

2009年陕西省高考数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1. （5分）（2009•陕西）设不等式 $x^2 - x \leq 0$ 的解集为M，函数 $f(x) = \ln(1 - |x|)$ 的定义域为N，则 $M \cap N$ 为（ ）

A. $[0, 1)$ B. $(0, 1)$ C. $[0, 1]$ D. $(-1, 0]$

【考点】函数的定义域及其求法；元素与集合关系的判断.

【专题】计算题.

【分析】先求出不等式的解集和函数的定义域，然后再求两个集合的交集.

【解答】解：不等式 $x^2 - x \leq 0$ 转化为 $x(x - 1) \leq 0$

解得其解集是 $\{x|0 \leq x \leq 1\}$,

而函数 $f(x) = \ln(1 - |x|)$ 有意义则需： $1 - |x| > 0$

解得： $-1 < x < 1$

所以其定义域为 $\{-1 < x < 1\}$,

所以 $M \cap N = [0, 1)$,

故选A

【点评】本题主要考查一元二次不等式的解法和绝对值不等式的解法及集合的运算.

2. （5分）（2009•陕西）若 $\tan \alpha = 2$ ，则 $\frac{2\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + 2\cos \alpha}$ 的值为（ ）

A. 0 B. $\frac{3}{4}$ C. 1 D. $\frac{5}{4}$

【考点】同角三角函数间的基本关系；弦切互化.

【分析】根据齐次分式的意义将分子分母同时除以 $\cos \alpha$ ($\cos \alpha \neq 0$) 直接可得答案.

【解答】解：利用齐次分式的意义将分子分母同时除以 $\cos \alpha$ ($\cos \alpha \neq 0$) 得，

$$\text{原式} = \frac{2\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + 2\cos \alpha} = \frac{\frac{2\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha + 2\cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{2\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 2} = \frac{3}{4}$$

故选B.

【点评】本题主要考查 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ，这种题型经常在考试中遇到.

3. （5分）（2009•陕西）函数 $f(x) = \sqrt{2x - 4}$ ($x \geq 4$) 的反函数为（ ）

A. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ ($x \geq 0$) B. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ ($x \geq 2$)

C. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$ ($x \geq 0$) D. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$ ($x \geq 2$)

【考点】反函数.

【专题】应用题.

【分析】从条件中函数式数 $f(x) = \sqrt{2x-4} (x \geq 4)$ 反解出 x , 再将 x, y 互换即得对数函数的函数, 再依据互为反函数间的定义域与值域的关系求得反函数的定义域即可.

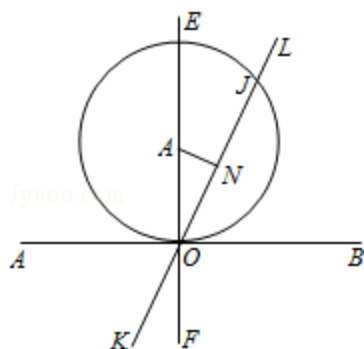
【解答】解: $f(x) = \sqrt{2x-4} (x \geq 4) \Rightarrow y \geq 2, f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2, x \geq 2,$

逐一验证, 知B正确.

故选B.

【点评】求反函数, 一般应分以下步骤: (1) 由已知解析式 $y=f(x)$ 反求出 $x=\Phi(y)$; (2) 交换 $x=\Phi(y)$ 中 x, y 的位置; (3) 求出反函数的定义域 (一般可通过求原函数的值域的方法求反函数的定义域).

4. (5分) (2009•陕西) 过原点且倾斜角为 60° 的直线被圆 $x^2+y^2-4y=0$ 所截得的弦长为 ()



A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{3}$

【考点】直线的倾斜角; 直线和圆的方程的应用.

【专题】计算题.

【分析】本题考查的知识点是直线与圆方程的应用, 由已知圆 $x^2+y^2-4y=0$, 我们可以将其转化为标准方程的形式, 求出圆心坐标和半径, 又直线由过原点且倾斜角为 60° , 得到直线的方程, 再结合半径、半弦长、弦心距满足勾股定理, 即可求解.

【解答】解: 将圆 $x^2+y^2-4y=0$ 的方程可以转化为:

$$x^2 + (y-2)^2 = 4,$$

即圆的圆心为 $A(0, 2)$, 半径为 $R=2$,

$\therefore A$ 到直线 ON 的距离, 即弦心距为 1,

$$\therefore ON = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{弦长} = 2\sqrt{3},$$

故选D.

【点评】要求圆到割线的距离, 即弦心距, 我们最常用的性质是: 半径、半弦长 (BE)、弦心距 (OE) 构成直角三角形, 满足勾股定理, 求出半径和半弦长, 代入即可求解.

5. (5分) (2009•陕西) 某单位共有老、中、青职工 430 人, 其中青年职工 160 人, 中年职工人数是老年职工人数的 2 倍. 为了解职工身体状况, 现采用分层抽样方法进行调查, 在抽取的样本中有青年职工 32 人, 则该样本中的老年职工人数为 ()

A. 9 B. 18 C. 27 D. 36

【考点】分层抽样方法.

【专题】 计算题.

【分析】 根据条件中职工总数和青年职工人数, 以及中年和老年职工的关系列出方程, 解出老年职工的人数, 根据青年职工在样本中的个数, 算出每个个体被抽到的概率, 用概率乘以老年职工的个数, 得到结果.

【解答】 解: 设老年职工有 x 人, 中年职工人数是老年职工人数的2倍, 则中年职工有 $2x$,
 $\therefore x+2x+160=430$,

$\therefore x=90$,

即由比例可得该单位老年职工共有90人,

\therefore 在抽取的样本中有青年职工32人,

\therefore 每个个体被抽到的概率是 $\frac{32}{160}=\frac{1}{5}$,

用分层抽样的比例应抽取 $\frac{1}{5} \times 90=18$ 人.

故选B.

【点评】 本题是一个分层抽样问题, 容易出错的是不理解分层抽样的含义或与其它混淆. 抽样方法是数学中的一个小知识点, 但一般不难, 故也是一个重要的得分点, 不容错过.

6. (5分) (2009•陕西) 若 $(1-2x)^{2009}=a_0+a_1x+\dots+a_{2009}x^{2009}$ ($x \in \mathbb{R}$), 则

$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_{2009}}{2^{2009}}$ 的值为 ()

A. 2 B. 0 C. -1 D. -2

【考点】 二项式定理的应用.

【专题】 计算题; 压轴题.

【分析】 通过给 x 赋值 $\frac{1}{2}$, 0得到两等式, 两式相减即得.

【解答】 解: 令 $x=\frac{1}{2}$ 得 $0=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\dots+\frac{a_{2009}}{2^{2009}}$

令 $x=0$ 得 $1=a_0$

两式相减得 $\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\dots+\frac{a_{2009}}{2^{2009}}=-1$

故选项为C

【点评】 本题考查赋值法是求展开式的系数和问题的重要方法.

7. (5分) (2009•陕西) “ $m>n>0$ ”是“方程 $mx^2+ny^2=1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆”的 ()

A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【考点】 椭圆的应用.

【专题】 常规题型.

【分析】将方程 $mx^2+ny^2=1$ 转化为 $\frac{x^2}{\frac{1}{m}}+\frac{y^2}{\frac{1}{n}}=1$ ，然后根据椭圆的定义判断.

【解答】解：将方程 $mx^2+ny^2=1$ 转化为 $\frac{x^2}{\frac{1}{m}}+\frac{y^2}{\frac{1}{n}}=1$ ，

根据椭圆的定义，要使焦点在y轴上必须满足 $\frac{1}{m}>0$ ， $\frac{1}{n}>0$ ，且 $\frac{1}{n}>\frac{1}{m}$ ，即 $m>n>0$

反之，当 $m>n>0$ ，可得出 $\frac{1}{n}>\frac{1}{m}>0$ ，此时方程对应的轨迹是椭圆

综上所述，“ $m>n>0$ ”是“方程 $mx^2+ny^2=1$ 表示焦点在y轴上的椭圆”的充要条件
故选C.

【点评】本题考查椭圆的定义，难度不大，解题认真推导.

8. (5分) (2009•陕西) 在 $\triangle ABC$ 中，M是BC的中点，AM=1，点P在AM上且满足学

$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PM}$ ，则 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 等于 ()

A. $-\frac{4}{9}$ B. $-\frac{4}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{4}{9}$

【考点】向量的共线定理；平面向量数量积的运算.

【专题】计算题.

【分析】由M是BC的中点，知AM是BC边上的中线，又由点P在AM上且满足 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PM}$ 可得：
P是三角形ABC的重心，根据重心的性质，即可求解.

【解答】解： \because M是BC的中点，知AM是BC边上的中线，

又由点P在AM上且满足 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PM}$

\therefore P是三角形ABC的重心

$\therefore \overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$

$=\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AP} = -|\overrightarrow{PA}|^2$

又 \because AM=1

$\therefore |\overrightarrow{PA}| = \frac{2}{3}$

$\therefore \overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}) = -\frac{4}{9}$

故选A

【点评】判断P点是否是三角形的重心有如下几种办法：①定义：三条中线的交点. ②性质： $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ 或 $\overrightarrow{AP}^2+\overrightarrow{BP}^2+\overrightarrow{CP}^2$ 取得最小值③坐标法：P点坐标是三个顶点坐标的平均数.

9. (5分) (2009•陕西) 从1, 2, 3, 4, 5, 6, 7这七个数字中任取两个奇数和两个偶数, 组成没有重复数字的四位数, 其中奇数的个数为 ()
 A. 432 B. 288 C. 216 D. 108

【考点】分步乘法计数原理.

【专题】计算题.

【分析】本题是一个分步计数原理, 先从4个奇数中取2个再从3个偶数中取2个共 $C_4^2 C_3^2$, 再把4个数排列, 其中是奇数的共 $A_2^1 A_3^3$ 种, 根据分步计数原理得到结果.

【解答】解: ∵由题意知本题是一个分步计数原理,

第一步先从4个奇数中取2个再从3个偶数中取2个共 $C_4^2 C_3^2=18$ 种,

第二步再把4个数排列, 其中是奇数的共 $A_2^1 A_3^3=12$ 种,

∴所求奇数的个数共有 $18 \times 12=216$ 种.

故选C.

【点评】本题考查分步计数原理, 是一个数字问题, 数字问题是排列中的一大类问题, 把排列问题包含在数字问题中, 解题的关键是看清题目的实质, 很多题目要分类讨论, 要做到不重不漏.

10. (5分) (2009•陕西) 定义在 \mathbb{R} 上的偶函数 $f(x)$ 满足: 对任意的 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$), 有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$. 则 ()

- A. $f(3) < f(-2) < f(1)$ B. $f(1) < f(-2) < f(3)$
 C. $f(-2) < f(1) < f(3)$ D. $f(3) < f(1) < f(-2)$

【考点】函数奇偶性的性质; 函数单调性的性质.

【专题】计算题; 压轴题.

【分析】对任意的 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$), 有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$. 可得出函数在 $[0, +\infty)$ 上是减函数, 再由偶函数的性质得出函数在 $(-\infty, 0]$ 是增函数, 由此可得出此函数函数值的变化规律, 由此规律选出正确选项

【解答】解: 任意的 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$), 有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$.

∴ $f(x)$ 在 $(0, +\infty]$ 上单调递减,

又 $f(x)$ 是偶函数, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 单调递增.

且满足 $n \in \mathbb{N}^*$ 时, $f(-2) = f(2)$, $3 > 2 > 1 > 0$,

由此知, 此函数具有性质: 自变量的绝对值越小, 函数值越大

∴ $f(3) < f(-2) < f(1)$,

故选A.

【点评】本题主要考查了函数奇偶性的应用和函数的单调性的应用. 属基础题.

11. (5分) (2009•陕西) 若正方体的棱长为 $\sqrt{2}$, 则以该正方体各个面的中心为顶点的凸多面体的体积为 ()
 A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

【考点】棱柱、棱锥、棱台的体积.

【专题】计算题; 压轴题.

【分析】由题意可知, 凸多面体为八面体, 八面体体积是两个底面边长为1, 高为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的四棱锥, 求出棱锥的体积, 即可求出八面体的体积.

【解答】解: 所求八面体体积是两个底面边长为1, 高为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的四棱锥的体积和,

$$\text{一个四棱锥体积 } V_1 = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6},$$

$$\text{故八面体体积 } V = 2V_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

故选B.

【点评】本题是基础题, 考查棱锥的体积, 正方体的内接多面体, 体积的求法常用转化思想, 变为易求的几何体的体积, 考查计算能力.

12. (5分) (2009•陕西) 设曲线 $y=x^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 在点(1, 1)处的切线与x轴的交点的横坐标为 x_n , 则 $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{n}$ B. $\frac{1}{n+1}$ C. $\frac{n}{n+1}$ D. 1

【考点】利用导数研究曲线上某点切线方程; 直线的斜率.

【专题】计算题; 压轴题.

【分析】欲判 $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ 的值, 只须求出切线与x轴的交点的横坐标即可, 故先利用导数求出在 $x=1$ 处的导函数值, 再结合导数的几何意义即可求出切线的斜率. 从而问题解决.

【解答】解: 对 $y=x^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 求导得 $y'=(n+1)x^n$,
令 $x=1$ 得在点(1, 1)处的切线的斜率 $k=n+1$, 在点
(1, 1)处的切线方程为 $y-1=k(x-1)=(n+1)(x-1)$,

$$\text{不妨设 } y=0, \quad x_n = \frac{n}{n+1}$$

$$\text{则 } x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

故选B.

【点评】本小题主要考查直线的斜率、利用导数研究曲线上某点切线方程、数列等基础知识, 考查运算求解能力、化归与转化思想. 属于基础题.

二、填空题 (共4小题, 每小题4分, 满分16分)

13. (4分) (2009•陕西) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前n项和为 S_n , 若 $a_6=s_3=12$, 则 $a_n = \underline{2n}$.

【考点】等差数列的通项公式.

【分析】由 $a_6=s_3=12$, 利用等差数列的前n项和公式和通项公式得到 a_1 和d的两个方程, 从而求出 a_1 和d, 得到 a_n .

$$\text{【解答】解: 由 } a_6=s_3=12 \text{ 可得 } \begin{cases} a_1+5d=12 \\ 3a_1+\frac{3 \times 2}{2}d=12 \end{cases}$$

解得 $\{a_n\}$ 的公差 $d=2$, 首项 $a_1=2$,

故易得 $a_n=2+(2-1)n=2n$.

故答案为: $2n$

【点评】此题很好的考查了等差数列的基本公式和方程思想.

14. (4分) (2009•陕西) 设 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x-y \geq -1 \\ 2x-y \leq 2 \end{cases}$$
, 则 $x+2y$ 的最小值是 1

, 最大值是 11.

【考点】简单线性规划.

【专题】数形结合.

【分析】①设目标函数 $z=x+2y$ z 为纵截距2倍

纵截距取得最值时 z 也取得最值②画可行域③平移目标函数线 寻找最值

【解答】解: 设 $z=x+2y$, z 为该直线纵截距2倍,

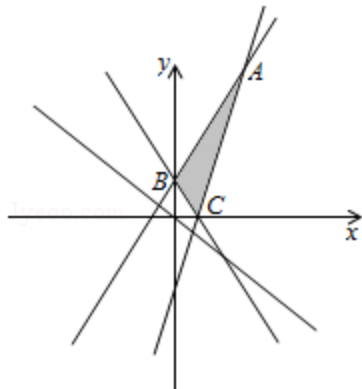
可行域如图三角形 ABC ,

令 $Z=0$ 得直线 $l: x+2y=0$,

平移 l 过点 $C(1, 0)$ 时 z 有最小值1,

过点 $A(3, 4)$ 点时有最大值11,

故答案为最小值1, 最大值11.



【点评】本题考查线性规划问题: 1行域画法2标函数几何意义3最优解

15. (4分) (2009•陕西) 已知球 O 的半径为2, 圆 O_1 是一小圆, $O_1O=\sqrt{2}$, A, B 是圆 O_1

上两点, 若 $\angle AO_1B=\frac{\pi}{2}$, 则 A, B 两点间的球面距离为

$$\frac{2\pi}{3}$$

【考点】弧长公式.

【专题】综合题; 压轴题; 数形结合; 综合法.

【分析】由题意知应先求出 AB 的长度, 在直角三角形 AO_1B 中由勾股定理可得 $AB=2$ 由此知三角形 AOB 是等边三角形, 由此可以求出 $\angle AOB$ 的值, 进而利用弧长公式求 A, B 两点间的球面距离.

【解答】解: 由题设知 $O_1O=\sqrt{2}$, $OA=OB=2$

在圆 O_1 中有 $O_1A=O_1B=\sqrt{2}$, 又 $\angle AO_1B=\frac{\pi}{2}$

在直角三角形 AO_1B 中由勾股定理可得 $AB=2$

所以在 $\triangle AOB$ 中, $OA=OB=AB=2$,

则 $\triangle AOB$ 为等边三角形, 可得 $\angle AOB=60^\circ$

由弧长公式 $l=r\theta$ (r 为半径) 得 A, B 两点间的球面距离 $l_{AB}=r\theta=2\times\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

故答案为 $\frac{2\pi}{3}$

【点评】本题的考点是弧长公式, 其考查背景是球内一小圆上两点的球面距, 对空间想象能力要求较高, 此类题是一个基本题型, 求解方法固定先求两点间的弦长, 再求球心角, 再由弧长公式求弧长.

16. (4分) (2009•陕西) 某班有36名同学参加数学、物理、化学课外探究小组, 每名同学至多参加两个小组, 已知参加数学、物理、化学小组的人数分别为26, 15, 13, 同时参加数学和物理小组的有6人, 同时参加物理和化学小组的有4人, 则同时参加数学和化学小组的有8人.

【考点】Venn图表达集合的关系及运算.

【专题】集合.

【分析】画出表示参加数学、物理、化学课外探究小组集合的Venn图, 结合图形进行分析求解即可.

【解答】解: 由条件知, 每名同学至多参加两个小组,

故不可能出现一名同学同时参加数学、物理、化学课外探究小组,

设参加数学、物理、化学小组的人数构成的集合分别为 A, B, C ,

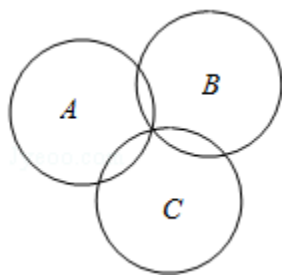
则 $\text{card}(A \cap B \cap C) = 0$, $\text{card}(A \cap B) = 6$, $\text{card}(B \cap C) = 4$,

由公式 $\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C)$

知 $36 = 26 + 15 + 13 - 6 - 4 - \text{card}(A \cap C)$

故 $\text{card}(A \cap C) = 8$ 即同时参加数学和化学小组的有8人.

故答案为: 8.



【点评】本小题主要考查Venn图表达集合的关系及运算、Venn图的应用、集合中元素的个数等基础知识, 考查运算求解能力, 考查数形结合思想、化归与转化思想. 属于基础题.

三、解答题 (共6小题, 满分76分)

17. (12分) (2009•陕西) 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \phi)$, $x \in \mathbb{R}$ (其中 $A > 0$, $\omega > 0$, $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$) 的周期为 π , 且图象上一个最低点为 $M(\frac{2\pi}{3}, -2)$.

(I) 求 $f(x)$ 的解析式;

(II) 当 $x \in [0, \frac{\pi}{12}]$, 求 $f(x)$ 的最值.

【考点】函数 $y=Asin(\omega x+\phi)$ 的图象变换; 由 $y=Asin(\omega x+\phi)$ 的部分图象确定其解析式.

【专题】计算题.

【分析】(I) 由最低点求出 A , 利用周期求出 ω , 图象上一个最低点为 $M(\frac{2\pi}{3}, -2)$

. 代入函数解析式求出 ϕ , 然后求 $f(x)$ 的解析式;

(II) 当 $x \in [0, \frac{\pi}{12}]$, 推出 $2x+\frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$, 然后求出 $f(x)$ 的最值.

【解答】解: (I) 由最低点为 $M(\frac{2\pi}{3}, -2)$ 得 $A=2$ 由 $T=\pi$ 得 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2$

由点 $M(\frac{2\pi}{3}, -2)$ 在图象上得 $2\sin(\frac{4\pi}{3}+\phi)=-2$ 即 $\sin(\frac{4\pi}{3}+\phi)=-1$

所以 $\frac{4\pi}{3}+\phi=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ 故 $\phi=2k\pi-\frac{11\pi}{6}$ ($k \in Z$)

又 $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\phi=\frac{\pi}{6}$ 所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$

(II) 因为 $x \in [0, \frac{\pi}{12}]$, 可得 $2x+\frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

所以当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ 时, 即 $x=0$ 时, $f(x)$ 取得最小值1;

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$, 即 $x=\frac{\pi}{12}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $\sqrt{3}$;

【点评】本题考查函数 $y=Asin(\omega x+\phi)$ 的图象变换, 由 $y=Asin(\omega x+\phi)$ 的部分图象确定其解析式, 考查计算能力, 是基础题.

18. (12分) (2009•陕西) 据统计, 某食品企业一个月内被消费者投诉的次数为0, 1, 2的概率分别为0.4, 0.5, 0.1

(I) 求该企业在一个月内共被消费者投诉不超过1次的概率;

(II) 假设一月份与二月份被消费者投诉的次数互不影响, 求该企业在这两个月内共被消费者投诉2次的概率.

【考点】相互独立事件的概率乘法公式.

【分析】本题考查的知识点是相互独立事件的概率乘法公式.

(1) 设事件A表示“一个月内被投诉的次数为0”, 事件B表示“一个月内被投诉的次数为1”, 由一个月内被消费者投诉的次数为0, 1的概率分别为0.4, 0.5, 则该企业一个月内共被消费者投诉不超过1次的概率 $P=P(A+B)=P(A)+P(B)$, 代入即可求出答案.

(2) 设事件 A_i 表示“第i个月被投诉的次数为0”, 事件 B_i 表示“第i个月被投诉的次数为1”, 事件 C_i 表示“第i个月被投诉的次数为2”, 事件D表示“两个月内被投诉2次”, 该企业在这两个月内共被消费者投诉2次的概率. $P(D)=P(A_1C_2+A_2C_1)+P(B_1B_2)=P(A_1C_2)+P(A_2C_1)+P(B_1B_2)$, 代入数据运算后, 易得最终答案.

【解答】解: (I) 设事件A表示“一个月内被投诉的次数为0”, 事件B表示“一个月内被投诉的次数为1”

所以 $P(A+B) = P(A) + P(B) = 0.4 + 0.5 = 0.9$

(II) 设事件 A_i 表示“第 i 个月被投诉的次数为 0”，

事件 B_i 表示“第 i 个月被投诉的次数为 1”，

事件 C_i 表示“第 i 个月被投诉的次数为 2”，

事件 D 表示“两个月内被投诉 2 次”

所以 $P(A_i) = 0.4, P(B_i) = 0.5, P(C_i) = 0.1 (i=1, 2)$

所以两个月中，一个月被投诉 2 次，另一个月被投诉 0 次的概率为 $P(A_1C_2 + A_2C_1)$

一、二月份均被投诉 1 次的概率为 $P(B_1B_2)$

所以 $P(D) = P(A_1C_2 + A_2C_1) + P(B_1B_2) = P(A_1C_2) + P(A_2C_1) + P(B_1B_2)$

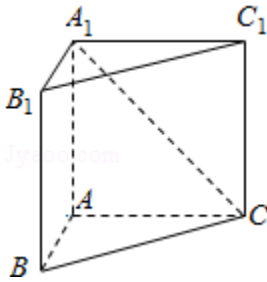
由事件的独立性的 $p(D) = 0.4 \times 0.1 + 0.1 \times 0.4 + 0.5 \times 0.5 = 0.33$.

【点评】 本小题主要考查相互独立事件概率的计算，运用数学知识解决问题的能力，要想计算一个事件的概率，首先我们要分析这个事件是分类的（分几类）还是分步的（分几步），然后再利用加法原理和乘法原理进行求解。

19. (12分) (2009•陕西) 如图所示，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB=1, AC=AA_1=\sqrt{3}, \angle ABC=60^\circ$.

(1) 证明： $AB \perp A_1C$;

(2) 求二面角 $A - A_1C - B$ 的余弦值.



【考点】 与二面角有关的立体几何综合题；直线与平面垂直的判定.

【专题】 计算题；证明题.

【分析】 (1) 欲证 $AB \perp A_1C$ ，而 $A_1C \subset$ 平面 ACC_1A_1 ，可先证 $AB \perp$ 平面 ACC_1A_1 ，根据三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，可知 $AB \perp AA_1$ ，由正弦定理得 $AB \perp AC$ ，满足线面垂直的判定定理所需条件；

(2) 作 $AD \perp A_1C$ 交 A_1C 于 D 点，连接 BD ，由三垂线定理知 $BD \perp A_1C$ ，则 $\angle ADB$ 为二面角 $A - A_1C - B$ 的平面角，在 $Rt\triangle BAD$ 中，求出二面角 $A - A_1C - B$ 的余弦值即可.

【解答】 解：(1) 证明： \because 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 为直三棱柱， $\therefore AB \perp AA_1$ ，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=1, AC=\sqrt{3}, \angle ABC=60^\circ$ ，由正弦定理得 $\angle ACB=30^\circ$ ，

$\therefore \angle BAC=90^\circ$ ，即 $AB \perp AC$ ，

$\therefore AB \perp$ 平面 ACC_1A_1 ，

又 $A_1C \subset$ 平面 ACC_1A_1 ，

$\therefore AB \perp A_1C$.

(2) 如图，作 $AD \perp A_1C$ 交 A_1C 于 D 点，连接 BD ，

由三垂线定理知 $BD \perp A_1C$ ，

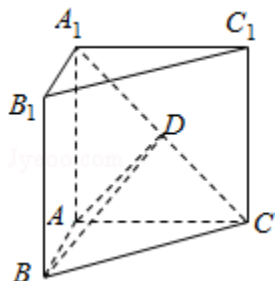
$\therefore \angle ADB$ 为二面角 $A - A_1C - B$ 的平面角.

在 $Rt\triangle AA_1C$ 中， $AD = \frac{AA_1 \cdot AC}{A_1C} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

在Rt△BAD中, $\tan\angle ADB = \frac{AB}{AD} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

$$\therefore \cos\angle ADB = \frac{\sqrt{15}}{5},$$

即二面角A - A₁C - B的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.



【点评】 本题考查直线与平面垂直的性质, 二面角及其度量, 考查空间想象能力, 逻辑思维能力, 计算能力, 是中档题.

20. (12分) (2009•陕西) 已知函数 $f(x) = x^3 - 3ax - 1$, $a \neq 0$

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极值, 直线 $y = m$ 与 $y = f(x)$ 的图象有三个不同的交点, 求 m 的取值范围.

【考点】 利用导数研究函数的单调性; 利用导数研究函数的极值.

【分析】 (1) 先确求导数 $f'(x)$, 在函数的定义域内解不等式 $f'(x) > 0$ 和 $f'(x) < 0$, $f'(x) > 0$ 的区间是增区间, $f'(x) < 0$ 的区间是减区间.

(2) 先根据极值点求出 a , 然后利用导数研究函数的单调性, 求出极值以及端点的函数值, 观察可知 m 的范围.

【解答】 解析: (1) $f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x^2 - a)$,

当 $a < 0$ 时, 对 $x \in \mathbb{R}$, 有 $f'(x) > 0$,

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, +\infty)$

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 解得 $x < -\sqrt{a}$ 或 $x > \sqrt{a}$;

由 $f'(x) < 0$ 解得 $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$,

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, -\sqrt{a})$, $(\sqrt{a}, +\infty)$;

$f(x)$ 的单调减区间为 $(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$.

(2) 因为 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极大值,

所以 $f'(-1) = 3 \times (-1)^2 - 3a = 0$, $\therefore a = 1$.

所以 $f(x) = x^3 - 3x - 1$, $f'(x) = 3x^2 - 3$,

由 $f'(x) = 0$ 解得 $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

由 (1) 中 $f(x)$ 的单调性可知, $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极大值 $f(-1) = 1$,

在 $x = 1$ 处取得极小值 $f(1) = -3$.

因为直线 $y = m$ 与函数 $y = f(x)$ 的图象有三个不同的交点,

结合 $f(x)$ 的单调性可知, m 的取值范围是 $(-3, 1)$.

【点评】 本题主要考查了利用导数研究函数的极值, 以及求最值和利用导数研究图象等问题, 属于中档题.

21. (12分) (2009•陕西) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

(1) 令 $b_n=a_{n+1}-a_n$, 证明: $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【考点】等比关系的确定; 数列递推式.

【专题】等差数列与等比数列.

【分析】 (1) 先令 $n=1$ 求出 b_1 , 然后当 $n\geq 2$ 时, 求出 a_{n+1} 的通项代入到 b_n 中化简可得 $\{b_n\}$ 是以1为首项, $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列得证;

(2) 由(1)找出 b_n 的通项公式, 当 $n\geq 2$ 时, 利用 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\dots+(a_n-a_{n-1})$ 代入并利用等比数列的前 n 项和的公式求出即可得到 a_n 的通项, 然后 $n=1$ 检验也符合, 所以 $n\in\mathbb{N}$, a_n 都成立.

【解答】解: (1) 证 $b_1=a_2-a_1=1$,

$$\text{当 } n\geq 2 \text{ 时, } b_n = a_{n+1} - a_n = \frac{a_{n-1} + a_n}{2} - a_n = -\frac{1}{2}(a_n - a_{n-1}) = -\frac{1}{2}b_{n-1},$$

所以 $\{b_n\}$ 是以1为首项, $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

(2) 解由(1)知 $b_n = a_{n+1} - a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

$$\text{当 } n\geq 2 \text{ 时, } a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = 1 + 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$= 1 + \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1 + \frac{2}{3} [1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}] = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{1-1} = 1 = a_1.$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

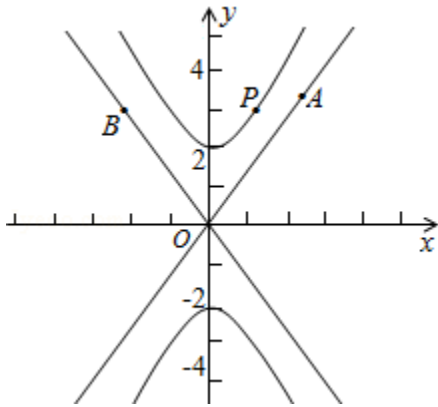
【点评】考查学生会确定一个数列为等比数列, 会利用数列的递推式的方法求数列的通项公式. 以及会利用等比数列的前 n 项和的公式化简求值.

22. (14分) (2009•陕西) 已知双曲线C的方程为 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a>0$, $b>0$), 离心率

$$e = \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ 顶点到渐近线的距离为 } \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

(I) 求双曲线C的方程;

(II) 如图, P是双曲线C上一点, A, B两点在双曲线C的两条渐近线上, 且分别位于第一、二象限, 若 $\vec{AP} = \lambda \vec{PB}$, $\lambda \in \left[\frac{1}{3}, 2\right]$, 求 $\triangle AOB$ 面积的取值范围.



【考点】 双曲线的标准方程；直线与圆锥曲线的综合问题.

【专题】 计算题；压轴题.

【分析】 (I) 先由双曲线标准方程求得顶点坐标和渐近线方程，进而根据顶点到渐近线的距离求得 a 、 b 和 c 的关系，进而根据离心率求得 a 和 c 的关系，最后根据 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ 综合得方程组求得 a 、 b 和 c ，则双曲线方程可得.

(II) 由(I)可求得渐近线方程，设 $A(m, 2m)$ ， $B(-n, 2n)$ ，根据 $\vec{AP} = \lambda \vec{PB}$ 得P点的坐标代入双曲线方程化简整理 m 、 n 与 λ 的关系式，设 $\angle AOB = 2\theta$ ，进而根据直线的斜率求得 $\tan\theta$ ，进而求得 $\sin 2\theta$ ，进而表示出 $|OA|$ ，得到 $\triangle AOB$ 的面积的表达式，根据 λ 的范围求得三角形面积的最大值和最小值， $\triangle AOB$ 面积的取值范围可得.

【解答】 解：(I) 由题意知，双曲线C的顶点 $(0, a)$ 到渐近线 $ax - by = 0$ 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\therefore \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \text{即} \quad \frac{ab}{c} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{由} \begin{cases} \frac{ab}{c} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases}, \quad \text{得} \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\therefore \text{双曲线C的方程为} \frac{y^2}{4} - x^2 = 1.$$

(II) 由(I)知双曲线C的两条渐近线方程为 $y = \pm 2x$.

设 $A(m, 2m)$ ， $B(-n, 2n)$ ， $m > 0$ ， $n > 0$.

$$\text{由} \vec{AP} = \lambda \vec{PB} \text{得P点的坐标为} \left(\frac{m - \lambda n}{1 + \lambda}, \frac{2(m + \lambda n)}{1 + \lambda} \right),$$

$$\text{将P点坐标代入} \frac{y^2}{4} - x^2 = 1, \text{化简得} mn = \frac{(1 + \lambda)^2}{4\lambda}.$$

$$\text{设 } \angle AOB = 2\theta, \because \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2, \therefore \tan\theta = \frac{1}{2}, \sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \sin 2\theta = \frac{4}{5}.$$

$$\text{又 } |OA| = \sqrt{5}m, |OB| = \sqrt{5}n,$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| \cdot \sin 2\theta = 2mn = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) + 1.$$

$$\text{记 } S(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) + 1, \lambda \in \left[\frac{1}{3}, 2\right],$$

$$\text{由 } S'(\lambda) = 0 \text{ 得 } \lambda = 1, \text{ 又 } S(1) = 2, S\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}, S(2) = \frac{9}{4},$$

当 $\lambda = 1$ 时, $\triangle AOB$ 的面积取得最小值 2, 当 $\lambda = \frac{1}{3}$ 时,

$$\triangle AOB \text{ 的面积取得最大值 } \frac{8}{3}.$$

$$\therefore \triangle AOB \text{ 面积的取值范围是 } \left[2, \frac{8}{3}\right].$$

【点评】 本题主要考查了双曲线的标准方程和直线与圆锥曲线的综合问题. 考查了学生综合分析问题的能力.