2014年普通高等学校招生全国统一考试（江西卷）

数学（文科）

一、选择题：

1. 若复数 z 满足 $z(1+i)=2i$（i 为虚数单位），则 $|z|=$（　）

$A.1$　　$B.2$　　$C.\sqrt{2}$　　$D.\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】

试题分析：因为 $z(1+i)=2i$，学科网所以 $z=\dfrac{2i}{1+i}=\dfrac{2i(1-i)}{2}=1+i$，因此 $|z|=|1+i|=\sqrt{2}$.

考点：复数的模

2. 设全集为 R，集合 $A=\{x\,|\,x^2-9<0\}, B=\{x\,|\,-1<x\le 5\}$，则 $A\cap(C_RB)=$（　）

$A.(-3,0)$　　$B.(-3,-1)$　　$C.(-3,-1]$　　$D.(-3,3)$

【答案】C

【解析】

试题分析：因为 $A=\{x\,|\,x^2-9<0\}=(-3,3)$，$B=\{x\,|\,-1<x\le 5\}$，$C_UB=(-\infty,-1]\cup(5,+\infty)$，所以 $A\cap(C_RB)=(-3,-1]$.

考点：集合的运算

3. 掷两颗均匀的骰子，则点数之和为 5 的概率等于（　）

$A.\dfrac{1}{18}$　　$B.\dfrac{1}{9}$.　　$C.\dfrac{1}{6}$　　$D.\dfrac{1}{12}$

【答案】B

【解析】

试题分析：掷两颗均匀的骰子，共有 36 种基本事件，点数之和为 5 的事件有（1，4），（2，3），（3，2），（4，1）这四种，因此所求概率为 $\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$，选 B.

考点：古典概型概率

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} a\cdot 2^x, x\ge 0 \\ 2^{-x}, x<0 \end{cases}(a\in R)$，若 $f[f(-1)]=1$，则 $a=$（　）

$A.\frac{1}{4}$　　$B.\frac{1}{2}$　　$C.1$　　$D.2$

【答案】A

【解析】

试题分析：因为 $f(-1)=2$，所以 $f[f(-1)]=4a=1, a=\frac{1}{4}$.

考点：分段函数

5. 在 ΔABC 中，内角 A,B,C 所对应的边分别为 a,b,c,，若 $3a=2b$，则 $\frac{2\sin^2 B-\sin^2 A}{\sin^2 A}$ 的值为（　　）

$A.-\frac{1}{9}$　　$B.\frac{1}{3}$　　$C.1$　　$D.\frac{7}{2}$

【答案】D

【解析】

试题分析：由正弦定理得：学科网 $\frac{2\sin^2 B-\sin^2 A}{\sin^2 A}=\frac{2b^2-a^2}{a^2}=2(\frac{b}{a})^2-1$，又 $3a=2b$，所以

$\frac{2\sin^2 B-\sin^2 A}{\sin^2 A}=2\times\frac{9}{4}-1=\frac{7}{2}$. 选 D.

考点：正弦定理

6. 下列叙述中正确的是（　　）

$A.$ 若 $a,b,c\in R$，则"$ax^2+bx+c\geq 0$"的充分条件是"$b^2-4ac\leq 0$"

$B.$ 若 $a,b,c\in R$，则"$ab^2>cb^2$"的充要条件是"$a>c$"

$C.$ 命题"对任意 $x\in R$，有 $x^2\geq 0$"的否定是"存在 $x\in R$，有 $x^2\geq 0$"

$D.$ l 是一条直线，α,β 是两个不同的平面，若 $l\perp\alpha, l\perp\beta$，则 $\alpha//\beta$

【答案】D

【解析】

试题分析：当 $a<0$ 时，"$b^2-4ac\leq 0$"推不出"$ax^2+bx+c\geq 0$"，A 错，当 $b=0$ 时，"$a>c$"推不出"$ab^2>cb^2$"，B 错，命题"对任意 $x\in R$，有 $x^2\geq 0$"的否定是"存在 $x\in R$，有 $x^2<0$"，C 错，因为与同一直线垂直的两平面平行，所以 D 正确.

考点：充要关系

7. 某人研究中学生的性别与成绩、视力、智商、阅读量这 4 个变量之间的关系，随机抽查 52 名中学生，得到统计数据如表 1 至表 4，这与性别有关联的可能性最大的变量是（　　）

表 1	不及格	及格	总计
男	6	14	20
女	10	22	32
总计	16	36	52

A.成绩

表 2	不及格	及格	总计
男	4	16	20
女	12	20	32
总计	16	36	52

B.视力

表 3	不及格	及格	总计
男	8	12	20
女	8	24	32
总计	16	36	52

C.智商

表 4	不及格	及格	总计
男	14	6	20
女	2	30	32
总计	16	36	52

D.阅读量

【答案】D

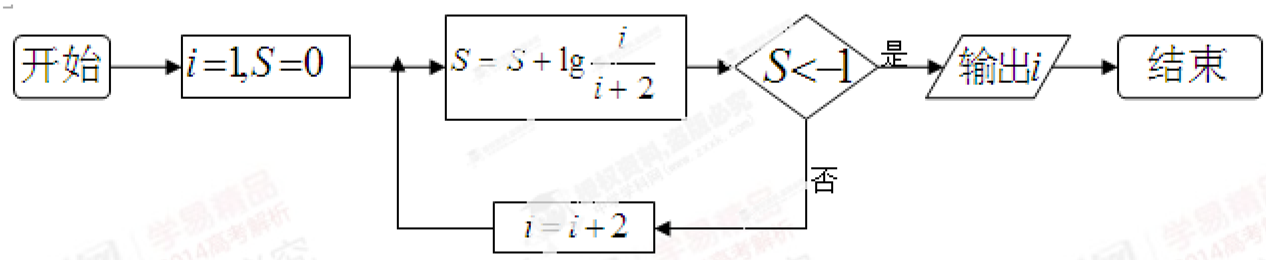
【解析】

试题分析：根据公式 $\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 分别计算得：A. $\frac{64}{16\times36\times20\times32}$， B. $\frac{112^2}{16\times36\times20\times32}$

C. $\frac{96^2}{16\times36\times20\times32}$ D. $\frac{408^2}{16\times36\times20\times32}$，选项 D 的值最大，所以与性别有关联的可能性最大为 D.

考点：关联判断

8. 阅读如下程序框图，运行相应的程序，则程序运行后输出的结果为（　　）



A.7　　　B.9　　　C.10　　　D.11

【答案】B

【解析】

试题分析：第一次循环：$i=1,S=\lg\frac{1}{3}$,第二次循环：$i=3,S=\lg\frac{1}{3}+\lg\frac{3}{5}=\lg\frac{1}{5}$,

第三次循环：$i=5,S=\lg\frac{1}{5}+\lg\frac{5}{7}=\lg\frac{1}{7}$,第四次学科网循环：$i=7,S=\lg\frac{1}{7}+\lg\frac{7}{9}=\lg\frac{1}{9}$,

第五次循环：$i=9,S=\lg\frac{1}{9}+\lg\frac{9}{11}=\lg\frac{1}{11}<-1$,结束循环，输出$i=9$.选 B.

考点：循环结构流程图

9. 过双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的右顶点作$x$轴的垂线与$C$的一条渐近线相交于$A$.若以$C$的右焦点为圆心、半径为 4 的圆经过$A$、$O$两点（$O$为坐标原点），，则双曲线$C$的方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　　　B. $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=1$　　　C. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$　　　D. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$

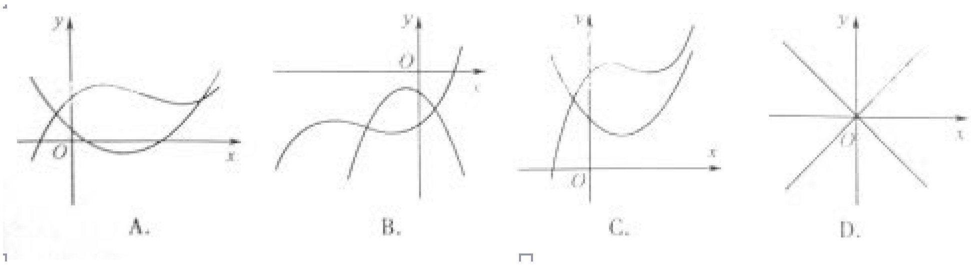
【答案】A

【解析】

试题分析：因为$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线为$y=\pm\frac{b}{a}x$，所以$A(a,b)$或$A(a,-b)$.因此 OA=c=4,从而三角形 OAC 为正三角形，即$\tan 60^\circ=\frac{b}{a},a=2,b=2\sqrt{3}$,双曲线$C$的方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$.

考点：双曲线的渐近线

10. 在同意直角坐标系中，函数$y=ax^2-x+\frac{a}{2}$与$y=a^2x^3-2ax^2+x+a(a\in R)$的图像不可能的是（　　）



【答案】B

【解析】

试题分析：当$a=0$时，两函数图像为D所示，当$a\neq 0$时，由$y'=3a^2x^2-4ax+1=0$得：$x=\frac{1}{a}$或$x=\frac{1}{3a}$，$y=ax^2-x+\frac{a}{2}$的对称轴为$x=\frac{1}{2a}$. 当$a<0$时，学科网由$\frac{1}{a}<\frac{1}{2a}<\frac{1}{3a}$知B不对. 当$a>0$时，由$\frac{1}{a}>\frac{1}{2a}>\frac{1}{3a}$知A, C正确.

考点：利用导数研究函数图像

二. 填空题：

11. 若曲线$y=x\ln x$上点P处的切线平行于直线$2x-y+1=0$,则点P的坐标是______.

【答案】(e,e)

【解析】

试题分析：因为$y'=\ln x+1$，设切点(a,b)，则$k=\ln a+1=2, a=e$, 又$b=a\ln a=e$, $P(e,e)$.

考点：利用导数求切点

12. 已知单位向量$\vec{e}_1,\vec{e}_2$的夹角为α,且$\cos\alpha=\frac{1}{3}$,若向量$\vec{a}=3\vec{e}_1-2\vec{e}_2$,则$|\vec{a}|=$______.

【答案】3

【解析】

试题分析：因为$|\vec{a}|^2=(3\vec{e}_1-2\vec{e}_2)^2=9\vec{e}_1^2-12\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2+4\vec{e}_2^2=9-12\times\cos\alpha+4=13-12\times\frac{1}{3}=9$, 所以$|\vec{a}|=3$.

考点：向量数量积

13. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=7$，公差为d，前n项和为S_n，当且仅当$n=8$时S_n取最大值，

则d的取值范围________.

【答案】$(-1,-\frac{7}{8})$

【解析】

试题分析：由题意得：$a_8>0,a_9<0$，所以$7+7d>0,7+8d<0$，即$-1<d<-\frac{7}{8}$.

考点：　　等差数列性质

14. 设椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点为$F_1$，$F_2$，作$F_2$作$x$轴的垂线与$C$交于

A，B两点，F_1B与y轴交于点D，若$AD\perp F_1B$，则椭圆C的离心率等于________.

【答案】$\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

试题分析：因为OD平行于F_2B，所以D为F_1B中点，又$AD\perp F_1B$，所以$AF_1=AB=2AF_2$，设$AF_2=m$，则$AF_1=2m,F_1F_2=\sqrt{3}m$，因此$e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{F_1F_2}{AF_1+AF_2}=\frac{\sqrt{3}m}{2m+m}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

考点：椭圆的离心率

15. x，$y\in R$，若$|x|+|y|+|x-1|+|y-1|\le 2$，则$x+y$的取值范围为__________.

【答案】$[0,2]$

【解析】

试题分析：因为$|x|+|x-1|\ge|x-(x-1)|=1,|y|+|y-1|\ge|y-(y-1)|=1$，当且仅当$0\le x\le 1,0\le y\le 1$取等号，所以$|x|+|y|+|x-1|+|y-1|\ge 2$，又$|x|+|y|+|x-1|+|y-1|\le 2$，所以$0\le x\le 1,0\le y\le 1$，因此$x+y$的取值范围为$[0,2]$.

考点：含绝对值不等式的性质

三、解答题

16.（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=(a+2\cos^2 x)\cos(2x+\theta)$为奇函数，且$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$，其中$a\in R$，$\theta\in(0,\pi)$.

（1）求a，θ的值；

（2）若$f\left(\frac{\alpha}{4}\right)=-\frac{2}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，求$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$的值.

【答案】(1) $a=-1,\theta=\frac{\pi}{2}$，(2) $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$.

【解析】

试题分析：(1)根据奇偶性定义，可得等量关系：$f(-x)=-f(x)$,即

$\left(a+2\cos^2 x\right)\cos\left(-2x+\theta\right)=-\left(a+2\cos^2 x\right)\cos\left(2x+\theta\right)$，因为$x\in R$,所以

$\cos\left(-2x+\theta\right)=-\cos\left(2x+\theta\right),\cos 2x\cos\theta=0,\cos\theta=0$.学科网又$\theta\in\left(0,\pi\right)$,所以$\theta=\frac{\pi}{2}$.因为$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$，所以

$\left(a+2\cos^2\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=0,a=-1$. (2)由（1）得：

$f\left(x\right)=\left(-1+2\cos^2 x\right)\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x(-\sin 2x)=-\frac{1}{2}\sin 4x$,所以由$f\left(\frac{\alpha}{4}\right)=-\frac{2}{5}$，得

$-\frac{1}{2}\sin\alpha=-\frac{2}{5},\sin\alpha=\frac{4}{5}$,又 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$,因此

$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha=\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$.

试题解析：（1）因为函数$f\left(x\right)=\left(a+2\cos^2 x\right)\cos\left(2x+\theta\right)$为奇函数，所以$f(-x)=-f(x)$,即

$\left(a+2\cos^2 x\right)\cos\left(-2x+\theta\right)=-\left(a+2\cos^2 x\right)\cos\left(2x+\theta\right)$，因为$x\in R$,所以

$\cos\left(-2x+\theta\right)=-\cos\left(2x+\theta\right),\cos 2x\cos\theta=0,\cos\theta=0$.又$\theta\in\left(0,\pi\right)$,所以$\theta=\frac{\pi}{2}$.因为$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$，所以

$\left(a+2\cos^2\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=0,a=-1$.（2）由（1）得：

$f\left(x\right)=\left(-1+2\cos^2 x\right)\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x(-\sin 2x)=-\frac{1}{2}\sin 4x$,所以由$f\left(\frac{\alpha}{4}\right)=-\frac{2}{5}$，得

$-\frac{1}{2}\sin\alpha=-\frac{2}{5},\sin\alpha=\frac{4}{5}$,又 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$,因此

$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha=\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$.

考点：函数奇偶性，同角三角函数关系，二倍角公式

17.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\frac{3n^2-n}{2}$，$n\in N^*$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）证明：对任意$n>1$，都有$m\in N^*$，使得a_1，a_n，a_m成等比数列.

【答案】(1) $a_n=3n-2$，(2) 详见解析.

【解析】

试题分析：(1) 由和项求通项，主要根据 $a_n=\begin{cases}S_1, n=1\\ S_n-S_{n-1}, n\ge 2\end{cases}$ 进行求解. 因为 $S_n=\frac{3n^2-n}{2}$，所以当 $n\ge 2$ 时 $a_n=S_n-S_{n-1}=3n-2$，又 $n=1$ 时，$a_n=S_1=1=3\times1-2$，所以 $a_n=3n-2$.（2）证明存在性问题，实质是确定 m. 要使得 a_1，a_n，a_m 成等比数列，只需要 $a_n^2=a_1a_m$，即 $(3n-2)^2=1\times(3m-2)$，$m=3n^2-4n+2$. 而此时 $m\in N^*$，且 $m>n$，所以对任意 $n>1$，都有 $m\in N^*$，使得 a_1，a_n，a_m 成等比数列.

试题解析：(1) 因为 $S_n=\frac{3n^2-n}{2}$，所以当 $n\ge 2$ 时 $a_n=S_n-S_{n-1}=3n-2$，又 $n=1$ 时，$a_n=S_1=1=3\times1-2$，所以 $a_n=3n-2$，(2) 要使得 a_1，a_n，a_m 成等比数列，学科网只需要 $a_n^2=a_1a_m$，即 $(3n-2)^2=1\times(3m-2)$，$m=3n^2-4n+2$. 而此时 $m\in N^*$，且 $m>n$，所以对任意 $n>1$，都有 $m\in N^*$，使得 a_1，a_n，a_m 成等比数列.

考点：由和项求通项，等比数列

18.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(4x^2+4ax+a^2)\sqrt{x}$，其中 $a<0$.

（1）当 $a=-4$ 时，求 $f(x)$ 的单调递增区间;

（2）若 $f(x)$ 在区间 $[1,4]$ 上的最小值为 8，求 a 的值.

【答案】(1) $(0,\frac{2}{5})$ 和 $(2,+\infty)$，(2) -10.

【解析】

试题分析：(1) 利用导数求函数单调区间，首先确定定义域：$[0,+\infty)$，然后对函数求导，在定义域内求导函数的零点：$f'(x)=(8x+4a)\sqrt{x}+\frac{4x^2+4ax+a^2}{2\sqrt{x}}=\frac{20x^2+12ax+a^2}{2\sqrt{x}}=\frac{(10x+a)(2x+a)}{2\sqrt{x}}$，当 $a=-4$ 时，$f'(x)=\frac{2(5x-2)(x-2)}{\sqrt{x}}$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{2}{5}$ 或 $x=2$，列表分析得单调增区间：$(0,\frac{2}{5})$ 和 $(2,+\infty)$，(2) 已知函数最值，求参数，解题思路还是从求最值出发. 由 (1) 知，$f'(x)=(8x+4a)\sqrt{x}+\frac{4x^2+4ax+a^2}{2\sqrt{x}}=\frac{20x^2+12ax+a^2}{2\sqrt{x}}=\frac{(10x+a)(2x+a)}{2\sqrt{x}}$，所以导函数的零点为 $x=-\frac{a}{10}$ 或 $x=-\frac{a}{2}$，列表分析可得：函数增区间为 $(0,-\frac{a}{10})$ 和 $(-\frac{a}{2},+\infty)$，减区间为 $(-\frac{a}{10},-\frac{a}{2})$. 由于 $f(-\frac{a}{2})=0$，所以

$-\frac{a}{2}\notin[1,4]$，当 $0<-\frac{a}{2}<1$ 时，$f(x)_{\min}=f(1)=4+4a+a^2=8,a=-2\pm2\sqrt{2}$，（舍），当 $-\frac{a}{2}>4$ 时，

$f(x)_{\min}=\min\{f(1),f(4)\}$，由于 $f(1)\neq8$，所以 $f(4)=2(64+16a+a^2)=8$，且 $f(4)<f(1)$，解得 $a=-10$ 或

$a=-6$（舍），当 $a=-10$ 时，$f(x)$ 在 $(1,4)$ 上单调递减，满足题意，综上 $a=-10$.

试题解析：(1)定义域：$[0,+\infty)$，而 $f'(x)=(8x+4a)\sqrt{x}+\frac{4x^2+4ax+a^2}{2\sqrt{x}}=\frac{20x^2+12ax+a^2}{2\sqrt{x}}=\frac{(10x+a)(2x+a)}{2\sqrt{x}}$，

当 $a=-4$ 时，$f'(x)=\frac{2(5x-2)(x-2)}{\sqrt{x}}$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{2}{5}$ 或 $x=2$，列表：

x	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+

所以单调增区间为：$(0,\frac{2}{5})$ 和 $(2,+\infty)$，（2）由（1）知，

$f'(x)=(8x+4a)\sqrt{x}+\frac{4x^2+4ax+a^2}{2\sqrt{x}}=\frac{20x^2+12ax+a^2}{2\sqrt{x}}=\frac{(10x+a)(2x+a)}{2\sqrt{x}}$，所以导函数的零点为 $x=-\frac{a}{10}$ 或

$x=-\frac{a}{2}$，列表分析可得：函数增区间为 $(0,-\frac{a}{10})$ 和 $(-\frac{a}{2},+\infty)$，减区间为 $(-\frac{a}{10},-\frac{a}{2})$. 由于 $f(-\frac{a}{2})=0$，所以

$-\frac{a}{2}\notin[1,4]$，当 $0<-\frac{a}{2}<1$ 时，$f(x)_{\min}=f(1)=4+4a+a^2=8,a=-2\pm2\sqrt{2}$，（舍），当 $-\frac{a}{2}>4$ 时，

$f(x)_{\min}=\min\{f(1),f(4)\}$，由于 $f(1)\neq8$，所以 $f(4)=2(64+16a+a^2)=8$，且 $f(4)<f(1)$，解得 $a=-10$ 或

$a=-6$（舍），当 $a=-10$ 时，$f(x)$ 在 $(1,4)$ 上单调递减，满足题意，综上 $a=-10$.

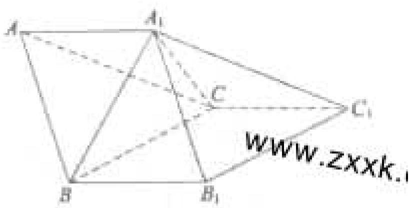
考点：利用导数求函数单调区间，利用导数求函数最值

19.（本小题满分 12 分）

如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp BC, A_1B\perp BB_1$.

（1）求证：$A_1C_1\perp CC_1$；

（2）若 $AB=2, AC=\sqrt{3}, BC=\sqrt{7}$，问 AA_1 为何值时，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 体积最大，并求此最大值。



【答案】(1) 详见解析，(2) $AA_1=\frac{\sqrt{42}}{7}$ 时，体积 V 取到最大值 $\frac{3\sqrt{7}}{7}$.

【解析】

试题分析：（1）证明线线垂直，一般利用线面垂直判定及性质定理进行多次转化证明．由 $AA_1 \perp BC$ 知 $BB_1 \perp BC$，又 $BB_1 \perp A_1B$，故 $BB_1 \perp$ 平面 BCA_1，即 $BB_1 \perp A_1C$，又 $BB_1//CC_1$，所以 $A_1C \perp CC_1$.（2）研究三棱柱体积，关键明确底面上的高，本题由（1）知：$BB_1 \perp$ 平面 BCA_1，因此将三棱柱体积转化为等高同底的三棱锥 $B-A_1B_1C_1$ 体积（三倍关系），而三棱锥 $B-A_1B_1C_1$ 体积又等于三棱锥 $B-A_1B_1C$ 体积，三棱锥 $B-A_1B_1C$ 体积等于 $\frac{1}{3}BB_1 \times S_{\Delta A_1BC}$，设 $AA_1 = x$，不难计算 $S_{\Delta A_1BC} = \frac{\sqrt{12-7x^2}}{2}$，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为

$V = 3\times\frac{1}{3}BB_1 \times S_{\Delta A_1BC} = \frac{x\sqrt{12-7x^2}}{2}$，故当 $x=\sqrt{\frac{6}{7}}=\frac{\sqrt{42}}{7}$ 时，即 $AA_1=\frac{\sqrt{42}}{7}$ 时，体积 V 取到最大值 $\frac{3\sqrt{7}}{7}$.

试题解析：

（1）证明：由 $AA_1 \perp BC$ 知 $BB_1 \perp BC$，又 $BB_1 \perp A_1B$，故 $BB_1 \perp$ 平面 BCA_1，即 $BB_1 \perp A_1C$，又 $BB_1//CC_1$，所以 $A_1C \perp CC_1$.（2）设 $AA_1 = x$，在 $Rt\Delta A_1BB_1$ 中 $BA_1=\sqrt{A_1B_1^2-BB_1^2}=\sqrt{4-x^2}$，同理 $A_1C=\sqrt{A_1C_1^2-CC_1^2}=\sqrt{3-x^2}$，在 ΔA_1BC 中，$\cos\angle BA_1C=\frac{A_1B^2+A_1C^2-BC^2}{2A_1B\cdot A_1C}=-\frac{x^2}{\sqrt{(4-x^2)(3-x^2)}}$，$\sin\angle BA_1C=\sqrt{\frac{12-7x^2}{(4-x^2)(3-x^2)}}$，所以

$S_{\Delta A_1BC}=\frac{1}{2}A_1B\cdot A_1C\sin\angle BA_1C=\frac{\sqrt{12-7x^2}}{2}$．从而三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为

$V=3\times\frac{1}{3}BB_1\times S_{\Delta A_1BC}=\frac{x\sqrt{12-7x^2}}{2}$ 因 $x\sqrt{12-7x^2}=\sqrt{12x^2-7x^4}=\sqrt{-7(x^2-\frac{6}{7})^2+\frac{36}{7}}$，故当 $x=\sqrt{\frac{6}{7}}=\frac{\sqrt{42}}{7}$ 时，即 $AA_1=\frac{\sqrt{42}}{7}$ 时，体积 V 取到最大值 $\frac{3\sqrt{7}}{7}$.

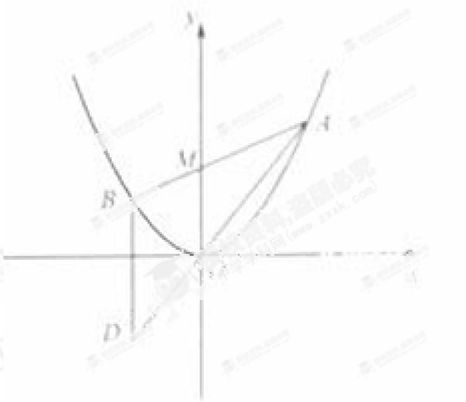
考点：线面垂直判定与性质定理，三棱柱的体积

20.（本小题满分 13 分）

如图，已知抛物线 $C: x^2=4y$，过点 $M(0,2)$ 任作一直线与 C 相交于 A,B 两点，过点 B 作 y 轴的平行线与直线 AO 相交于点 D（O 为坐标原点）.

（1）证明：动点 D 在定直线上；

（2）作 C 的任意一条切线 l（不含 x 轴）与直线 $y=2$ 相交于点 N_1，与（1）中的定直线相交于点 N_2，证明：$|MN_2|^2-|MN_1|^2$ 为定值，并求此定值.



【答案】(1) 详见解析，(2) 8.

【解析】

试题分析：(1) 证明动点 D 在定直线上，实质是求动点 D 的轨迹方程，本题解题思路为根据条件求出动点 D 的坐标，进而探求动点 D 轨迹：依题意可设 AB 方程为 $y=kx+2$，代入 $x^2=4y$，得 $x^2=4(kx+2)$，即 $x^2-4kx-8=0$. 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则有：$x_1x_2=-8$，直线 AO 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1}x$；BD 的方程为 $x=x_2$；解得交点 D 的坐标为 $(x_2,\frac{y_1x_2}{x_1})$，注意到 $x_1x_2=-8$ 及 $x_1^2=4y_1$，则有 $y=\frac{y_1x_2}{x_1}=\frac{x_1^2x_2}{4x_1}=\frac{x_1x_2}{4}=-2$，因此 D 点在定直线 $y=-2(x\neq 0)$ 上. (2) 本题以算代证，从切线方程出发，分别表示出 N_1,N_2 的坐标，再化简 $MN_2^2-MN_1^2$. 设切线 l 的方程为 $y=ax+b(a\neq 0)$，代入 $x^2=4y$ 得 $x^2=4(ax+b)$，即 $x^2-4ax-4b=0$，由 $\Delta=0$ 得 $(4a)^2+16b=0$，化简整理得 $b=-a^2$，故切线 l 的方程可写为 $y=ax-a^2$，分别令 $y=2,y=-2$ 得 N_1,N_2 的坐标为 $N_1(\frac{2}{a}+a,2),N_2(-\frac{2}{a}+a,-2)$，则 $MN_2^2-MN_1^2=(\frac{2}{a}-a)^2+4^2-(\frac{2}{a}+a)^2=8$，即 $MN_2^2-MN_1^2$ 为定值 8.

试题解析：(1) 解：依题意可设 AB 方程为 $y=kx+2$，代入 $x^2=4y$，得 $x^2=4(kx+2)$，即 $x^2-4kx-8=0$. 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则有：$x_1x_2=-8$，直线 AO 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1}x$；BD 的方程为 $x=x_2$；解得交点 D 的坐标为 $(x_2,\frac{y_1x_2}{x_1})$，注意到 $x_1x_2=-8$ 及 $x_1^2=4y_1$，则有 $y=\frac{y_1x_2}{x_1}=\frac{x_1^2x_2}{4x_1}=\frac{x_1x_2}{4}=-2$，因此 D 点在定直线 $y=-2(x\neq 0)$ 上. (2) 依题设，切线 l 的斜率存在且不等于零，设切线 l 的方程为 $y=ax+b(a\neq 0)$，代入 $x^2=4y$ 得 $x^2=4(ax+b)$，即 $x^2-4ax-4b=0$，由 $\Delta=0$ 得 $(4a)^2+16b=0$，化简整理得 $b=-a^2$，故切线 l 的方程可写为 $y=ax-a^2$，分别令 $y=2,y=-2$ 得 N_1,N_2 的坐标为 $N_1(\frac{2}{a}+a,2),N_2(-\frac{2}{a}+a,-2)$，则

$MN_2^{\ 2}-MN_1^{\ 2}=(\frac{2}{a}-a)^2+4^2-(\frac{2}{a}+a)^2=8$，即 $MN_2^{\ 2}-MN_1^{\ 2}$ 为定值 8.

考点：曲线的交点，曲线的切线方程

21.（本小题满分 14 分）

将连续正整数 $1,2,\cdots,n(n\in N^*)$ 从小到大排列构成一个数 $123\cdots n$，$F(n)$ 为这个数的位数（如 $n=12$ 时，此数为 123456789101112，共有 15 个数字，$f(12)=15$），现从这个数中随机取一个数字，$p(n)$ 为恰好取到 0 的概率.

（1）求 $p(100)$；

（2）当 $n\le 2014$ 时，求 $F(n)$ 的表达式；

（3）令 $g(n)$ 为这个数中数字 0 的个数，$f(n)$ 为这个数中数字 9 的个数，$h(n)=f(n)-g(n)$，$S=\{n\,|\,h(n)=1,n\le 100,n\in N^*\}$，求当 $n\in S$ 时 $p(n)$ 的最大值.

【答案】（1）$p(100)=\frac{11}{192}$；（2）$F(n)=\begin{cases} n,1\le n\le 9 \\ 2n-9,10\le n\le 99 \\ 3n-108,100\le n\le 999 \\ 4n-1107,1000\le n\le 2014 \end{cases}$（3）$\frac{1}{19}$.

【解析】

试题分析：（1）解概率应用题，关键要正确理解事件．当 $n=100$ 时，这个数中有 9 个一位数，90 个二位数，一个三位数，总共有 192 个数字，其中数字 0 的个数为 9+2=11，所以恰好取到 0 的概率为 $p(100)=\frac{11}{192}$；（2）按（1）的思路，可分类写出 $F(n)$ 的表达式：$F(n)=\begin{cases} n,1\le n\le 9 \\ 2n-9,10\le n\le 99 \\ 3n-108,100\le n\le 999 \\ 4n-1107,1000\le n\le 2014 \end{cases}$，（3）同（1）的思路，分一位数，二位数，三位数进行讨论即可，当 $n=b(1\le b\le 9,b\in N^*),g(n)=0$；当

$n=10k+b,(1\le k\le 9,0\le b\le 9,k\in N^*,b\in N),g(n)=k$，当 $n=1000,g(n)=11$；即

$g(n)=\begin{cases} 0,n=b,1\le b\le 9,b\in N^*, \\ k,n=10k+b,1\le k\le 9,0\le b\le 9,k\in N^*,b\in N, \\ 11,n=100 \end{cases}$ 同理有

$$f(n)=\begin{cases}0,1\le n\le 8\\ k,n=10k+b-1,1\le k\le 8,0\le b\le 9,k\in N^*,b\in N\\ n-80,89\le n\le 98\\ 20,n=99,100\end{cases}$$

由 $h(n)=f(n)-g(n)=1$, 可知 $S=\{9,19,29,39,49,59,69,79,89,90\}$，当 $n=9$ 时， $P(9)=0$, 当 $n=90$ 时，$P(90)=\frac{g(90)}{F(90)}=\frac{9}{171}=\frac{1}{19}$，当 $n=10k+9(1\le k\le 8,k\in N^*)$ 时，$P(n)=\frac{g(n)}{F(n)}=\frac{k}{2n-9}=\frac{k}{20k+9}$，由 $y=\frac{k}{20k+9}$，关于 k 单调递增，故当 $n=10k+9(1\le k\le 8,k\in N^*)$， $P(n)$ 最大值为 $P(89)=\frac{8}{169}$. 又 $\frac{8}{169}<\frac{1}{19}$，所以当 $n\in S$ 时，$P(n)$ 最大值为 $\frac{1}{19}$.

试题解析：（1）解：当 $n=100$ 时，这个数中总共有 192 个数字，其中数字 0 的个数为 11，所以恰好取到 0 的概率为 $p(100)=\frac{11}{192}$；（2） $F(n)=\begin{cases}n,1\le n\le 9\\ 2n-9,10\le n\le 99\\ 3n-108,100\le n\le 999\\ 4n-1107,1000\le n\le 2014\end{cases}$ （3）当 $n=b(1\le b\le 9,b\in N^*)$, $g(n)=0$; 当 $n=10k+b,(1\le k\le 9,0\le b\le 9,k\in N^*,b\in N)$, $g(n)=k$, 当 $n=100$ 时, $g(n)=11$; 即

$$g(n)=\begin{cases}0,n=b,1\le b\le 9,b\in N^*,\\ k,n=10k+b,1\le k\le 9,0\le b\le 9,k\in N^*,b\in N,\\ 11,n=100\end{cases}$$ 同理有

$$f(n)=\begin{cases}0,1\le n\le 8\\ k,n=10k+b-1,1\le k\le 8,0\le b\le 9,k\in N^*,b\in N,\\ n-80,89\le n\le 98\\ 20,n=99,100\end{cases}$$

由 $h(n)=f(n)-g(n)=1$, 可知 $n=9,19,29,39,49,59,69,79,89,90$, 所以当 $n\le 100$ 时，$S=\{9,19,29,39,49,59,69,79,89,90\}$，当 $n=9$ 时， $P(9)=0$, 当 $n=90$ 时， $P(90)=\frac{g(90)}{F(90)}=\frac{9}{171}=\frac{1}{19}$，当 $n=10k+9(1\le k\le 8,k\in N^*)$ 时， $P(n)=\frac{g(n)}{F(n)}=\frac{k}{2n-9}=\frac{k}{20k+9}$，由 $y=\frac{k}{20k+9}$，关于 k 单调递增，故当 $n=10k+9(1\le k\le 8,k\in N^*)$， $P(n)$ 最大值为 $P(89)=\frac{8}{169}$. 又 $\frac{8}{169}<\frac{1}{19}$，所以当 $n\in S$ 时， $P(n)$ 最大值为 $\frac{1}{19}$.

考点：古典概型概率