)=(12-x)^2-2(x-3-a)(12-x)$

$$=(12-x)(18+2a-3x).$$

令 $L'=0$ 得 $x=6+\frac{2}{3}a$ 或 $x=12$（不合题意，舍去）.

$\because 3\leqslant a\leqslant 5$，$\therefore 8\leqslant 6+\frac{2}{3}a\leqslant\frac{28}{3}$.

在 $x=6+\frac{2}{3}a$ 两侧 L' 的值由正变负.

所以（1）当 $8\leqslant 6+\frac{2}{3}a<9$ 即 $3\leqslant a<\frac{9}{2}$ 时，

$$L_{\max}=L(9)=(9-3-a)(12-9)^2=9(6-a).$$

（2）当 $9\leqslant 6+\frac{2}{3}a\leqslant\frac{28}{3}$ 即 $\frac{9}{2}\leqslant a\leqslant 5$ 时，

$$L_{\max}=L(6+\frac{2}{3}a)=\left(6+\frac{2}{3}a-3-a\right)\left[12-\left(6+\frac{2}{3}a\right)\right]^2=4\left(3-\frac{1}{3}a\right)^3,$$

所以 $Q(a)=\begin{cases}9(6-a), & 3\leqslant a<\frac{9}{2},\\ 4\left(3-\frac{1}{3}a\right)^3, & \frac{9}{2}\leqslant a\leqslant 5\end{cases}$

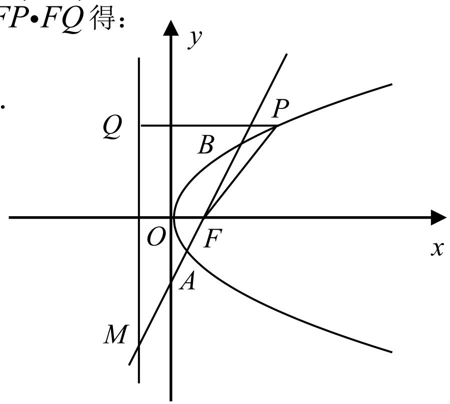
答：若 $3\leqslant a<\frac{9}{2}$，则当每件售价为 9 元时，分公司一年的利润 L 最大，最大值 $Q(a)=9(6-a)$（万元）；若 $\frac{9}{2}\leqslant a\leqslant 5$，则当每件售价为 $\left(6+\frac{2}{3}a\right)$ 元时，分公司一年的利润 L 最大，最大值 $Q(a)=4\left(3-\frac{1}{3}a\right)^3$（万元）.

20．本小题主要考查直线、抛物线、向量等基础知识，考查轨迹方程的求法以及研究曲线几何特征的基本方法，考查运算能力和综合解题能力．满分 14 分．

解法一：（Ⅰ）设点 $P(x，y)$，则 $Q(-1，y)$，由 $\overrightarrow{QP}\bullet\overrightarrow{QF}=\overrightarrow{FP}\bullet\overrightarrow{FQ}$ 得：

$(x+1,0)\bullet(2,-y)=(x-1，y)\bullet(-2，y)$，化简得 $C:y^2=4x$.

（Ⅱ）设直线 AB 的方程为：



$x=my+1(m\neq 0)$.

设 $A(x_1,\ y_1)$ ，$B(x_2,\ y_2)$ ，又 $M\left(-1,-\dfrac{2}{m}\right)$ ，

联立方程组 $\begin{cases} y^2=4x, \\ x=my+1, \end{cases}$ ，消去 x 得：

$y^2-4my-4=0$ ，$\Delta=(-4m)^2+12>0$ ，故

$$\begin{cases} y_1+y_2=4m, \\ y_1y_2=-4. \end{cases}$$

由 $\overrightarrow{MA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}$ ，$\overrightarrow{MB}=\lambda_2\overrightarrow{BF}$ 得：

$y_1+\dfrac{2}{m}=-\lambda_1y_1$ ，$y_2+\dfrac{2}{m}=-\lambda_2y_2$ ，整理得：

$\lambda_1=-1-\dfrac{2}{my_1}$ ，$\lambda_2=-1-\dfrac{2}{my_2}$ ，

$$\therefore \lambda_1+\lambda_2=-2-\frac{2}{m}\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}\right)$$

$$=-2-\frac{2}{m}\bullet\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}$$

$$=-2-\frac{2}{m}\bullet\frac{4m}{-4}$$

$=0$.

解法二：（Ⅰ）由 $\overrightarrow{QP}\bullet\overrightarrow{QF}=\overrightarrow{FP}\bullet\overrightarrow{FQ}$ 得：$\overrightarrow{FQ}\bullet(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PF})=0$ ，

$\therefore (\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PF})\bullet(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PF})=0$ ，

$\therefore \overrightarrow{PQ}^2-\overrightarrow{PF}^2=0$ ，

$\therefore \left|\overrightarrow{PQ}\right|=\left|\overrightarrow{PF}\right|$.

所以点 P 的轨迹 C 是抛物线，由题意，轨迹 C 的方程为：$y^2=4x$.

（Ⅱ）由已知 $\overrightarrow{MA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}$ ，$\overrightarrow{MB}=\lambda_2\overrightarrow{BF}$ ，得 $\lambda_1\bullet\lambda_2<0$.

则：$\dfrac{\left|\overrightarrow{MA}\right|}{\left|\overrightarrow{MB}\right|}=-\dfrac{\lambda_1\left|\overrightarrow{AF}\right|}{\lambda_2\left|\overrightarrow{BF}\right|}$. …………①

过点 A，B 分别作准线 l 的垂线，垂足分别为 A_1，B_1，

则有：$\dfrac{|\overrightarrow{MA}|}{|\overrightarrow{MB}|}=\dfrac{|\overrightarrow{AA_1}|}{|\overrightarrow{BB_1}|}=\dfrac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{BF}|}$． …………②

由①②得：$-\dfrac{\lambda_1|\overrightarrow{AF}|}{\lambda_2|\overrightarrow{BF}|}=\dfrac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{BF}|}$，即 $\lambda_1+\lambda_2=0$．

21．本小题考查数列的基本知识，考查等差数列的概念、通项公式与前 n 项和公式，考查等比数列的概念与性质，考查化归的数学思想方法以及推理和运算能力．满分 12 分

解：（Ⅰ）由已知得 $\begin{cases} a_1=\sqrt{2}+1, \\ 3a_1+3d=9+3\sqrt{2} \end{cases}$，$\therefore d=2$，

故 $a_n=2n-1+\sqrt{2}$，$S_n=n(n+\sqrt{2})$．

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $b_n=\dfrac{S_n}{n}=n+\sqrt{2}$．

假设数列 $\{b_n\}$ 中存在三项 b_p，b_q，b_r（p，q，r 互不相等）成等比数列，则 $b_q^2=b_pb_r$．

即 $(q+\sqrt{2})^2=(p+\sqrt{2})(r+\sqrt{2})$．

$\therefore (q^2-pr)+(2q-p-r)\sqrt{2}=0$

$\because p，q，r\in \mathbf{N}^*$，

$\therefore \begin{cases} q^2-pr=0, \\ 2q-p-r=0, \end{cases}$ $\therefore \left(\dfrac{p+r}{2}\right)^2=pr,(p-r)^2=0,\therefore p=r$．

与 $p\neq r$ 矛盾．

所以数列 $\{b_n\}$ 中任意不同的三项都不可能成等比数列．

22．本小题主要考查函数的单调性、极值、导数、不等式等基本知识，考查运用导数研究函数性质的方法，考查分类讨论、化归以及数形结合等数学思想方法，考查分析问题、解决问题的能力．满分 14 分．

解：（Ⅰ）由 $k=\mathrm{e}$ 得 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x$，所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}$．

由 $f'(x)>0$ 得 $x>1$，故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(1,+\infty)$，

由 $f'(x)<0$ 得 $x<1$，故 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,1)$．

（Ⅱ）由 $f(|-x|)=f(|x|)$ 可知 $f(|x|)$ 是偶函数．

于是 $f(|x|)>0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 成立等价于 $f(x)>0$ 对任意 $x\geqslant 0$ 成立.

由 $f'(x)=\mathrm{e}^x-k=0$ 得 $x=\ln k$.

①当 $k\in(0,1]$ 时，$f'(x)=\mathrm{e}^x-k>1-k\geqslant 0(x>0)$.

此时 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

故 $f(x)\geqslant f(0)=1>0$ ，符合题意.

②当 $k\in(1,+\infty)$ 时，$\ln k>0$.

当 x 变化时 $f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,\ln k)$	$\ln k$	$(\ln k,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

由此可得，在 $[0,+\infty)$ 上，$f(x)\geqslant f(\ln k)=k-k\ln k$.

依题意，$k-k\ln k>0$ ，又 $k>1,\therefore 1<k<\mathrm{e}$.

综合①，②得，实数 k 的取值范围是 $0<k<\mathrm{e}$.

（III）$\because F(x)=f(x)+f(-x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$,

$\therefore F(x_1)F(x_2)=\mathrm{e}^{x_1+x_2}+\mathrm{e}^{-(x_1+x_2)}+\mathrm{e}^{x_1-x_2}+\mathrm{e}^{-x_1+x_2}>\mathrm{e}^{x_1+x_2}+\mathrm{e}^{-(x_1+x_2)}+2>\mathrm{e}^{x_1+x_2}+2$,

$\therefore F(1)F(n)>\mathrm{e}^{n+1}+2$,

$F(2)F(n-1)>\mathrm{e}^{n+1}+2$

……

$F(n)F(1)>\mathrm{e}^{n+1}+2.$

由此得，

$[F(1)F(2)\cdots F(n)]^2=[F(1)F(n)][F(2)F(n-1)]\cdots[F(n)F(1)]>(\mathrm{e}^{n+1}+2)^n$

故 $F(1)F(2)\cdots F(n)>(\mathrm{e}^{n+1}+2)^{\frac{n}{2}}$，$n\in\mathbf{N}^*$.