

# 1992 年山东高考文科数学真题及答案

一、选择题（共 18 小题，每小题 3 分，满分 54 分）

1. (3 分)  $\frac{\log_8 9}{\log_2 3}$  的值是 ( )

- A.  $\frac{2}{3}$                       B. 1                      C.  $\frac{3}{2}$                       D. 2

2. (3 分) 已知椭圆  $\sqrt{1+\tan^2 \alpha}$  上的一点 P 到椭圆一个焦点的距离为 3，则 P 到另一焦点距离为 ( )

- A. 9                      B. 7                      C. 5                      D. 3

3. (3 分) 如果函数  $y=\sin(\omega x)\cos(\omega x)$  的最小正周期是  $4\pi$ ，那么常数  $\omega$  为 ( )

- A. 4                      B. 2                      C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{1}{4}$

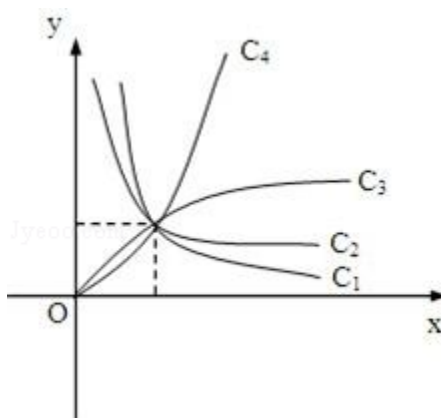
4. (3 分) 在  $(\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^8$  的二项展开式中，常数项等于 ( )

- A.  $\frac{3}{2}$                       B. -7                      C. 7                      D.  $-\frac{3}{2}$

5. (3 分) 已知轴截面是正方形的圆柱的高与球的直径相等，则圆柱的全面积与球的表面积之比是 ( )

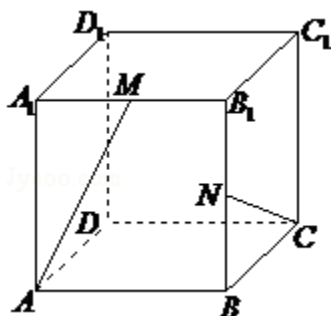
- A. 6: 5                      B. 5: 4                      C. 4: 3                      D. 3: 2

6. (3 分) 图中曲线是幂函数  $y=x^n$  在第一象限的图象. 已知 n 取  $\pm 2, \pm \frac{1}{2}$  四个值，则相应



于曲线  $c_1, c_2, c_3, c_4$  的  $n$  依次为 ( )





- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{10}}{10}$       C.  $\frac{3}{5}$       D.  $\frac{2}{5}$

15. (3分) 已知复数  $z$  的模为 2, 则  $|z - i|$  的最大值为 ( )

- A. 1      B. 2      C.  $\sqrt{5}$       D. 3

16. (3分) 函数  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  的反函数 ( )

- A. 是奇函数, 它在  $(0, +\infty)$  上是减函数  
 B. 是偶函数, 它在  $(0, +\infty)$  上是减函数  
 C. 是奇函数, 它在  $(0, +\infty)$  上是增函数  
 D. 是偶函数, 它在  $(0, +\infty)$  上是增函数

17. (3分) 如果函数  $f(x) = x^2 + bx + c$  对任意实数  $t$  都有  $f(2+t) = f(2-t)$ , 那么 ( )

- A.  $f(2) < f(1)$     B.  $f(1) < f(2)$     C.  $f(2) < f(4)$     D.  $f(4) < f(2)$   
 $< f(4)$        $< f(4)$        $< f(1)$        $< f(1)$

18. (3分) 长方体的全面积为 11, 十二条棱长度之和为 24, 则这个长方体的一条对角线长为 ( )

- A.  $2\sqrt{3}$       B.  $\sqrt{14}$       C. 5      D. 6

二、填空题 (共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

19. (3分) (2009·金山区二模)  $\lim_{n \rightarrow \infty} [\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{3^n}]$  的值为

\_\_\_\_\_.

20. (3分) 已知  $\alpha$  在第三象限且  $\tan \alpha = 2$ , 则  $\cos \alpha$  的值是

\_\_\_\_\_.

21. (3分) 方程  $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = 1$  的解是\_\_\_\_\_.

22. (3分) 设含有 10 个元素的集合的全部子集数为 S, 其中由 3 个元素组成的子集数为 T, 则  $\frac{T}{S}$  的值为\_\_\_\_\_.

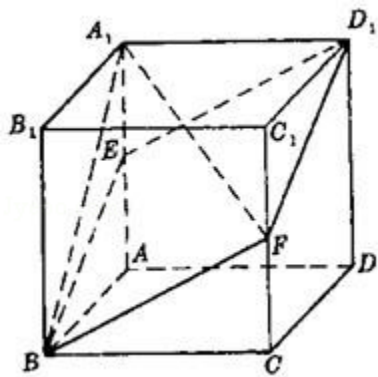
23. (3分) 焦点为  $F_1(-2, 0)$  和  $F_2(6, 0)$ , 离心率为 2 的双曲线的方程是\_\_\_\_\_.

三、解答题 (共 5 小题, 满分 51 分)

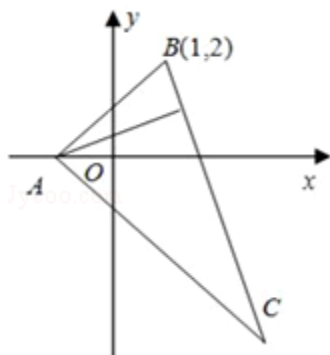
24. (9分) 求  $\sin^2 20^\circ + \cos^2 80^\circ + \sin 20^\circ \cos 80^\circ$  的值.

25. (10分) 设  $z \in \mathbb{C}$ , 解方程  $z - 2|z| = -7 + 4i$ .

26. (10分) 如图, 已知  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  是棱长为 a 的正方体, E、F 分别为棱  $AA_1$  与  $CC_1$  的中点, 求四棱锥的  $A_1 - EBF D_1$  的体积.



27. (10分) 在  $\triangle ABC$  中, 已知 BC 边上的高所在直线的方程为  $x - 2y + 1 = 0$ ,  $\angle A$  的平分线所在直线的方程为  $y = 0$ . 若点 B 的坐标为  $(1, 2)$ , 求点 C 的坐标.



28. (12分) 设等差数列  $\{a_n\}$  的前 n 项和为  $S_n$ . 已知  $a_3 = 12$ ,  $S_{12} > 0$ ,  $S_{13} < 0$ .

(1) 求公差 d 的取值范围.

(2) 指出  $S_1, S_2, \dots, S_{12}$  中哪一个值最大, 并说明理由.

## 参考答案

一、选择题（共 18 小题，每小题 3 分，满分 54 分）

1. (3 分)  $\frac{\log_8 9}{\log_2 3}$  的值是 ( )
- A.  $\frac{2}{3}$                       B. 1                      C.  $\frac{3}{2}$                       D. 2

考点：对数的运算性质.

分析：根据 , 从而得到答案.

解答：

$$\text{解：} \frac{\log_8 9}{\log_2 3} = \frac{\frac{2}{3} \log_2 3}{\log_2 3} = \frac{2}{3}.$$

故选 A.

点评：本题考查对数的运算性质.

2. (3 分) 已知椭圆  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  上的一点 P 到椭圆一个焦点的距离为 3, 则 P 到另一焦点距离为 ( )
- A. 9                      B. 7                      C. 5                      D. 3

考点：椭圆的简单性质；椭圆的定义.

专题：综合题.

分析：由椭圆方程找出 a 的值, 根据椭圆的定义可知椭圆上的点到两焦点的距离之和为常数 2a, 把 a 可求出常数的值得到 P 到两焦点的距离之和, 由 P 到一个焦点的距离为 3, 求出 P 到另一焦点可.

解答：

$$\text{解：由椭圆 } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1, \text{ 得 } a=5,$$

则  $2a=10$ , 且点 P 到椭圆一焦点的距离为 3,

由定义得点 P 到另一焦点的距离为  $2a - 3 = 10 - 3 = 7$ .

故选 B

点评：此题考查学生掌握椭圆的定义及简单的性质, 是一道中档题.

3. (3 分) 如果函数  $y = \sin(\omega x) \cos(\omega x)$  的最小正周期是  $4\pi$ , 那么常数  $\omega$  为 ( )
- A. 4                      B. 2                      C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{1}{4}$

考点：二倍角的正弦.

分析：逆用二倍角正弦公式，得到  $y=Asin(\omega x+\phi)+b$  的形式，再利用正弦周期公式和周期是求出  $\omega$

解答：

$$\text{解：} \because y = \sin(\omega x) \cos(\omega x) = \frac{1}{2} \sin(2\omega x),$$

$$\therefore T = 2\pi \div 2\omega = 4\pi$$

$$\therefore \omega = \frac{1}{4},$$

故选 D

点评：二倍角公式是高考中常考到的知识点，特别是余弦角的二倍角公式，对它们正用、逆用、变形本题还考的周期的公式求法，记住公式，是解题的关键，注意  $\omega$  的正负，要加绝对值.

4. (3分) 在  $(\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^8$  的二项展开式中，常数项等于 ( )

A.  $\frac{3}{2}$

B. -7

C. 7

D.  $-\frac{3}{2}$

考点：二项式定理.

专题：计算题.

分析：利用二项展开式的通项公式求出展开式的通项，令  $x$  的指数为 0，求出  $r$  代入通项求出常数项.

解答：

解：  $(\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^8$  的二项展开式的通项公式为

$$T_{r+1} = C_8^r (\frac{x}{2})^{8-r} \cdot (-x^{-\frac{1}{3}})^r$$

$$= \frac{(-1)^r C_8^r}{2^{8-r}} \cdot x^{8-\frac{4}{3}r}$$

$$\text{令 } 8 - \frac{4}{3}r = 0 \text{ 得 } r=6, \text{ 所以 } r=6 \text{ 时, 得二项展开式的常数项为 } T_7 = \frac{(-1)^6 C_8^6}{2^{8-6}} = 7.$$

故选 C.

点评：本题考查利用二项展开式的通项公式解决二项展开式的特定项问题.

5. (3分) 已知轴截面是正方形的圆柱的高与球的直径相等，则圆柱的全面积与球的表面积之比是 ( )

A. 6: 5

B. 5: 4

C. 4: 3

D. 3: 2

考点：旋转体（圆柱、圆锥、圆台）.

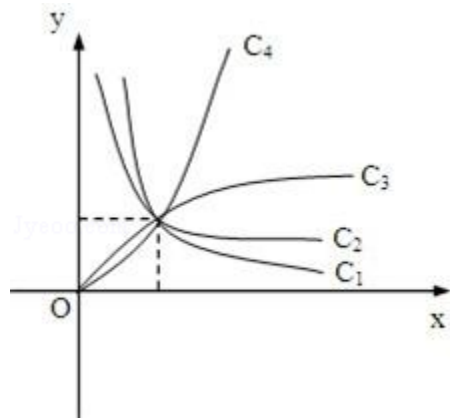
专题：计算题.

分析：设圆柱的底面半径，求出圆柱的全面积以及球的表面积，即可推出结果.

解答： 解：设圆柱的底面半径为  $r$ ，则圆柱的全面积是： $2\pi r^2 + 2r\pi \times 2r = 6\pi r^2$   
 球的全面积是： $4\pi r^2$ ，所以圆柱的全面积与球的表面积之比： $3:2$   
 故选 D.

点评： 本题考查旋转体的表面积，是基础题.

6. (3分) 图中曲线是幂函数  $y=x^n$  在第一象限的图象. 已知  $n$  取  $\pm 2, \pm \frac{1}{2}$  四个值, 则相应



于曲线  $c_1, c_2, c_3, c_4$  的  $n$  依次为 ( )

- A.  $-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$     B.  $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2, 2$     C.  $-\frac{1}{2}, -2, 2, \frac{1}{2}$     D.  $\frac{1}{2}, 2, -2, -\frac{1}{2}$

考点： 幂函数的图像.

专题： 阅读型.

分析：

由题中条件：“ $n$  取  $\pm 2, \pm \frac{1}{2}$  四个值”，依据幂函数  $y=x^n$  的性质，在第一象限内的图象特征可

解答： 根据幂函数  $y=x^n$  的性质，在第一象限内的图象， $n$  越大，递增速度越快，

故曲线  $c_1$  的  $n=-2$ ，曲线  $c_2$  的  $n=-\frac{1}{2}$ ， $c_3$  的  $n=\frac{1}{2}$ ，

曲线  $c_4$  的  $n=2$ ，故依次填  $-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$ .

故选 A.

点评： 幂函数是重要的基本初等函数模型之一. 学习幂函数重点是掌握幂函数的图形特征，即图象与函数的图象、性质，把握幂函数的关键点  $(1, 1)$  和利用直线  $y=x$  来刻画其它幂函数在第一象限

7. (3分) 若  $\log_a 2 < \log_b 2 < 0$ ，则 ( )

- A.  $0 < a < b < 1$     B.  $0 < b < a < 1$     C.  $a > b > 1$     D.  $b > a > 1$

考点： 对数函数图象与性质的综合应用.

专题： 计算题.

分析：

利用对数的换底公式，将题中条件：“ $\log_a 2 < \log_b 2 < 0$ ，”转化成同底数对数进行比较即可.

解答: 解:  $\because \log_a 2 < \log_b 2 < 0$ ,  
由对数换底公式得:

$$\therefore \frac{1}{\log_2 a} < \frac{1}{\log_2 b} < 0$$

$\therefore 0 > \log_2 a > \log_2 b$   
 $\therefore$  根据对数的性质得:  
 $\therefore 0 < b < a < 1$ .

故选 B.

点评: 本题主要考查对数函数的性质, 对数函数是许多知识的交汇点, 是历年高考的必考内容, 在高考中: 定义域、值域、图象、对数方程、对数不等式、对数函数的主要性质(单调性等)及这些性质的运用.

8. (3分) 原点关于直线  $8x+6y=25$  的对称点坐标为 ( )

- A.  $(2, \frac{3}{2})$       B.  $(\frac{25}{8}, \frac{25}{6})$       C. (3, 4)      D. (4, 3)

考点: 中点坐标公式.

专题: 综合题.

分析: 设出原点与已知直线的对称点 A 的坐标 (a, b), 然后根据已知直线是线段 AO 的垂直平分线, 斜率为 -1 且 AO 的中点在已知直线上分别列出两个关于 a 与 b 的方程, 联立两个方程即可求出 a, b 写出 A 的坐标即可.

解答:

解: 设原点关于直线  $8x+6y=25$  的对称点坐标为 A (a, b), 直线  $8x+6y=25$  的斜率  $k = -\frac{4}{3}$ ,

因为直线 OA 与已知直线垂直, 所以  $k_{OA} = \frac{3}{4} = \frac{b}{a}$ , 即  $3a=4b$ ①;

且 AO 的中点 B 在已知直线上,  $B(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ , 代入直线  $8x+6y=25$  得:  $4a+3b=25$ ②,  
联立①②解得:  $a=4, b=3$ . 所以 A 的坐标为 (4, 3).

故选 D.

点评: 此题考查学生掌握两直线垂直时斜率所满足的关系, 利用运用中点坐标公式化简求值, 是一道

9. (3分) 在四棱锥的四个侧面中, 直角三角形最多可有 ( )

- A. 1个      B. 2个      C. 3个      D. 4个

考点: 棱锥的结构特征.

专题: 作图题.

分析: 借助长方体的一个顶点画出图形, 不难解答本题.

解答： 解：如图底面是矩形，一条侧棱垂直底面，那么它的四个侧面都是直角三角形。故选 D.



点评： 本题考查棱锥的结构特征，考查空间想象能力，要求学生心中有图，是基础题.

10. (3分) 圆心在抛物线  $y^2=2x$  上，且与  $x$  轴和该抛物线的准线都相切的一个圆的方程是 ( )

- A.  $x^2+y^2 - x - 2y - \frac{1}{4}=0$     B.  $x^2+y^2+x - 2y+1=0$     C.  $x^2+y^2 - x - 2y+1=0$     D.  $x^2+y^2 - x - 2y + \frac{1}{4}=0$

考点： 圆的一般方程.

分析： 所求圆圆心在抛物线  $y^2=2x$  上，且与  $x$  轴和该抛物线的准线都相切，不难由抛物线的定义知道，可得结果.

解答： 解：圆心在抛物线  $y^2=2x$  上，且与  $x$  轴和该抛物线的准线都相切的一个圆的方程，以及抛物线的定义可知，所求圆的圆心的横坐标  $x=\frac{1}{2}$ ，即圆心  $(\frac{1}{2}, 1)$ ，半径是 1，所以排除 A、B、C. 故选 D.

点评： 本题考查圆的方程，抛物线的定义，考查数形结合、转化的数学思想，是中档题.

11. (3分) 在  $[0, 2\pi]$  上满足  $\sin x \geq \frac{1}{2}$  的  $x$  的取值范围是 ( )

- A.  $[0, \frac{\pi}{6}]$     B.  $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$     C.  $[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$     D.  $[\frac{5\pi}{6}, \pi]$

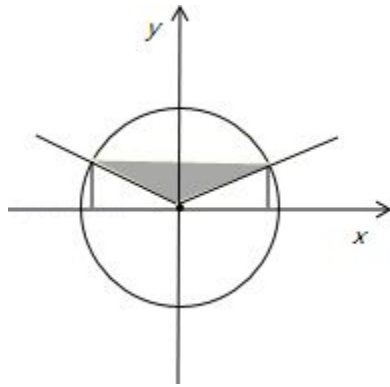
考点： 正弦函数的单调性.

专题： 计算题.

分析： 利用三角函数线，直接得到  $\sin x \geq \frac{1}{2}$  的  $x$  的取值范围，得到正确选项.

解答:

解: 在  $[0, 2\pi]$  上满足  $\sin x \geq \frac{1}{2}$ , 由三角函数线可知, 满足  $\sin x \geq \frac{1}{2}$  的解, 在图中阴影部分, 故选 B



点评:

本题是基础题, 考查三角函数的求值, 利用单位圆三角函数线, 或三角函数曲线, 都可以解好. 本题是特殊角的三角函数值, 可以直接求解.

12. (3分) 已知直线  $l_1$  和  $l_2$  的夹角平分线为  $y=x$ , 如果  $l_1$  的方程是  $ax+by+c=0$ , 那么直线  $l_2$  的方程为 ( )

- A.  $bx+ay+c=0$     B.  $ax - by+c=0$     C.  $bx+ay - c=0$     D.  $bx - ay+c=0$

考点: 与直线关于点、直线对称的直线方程.

专题: 计算题.

分析: 因为由题意知, 直线  $l_1$  和  $l_2$  关于直线  $y=x$  对称, 故把  $l_1$  的方程中的  $x$  和  $y$  交换位置即得  $l_2$  的方程.

解答: 解: 因为夹角平分线为  $y=x$ , 所以直线  $l_1$  和  $l_2$  关于直线  $y=x$  对称, 故  $l_2$  的方程为  $bx+ay+c=0$ . 故选 A.

点评: 本题考查求对称直线的方程的方法, 当两直线关于直线  $y=x$  对称时, 把其中一个方程中的  $x$  和  $y$  交换位置即得另一条直线的方程.

13. (3分) 如果  $\alpha, \beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  且  $\tan \alpha < \cot \beta$ , 那么必有 ( )

- A.  $\alpha < \beta$     B.  $\beta < \alpha$     C.  $\pi < \alpha + \beta < \frac{3}{2}\pi$   
 $\frac{1+\beta^{-x}}{1+\beta^x} = 3$      $\alpha + \beta > \frac{3}{2}\pi$

考点: 正切函数的单调性.

专题: 计算题.

分析: 先判断  $\tan \alpha < 0$  且  $\cot \beta < 0$ , 不等式即  $\tan \alpha \cdot \tan \beta > 1$ , 由  $\tan(\alpha + \beta) > 0$  及  $\pi < \alpha + \beta < \frac{3}{2}\pi$ .  
 $\frac{3\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{3}{2}\pi$ .

解答:

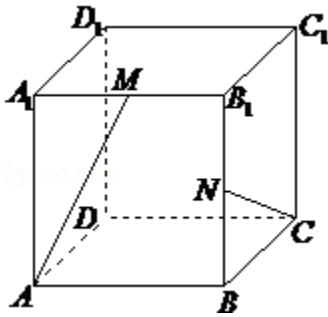
解:  $\because \alpha, \beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \therefore \tan \alpha < 0$  且  $\cot \beta < 0$ , 不等式  $\tan \alpha < \cot \beta$ , 即  $\tan \alpha < \tan \alpha \cdot \tan \beta > 1, \therefore \tan \alpha + \tan \beta < 0$ ,

$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} > 0$ , 又  $\pi < \alpha + \beta < 2\pi, \therefore \pi < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$ ,

故选 C.

点评: 本题考查正切值在各个象限内的符号, 以及正切函数的单调性.

14. (3分) 在棱长为1的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, M和N分别为  $A_1B_1$  和  $BB_1$  的中点, 那么直线AM与CN所成角的余弦值是 ( )



A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B.  $\frac{\sqrt{10}}{10}$

C.  $\frac{3}{5}$

D.  $\frac{2}{5}$

考点: 异面直线及其所成的角.

专题: 计算题.

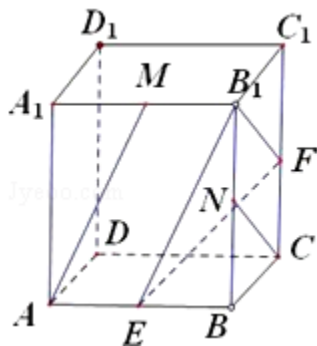
分析: 先通过平移将两条异面直线平移到同一个起点  $B_1$ , 得到的锐角或直角就是异面直线所成的角, 再利用余弦定理求出此角即可.

解答: 解: 如图, 将AM平移到  $B_1E$ , NC平移到  $B_1F$ , 则  $\angle EB_1F$  为直线AM与CN所成角

设边长为2, 则  $B_1E = B_1F = \sqrt{5}, EF = \sqrt{6}$ ,

$$\therefore \cos \angle EB_1F = \frac{2}{5},$$

故选 D.



点评: 本题主要考查了异面直线及其所成的角, 以及余弦定理的应用, 属于基础题.

15. (3分) 已知复数  $z$  的模为2, 则  $|z - i|$  的最大值为 ( )

A. 1

B. 2

C.  $\sqrt{5}$

D. 3

考点：复数的代数表示法及其几何意义.

分析：根据复数的几何意义，知 $|z|=2$ 对应的轨迹是圆心在原点半径为2的圆， $|z-i|$ 表示的是圆上一点到点 $(0, 1)$ 的距离，其最大值为圆上点 $(0, -2)$ 到点 $(0, 1)$ 的距离.

解答：解： $\because |z|=2$ ，则复数 $z$ 对应的轨迹是以圆心在原点，半径为2的圆，而 $|z-i|$ 表示的是圆上一点到点 $(0, 1)$ 的距离， $\therefore$ 其最大值为圆上点 $(0, -2)$ 到点 $(0, 1)$ 的距离，最大的距离为3.  
故选D.

点评：本题考查了复数及复数模的几何意义，数形结合可简化解答.

16. (3分) 函数  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  的反函数 ( )

- A. 是奇函数，它在 $(0, +\infty)$ 上是减函数
- B. 是偶函数，它在 $(0, +\infty)$ 上是减函数
- C. 是奇函数，它在 $(0, +\infty)$ 上是增函数
- D. 是偶函数，它在 $(0, +\infty)$ 上是增函数

考点：反函数；函数单调性的判断与证明；函数奇偶性的判断.

专题：计算题；综合题.

分析：先求函数的反函数，注意函数的定义域，然后判定反函数的奇偶性，单调性，即可得到选项.

解答：解：设  $e^x = t (t > 0)$ ,

$$\text{则 } 2y = t + \frac{1}{t},$$

$$t^2 - 2yt - 1 = 0,$$

解方程得  $t = y + \sqrt{y^2 + 1}$  负根已舍去，

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1},$$

对换  $X, Y$  同取对数得函数  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  的反函数：

$$g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

由于  $g(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -g(x)$ ，所以它是奇函数，并且它在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

故选C.

点评： 本题考查反函数的求法，函数的奇偶性，单调性的判定，是基础题.

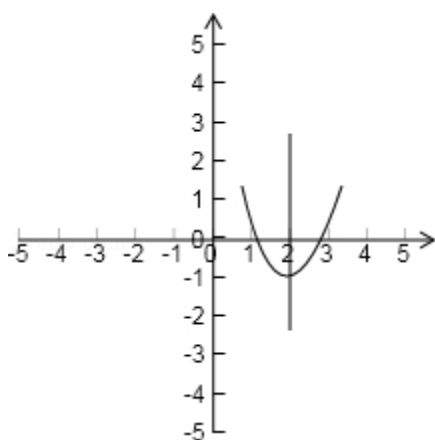
17. (3分) 如果函数  $f(x) = x^2 + bx + c$  对任意实数  $t$  都有  $f(2+t) = f(2-t)$ , 那么 ( )
- A.  $f(2) < f(1) < f(4)$     B.  $f(1) < f(2) < f(4)$     C.  $f(2) < f(1) < f(4)$     D.  $f(4) < f(2) < f(1)$

考点： 二次函数的图象；二次函数的性质.

专题： 压轴题；数形结合.

分析： 先从条件“对任意实数  $t$  都有  $f(2+t) = f(2-t)$ ”得到对称轴，然后结合图象判定函数值的大小.

解答： 解：  $\because$  对任意实数  $t$  都有  $f(2+t) = f(2-t)$   
 $\therefore f(x)$  的对称轴为  $x=2$ , 而  $f(x)$  是开口向上的二次函数故可画图观察  
可得  $f(2) < f(1) < f(4)$ ,  
故选 A.



点评： 本题考查了二次函数的图象，通过图象比较函数值的大小，数形结合有助于我们的解题，形象

18. (3分) 长方体的全面积为 11, 十二条棱长度之和为 24, 则这个长方体的一条对角线长为 ( )
- A.  $2\sqrt{3}$     B.  $\sqrt{14}$     C. 5    D. 6

考点： 棱柱的结构特征.

专题： 计算题；压轴题.

分析： 设出长方体的长、宽、高，表示出长方体的全面积为 11, 十二条棱长度之和为 24, 然后整理可求长度.

解答： 解： 设长方体的长、宽、高分别为  $a, b, c$ , 由题意可知,  
 $4(a+b+c) = 24 \cdots \text{①}$ ,  
 $2ab + 2bc + 2ac = 11 \cdots \text{②}$ ,  
由①的平方减去②可得  $a^2 + b^2 + c^2 = 25$ ,  
这个长方体的一条对角线长为: 5,  
故选 C.

点评： 本题考查长方体的有关知识，是基础题.

二、填空题（共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

19. (3 分) (2009·金山区二模)  $\lim_{n \rightarrow \infty} [\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{3^n}]$  的值为

   $\frac{1}{4}$   .

考点: 数列的极限.

专题: 计算题.

分析:

先利用等比求和公式求出数列  $\{(-1)^{n-1} \times \frac{1}{3^n}\}$  的前  $n$  项和, 再利用极限法则求极限.

解答:

$$\begin{aligned} \text{解: 不妨设 } S_n &= \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \dots + (-1)^{n-1} \times \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3} \times [1 - (-\frac{1}{3})^n]}{1 - (-\frac{1}{3})} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} \times [1 - (-\frac{1}{3})^n]}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

故答案为:  $\frac{1}{4}$ .

点评: 本题考查数列极限的知识, 是基础题, 要熟练掌握.

20. (3 分) 已知  $\alpha$  在第三象限且  $\tan \alpha = 2$ , 则  $\cos \alpha$  的值是

   $-\frac{\sqrt{5}}{5}$   .

考点: 同角三角函数基本关系的运用; 象限角、轴线角.

专题: 计算题.

分析: 利用  $\alpha$  在第三象限判断出  $\cos \alpha < 0$ , 进而利用同角三角函数的基本关系求得  $\cos \alpha$  的值.

解答: 解:  $\because \alpha$  在第三象限

$$\therefore \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 \alpha}} = -\sqrt{\frac{1}{1+4}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

故答案为:  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

点评: 本题主要考查了同角三角函数的基本关系的应用. 解题的关键是熟练记忆三角函数中的平方关系.

21. (3 分) 方程  $\frac{1+3^{-x}}{1+3^x} = 3$  的解是    $x = -1$   .

考点：有理数指数幂的化简求值.

分析：将方程两边乘以  $1+3^x$ ，令  $t=3^x$ ，然后移项、合并同类项，从而解出  $x$ .

解答：

$$\frac{1+3^{-x}}{1+3^x}=3$$

$$\text{解：} \because 1+3^x \neq 0,$$

$$\therefore 1+3^{-x}=3(1+3^x),$$

$$\text{令 } t=3^x,$$

$$\text{则 } 1+\frac{1}{t}=3+3t,$$

$$\text{解得 } t=\frac{1}{3},$$

$$\therefore x=-1,$$

故答案为： $x=-1$ .

点评：此题考查有理数指数幂的化简，利用换元法求解方程的根，是一道不错的题.

22. (3分) 设有 10 个元素的集合的全部子集数为  $S$ ，其中由 3 个元素组成的子集数为

$$T, \text{ 则 } \frac{T}{S} \text{ 的值为 } \underline{\frac{15}{128}}.$$

考点：子集与真子集.

专题：计算题；压轴题.

分析：先根据子集的定义，求集合的子集及其个数，子集即是指属于集合的部分或所有元素组成的集合.

解答：解： $\because$  含有 10 个元素的集合的全部子集数为  $2^{10}=1024$ ,

又： $\because$  其中由 3 个元素组成的子集数为  $C_{10}^3=120$ .

$$\therefore \text{则 } \frac{T}{S} \text{ 的值为 } \frac{120}{1024} = \frac{15}{128}.$$

$$\text{故填：} \frac{15}{128}.$$

点评：本题考查集合的子集个数问题，对于集合  $M$  的子集问题一般来说，若  $M$  中有  $n$  个元素，则集合有  $2^n$  个.

23. (3分) 焦点为  $F_1(-2, 0)$  和  $F_2(6, 0)$ ，离心率为 2 的双曲线的方程是

$$\underline{\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1}.$$

考点：双曲线的标准方程；双曲线的简单性质.

专题：计算题；压轴题.

分析：先由已知条件求出  $a, b, c$  的值，然后根据函数的平移求出双曲线的方程.

解答： 解：∵双曲线的焦点为  $F_1(-2, 0)$  和  $F_2(6, 0)$ ，离心率为 2，

$$\therefore 2c = 6 - (-2) = 8, c = 4, \frac{c}{a} = 2, a = 2, b^2 = 16 - 4 = 12,$$

$$\therefore \text{双曲线的方程是 } \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

$$\text{故答案为: } \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

点评： 本题考查双曲线方程的求法，解题时要注意函数的平移变换，合理地选取公式。

### 三、解答题（共 5 小题，满分 51 分）

24. （9 分）求  $\sin^2 20^\circ + \cos^2 80^\circ + \sin 20^\circ \cos 80^\circ$  的值.

考点： 三角函数恒等式的证明.

专题： 计算题.

分析： 见到平方式就降幂，见到乘积式就积化和差，将前二项用降幂公式，后两项积化和差，结合特殊函数值即可解决.

解答： 解：原式  $= \frac{1}{2}(1 - \cos 40^\circ) + \frac{1}{2}(1 + \cos 160^\circ) + \frac{3}{2}(\sin 100^\circ - \sin 20^\circ)$

$$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 160^\circ - \cos 40^\circ) + \frac{3}{2}\sin 100^\circ - \frac{3}{4}$$

$$= -\frac{1}{4}\sin 100^\circ \sin 60^\circ + \frac{3}{2}\sin 100^\circ$$

$$= \frac{1}{4}$$

故答案为  $\frac{1}{4}$ .

点评： 本题主要考查知识点：两角和与差、二倍角的三角函数.

25. （10 分）设  $z \in \mathbb{C}$ ，解方程  $z - 2|z| = -7 + 4i$ .

考点： 复数相等的充要条件.

专题： 计算题.

分析： 设  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) 代入方程，由实部和虚部相等列出方程组，求出方程组的解验证后，再

解答：

解：设  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )，依题意有  $x + yi - 2\sqrt{x^2 + y^2} = -7 + 4i$ ,

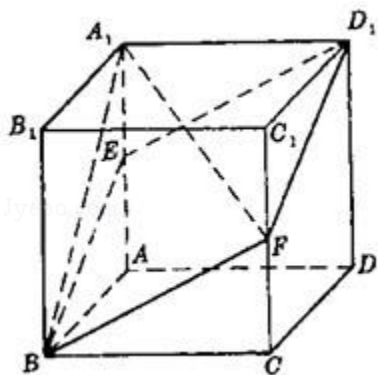
$$\text{由复数相等的定义得, } \begin{cases} x - 2\sqrt{x^2 + y^2} = -7 \\ y = 4. \end{cases} \text{ 解得 } y = 4, \text{ 且 } x - 2\sqrt{x^2 + 16} = -7 \text{ ①.}$$

解方程①并经检验得  $x_1 = 3, x_2 = \frac{5}{3}$ .

$$\therefore z_1 = 3 + 4i, z_2 = \frac{5}{3} + 4i.$$

点评： 本小题主要考查复数相等的条件及解方程的知识，考查了计算能力.

26. (10分) 如图，已知  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  是棱长为  $a$  的正方体， $E$ 、 $F$  分别为棱  $AA_1$  与  $CC_1$  的中点，求四棱锥的  $A_1 - EBF D_1$  的体积.



考点： 棱柱、棱锥、棱台的体积.

专题： 计算题；转化思想.

分析： 法一：判断四棱锥  $A_1 - EBF D_1$  的底面是菱形，连接  $A_1C_1$ 、 $EF$ 、 $BD_1$ ，说明  $A_1C_1$  到底面  $EBF D_1$  的距离  $S_{\text{菱形}EBF D_1}$  的高，求出底面  $S_{\text{菱形}EBF D_1}$ ，高的大小，即可得到棱锥的体积.

法二：三棱锥  $A_1 - EFB$  与三棱锥  $A_1 - EFD_1$  等底同高，棱锥  $V_{A_1 - EBF D_1}$  转化为  $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle EBA}$  可.

解答：

解：法一：  $\because EB=BF=FD_1=D_1E = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a,$

$\therefore$  四棱锥  $A_1 - EBF D_1$  的底面是菱形. (2分)

连接  $A_1C_1$ 、 $EF$ 、 $BD_1$ ，则  $A_1C_1 \parallel EF$ .

根据直线和平面平行的判定定理， $A_1C_1$  平行于  $A_1 - EBF D_1$  的底面，

从而  $A_1C_1$  到底面  $EBF D_1$  的距离就是  $A_1 - EBF D_1$  的高 (4分)

设  $G$ 、 $H$  分别是  $A_1C_1$ 、 $EF$  的中点，连接  $D_1G$ 、 $GH$ ，则  $FH \perp HG$ ， $FH \perp HD_1$

根据直线和平面垂直的判定定理，有  $FH \perp$  平面  $HGD_1$ ，

又，四棱锥  $A_1 - EBF D_1$  的底面过  $FH$ ，根据两平面垂直的判定定理，

有  $A_1 - EBF D_1$  的底面  $\perp$  平面  $HGD_1$ . 作  $GK \perp HD_1$  于  $K$ ，

根据两平面垂直的性质定理，有  $GK$  垂直于  $A_1 - EBF D_1$  的底面. (6分)

$\because$  正方体的对角面  $AA_1CC_1$  垂直于底面  $A_1B_1C_1D_1$ ， $\therefore \angle HGD_1 = 90^\circ$ .

在  $Rt\triangle HGD_1$  内， $GD_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ， $HG = \frac{1}{2}a$ ， $HD_1 = \frac{BD_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ .

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot GK = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ，从而  $GK = \frac{\sqrt{6}}{6}a$ . (8分)

$\therefore V_{A_1 - EBF D_1} = \frac{1}{3} S_{\text{菱形}EBF D_1} \cdot GK = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot EF \cdot BD_1 \cdot GK$

$$= \frac{1}{6} \cdot \sqrt{2}a \cdot \sqrt{3}a \cdot \frac{\sqrt{6}}{6}a = \frac{1}{6}a^3 \quad (10 \text{分})$$

解法二： $\because EB=BF=FD_1=D_1E = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a,$

$\therefore$ 四棱锥  $A_1 - EBF D_1$  的底面是菱形. (2分)

连接  $EF$ , 则  $\triangle EFB \cong \triangle EFD_1$ .

$\therefore$ 三棱锥  $A_1 - EFB$  与三棱锥  $A_1 - EFD_1$  等底同高,

$$\therefore V_{A_1 - EFB} = V_{A_1 - EFD_1}.$$

$$\therefore V_{A_1 - EBF D_1} = 2V_{A_1 - EFB}. \quad (4 \text{分})$$

$$\text{又 } V_{A_1 - EFB} = V_{F - EB A_1},$$

$$\therefore V_{A_1 - EBF D_1} = 2V_{F - EB A_1}, \quad (6 \text{分})$$

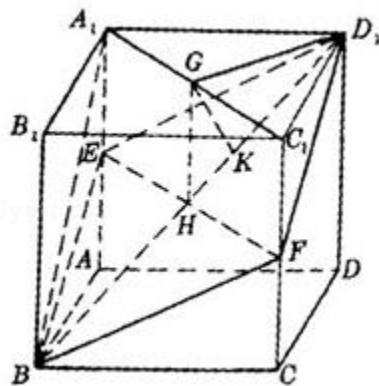
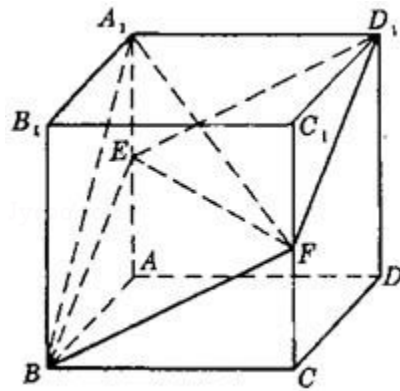
$\because CC_1 \parallel$  平面  $ABB_1A_1$ ,

$\therefore$ 三棱锥  $F - EB A_1$  的高就是  $CC_1$  到

平面  $ABB_1A_1$  的距离, 即棱长  $a$ . (8分)

又  $\triangle EB A_1$  边  $EA_1$  上的高为  $a$ .

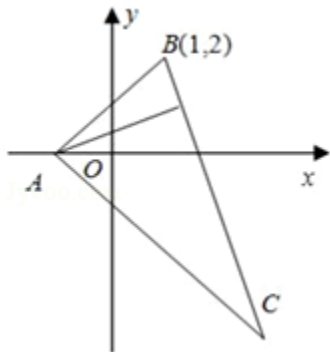
$$\therefore V_{A_1 - EBF D_1} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle EB A_1} \cdot a = \frac{1}{6}a^3. \quad (10 \text{分})$$



点评:

本小题主要考查直线与直线, 直线与平面, 平面与平面的位置关系, 以及空间想象能力和逻辑

27. (10分) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知BC边上的高所在直线的方程为 $x - 2y + 1 = 0$ ,  $\angle A$ 的平分线所在直线的方程为 $y = 0$ . 若点B的坐标为 $(1, 2)$ , 求点C的坐标.



考点: 直线的点斜式方程.

专题: 压轴题.

分析: 根据三角形的性质解A点, 再解出AC的方程, 进而求出BC方程, 解出C点坐标. 逐步解答.

解答: 解: 点A为 $y = 0$ 与 $x - 2y + 1 = 0$ 两直线的交点,

$\therefore$ 点A的坐标为 $(-1, 0)$ .

$$\therefore k_{AB} = \frac{2 - 0}{1 - (-1)} = 1.$$

又 $\because \angle A$ 的平分线所在直线的方程是 $y = 0$ ,

$\therefore k_{AC} = -1$ .

$\therefore$ 直线AC的方程是 $y = -x - 1$ .

而BC与 $x - 2y + 1 = 0$ 垂直,  $\therefore k_{BC} = -2$ .

$\therefore$ 直线BC的方程是 $y - 2 = -2(x - 1)$ .

由 $y = -x - 1$ ,  $y = -2x + 4$ ,

解得 $C(5, -6)$ .

故选C $(5, -6)$ .

点评: 本题可以借助图形帮助理解题意, 将条件逐一转化求解, 这是上策.

28. (12分) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前n项和为 $S_n$ . 已知 $a_3 = 12$ ,  $S_{12} > 0$ ,  $S_{13} < 0$ .

(1) 求公差d的取值范围.

(2) 指出 $S_1, S_2, \dots, S_{12}$ 中哪一个值最大, 并说明理由.

考点: 等差数列的前n项和; 数列的函数特性.

专题: 计算题; 压轴题.

分析: (1) 由 $S_{12} > 0$ ,  $S_{13} < 0$ , 利用等差数列的前n项和的公式化简分别得到①和②, 然后利用等差公式化简 $a_3$ 得到首项与公差的关系式, 解出首项分别代入到①和②中得到关于d的不等式组, 组的解集即可得到d的范围;

(2) 根据(1)中d的范围可知d小于0, 所以此数列为递减数列, 在n取1到12中的正整数有一项大于0, 它的后一项小于0, 则这项与之前的各项相加就最大, 根据 $S_{12} > 0$ ,  $S_{13} < 0$ , 和的性质及前n项和的公式化简可得 $S_1, S_2, \dots, S_{12}$ 中最大的项.

解答:

解: (1) 依题意, 有  $S_{12}=12a_1+\frac{12\times(12-1)}{2}\cdot d>0$ ,

$$S_{13}=13a_1+\frac{13\times(13-1)}{2}\cdot d<0$$

$$\text{即} \begin{cases} 2a_1+11d>0 \textcircled{1} \\ a_1+6d<0 \textcircled{2} \end{cases}$$

由  $a_3=12$ , 得  $a_1=12-2d$ ③,

将③式分别代①、②式, 得  $\begin{cases} 24+7d>0 \\ 3+d<0 \end{cases}$

$$\therefore -\frac{24}{7}<d<-3.$$

(2) 由  $d<0$  可知  $a_1>a_2>a_3>\dots>a_{12}>a_{13}$ .

因此, 若在  $1\leq n\leq 12$  中存在自然数  $n$ , 使得  $a_n>0$ ,  $a_{n+1}<0$ ,

则  $S_n$  就是  $S_1, S_2, \dots, S_{12}$  中的最大值.

$$\Rightarrow \begin{cases} 6(a_1+a_{12})=6(a_6+a_7)>0 \\ \frac{13}{2}(a_1+a_{13})=\frac{26a_7}{2}=13a_7<0, \end{cases}$$

$$\therefore a_6>0, a_7<0,$$

故在  $S_1, S_2, \dots, S_{12}$  中  $S_6$  的值最大.

点评:

本小题考查数列、不等式及综合运用有关知识解决问题的能力, 是一道中档题.