

1991 年湖南高考文科数学真题及答案

考生注意：这份试卷共三道大题(26 个小题)．满分 120 分．

一、选择题：本大题共15小题；每小题3分，共45分．在每小题给出的四个选项中，只有一是符合题目要求的．把所选项前的字母填在题后括号内．

- (1) 已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ，并且 α 是第二象限的角，那么 $\operatorname{tg} \alpha$ 的值等于 ()
(A) $-\frac{4}{3}$ (B) $-\frac{3}{4}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{3}$
- (2) 焦点在 $(-1, 0)$ ，顶点在 $(1, 0)$ 的抛物线方程是 ()
(A) $y^2=8(x+1)$ (B) $y^2=-8(x+1)$
(C) $y^2=8(x-1)$ (D) $y^2=-8(x-1)$
- (3) 函数 $y=\cos^4 x - \sin^4 x$ 的最小正周期是 ()
(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π
- (4) $P(2, 5)$ 关于直线 $x+y=0$ 的对称点的坐标是 ()
(A) $(5, 2)$ (B) $(2, -5)$ (C) $(-5, -2)$ (D) $(-2, -5)$
- (5) 如果把两条异面直线看成“一对”，那么六棱锥的棱所在的12条直线中，异面直线共有 ()
(A) 12对 (B) 24对 (C) 36对 (D) 48对
- (6) 函数 $y=\sin(2x+\frac{5\pi}{2})$ 的图像的一条对称轴的方程是 ()
(A) $x=-\frac{\pi}{2}$ (B) $x=-\frac{\pi}{4}$
(C) $x=\frac{\pi}{8}$ (D) $x=\frac{5\pi}{4}$
- (7) 如果三棱锥 $S-ABC$ 的底面是不等边三角形，侧面与底面所成的二面角都相等，且顶点 S 在底面的射影 O 在 $\triangle ABC$ 内，那么 O 是 $\triangle ABC$ 的 ()
(A) 垂心 (B) 重心 (C) 外心 (D) 内心
- (8) 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，且 $a_n > 0$ ， $a_2 a_4 + 2 a_3 a_5 + a_4 a_6 = 25$ ，那么 $a_3 + a_5$ 的值等于 ()
(A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20

(9) 已知函数 $y = \frac{6x+5}{x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$, 且 $x \neq 1$), 那么它的反函数为 ()

(A) $y = \frac{6x+5}{x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$, 且 $x \neq 1$)

(B) $y = \frac{x+5}{x-6}$ ($x \in \mathbb{R}$, 且 $x \neq 6$)

(C) $y = \frac{x-1}{6x+5}$ ($x \in \mathbb{R}$, 且 $x \neq -\frac{5}{6}$)

(D) $y = \frac{x-6}{x+5}$ ($x \in \mathbb{R}$, 且 $x \neq -5$)

(10) 从4台甲型和5台乙型电视机中任意取出3台, 其中至少要有甲型与乙型电视机各1台, 则不同的取法共有 ()

- (A) 140种 (B) 84种 (C) 70种 (D) 35种

(11) 设甲、乙、丙是三个命题. 如果甲是乙的必要条件; 丙是乙的充分条件但不是乙的必要条件, 那么 ()

(A) 丙是甲的充分条件, 但不是甲的必要条件

(B) 丙是甲的必要条件, 但不是甲的充分条件

(C) 丙是甲的充要条件

(D) 丙不是甲的充分条件, 也不是甲的必要条件

(12) $\lim_{n \rightarrow \infty} [n(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{5}) \cdots (1 - \frac{1}{n+2})]$ 的值等于 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(13) 如果 $AC < 0$ 且 $BC < 0$, 那么直线 $Ax + By + C = 0$ 不通过 ()

- (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

(14) 如果奇函数 $f(x)$ 在区间 $[3, 7]$ 上是增函数且最小值为5, 那么 $f(x)$ 在区间 $[-7, -3]$ 上是 ()

(A) 增函数且最小值为-5 (B) 增函数且最大值为-5

(C) 减函数且最小值为-5 (D) 减函数且最大值为-5

(15) 圆 $x^2 + 2x + y^2 + 4y - 3 = 0$ 上到直线 $x + y + 1 = 0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点共有 ()

- (A) 1个 (B) 2个 (C) 3个 (D) 4个

二、填空题: 本大题共5小题; 每小题3分, 共15分. 把答案填在题中横线上.

(16) 双曲线以直线 $x=-1$ 和 $y=2$ 为对称轴, 如果它的一个焦点在 y 轴上, 那么它的另一焦点的坐标是_____.

(17) 已知 $\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 则 $\sin 2(x - \frac{\pi}{4}) =$ _____.

(18) 不等式 $\lg(x^2+2x+2) < 1$ 的解集是_____.

(19) 在 $(ax+1)^7$ 的展开式中, x^3 的系数是 x^2 的系数与 x^4 的系数的等差中项, 若实数 $a > 1$, 那么 $a =$ _____.

(20) 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知顶点 A 上三条棱长分别是 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2$. 如果对角线 AC_1 与过点 A 的相邻三个面所成的角分别是 α, β, γ , 那么 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma =$ _____.

三、解答题: 本大题共6小题; 共60分.

(21) (本小题满分8分)

求函数 $y = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x$ 的最大值.

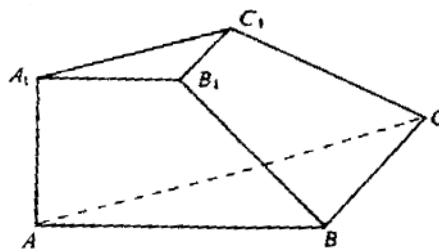
(22) (本小题满分8分)

已知复数 $z = 1 + i$, 求复数 $\frac{z^2 - 3z + 6}{z + 1}$ 的模和辐角

的主值.

(23) (本小题满分10分)

如图, 在三棱台 $A_1B_1C_1-ABC$ 中, 已知 $A_1A \perp$ 底面 ABC , $A_1A = A_1B_1 = B_1C_1 = a$, $B_1B \perp BC$, 且 B_1B 和底面 ABC 所成的角 45° , 求这个棱台的体积.



(24) (本小题满分10分)

设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $b_n = (\frac{1}{2})^{a_n}$. 已知 $b_1 + b_2 + b_3 = \frac{21}{8}$, $b_1 b_2 b_3 = \frac{1}{8}$. 求等差数列的通项 a_n .

(25) (本小题满分12分)

设 $a > 0$, $a \neq 1$, 解关于 x 的不等式 $a^{x^4-2x^2} > (\frac{1}{a})^{a^2}$.

(26) (本小题满分12分)

已知椭圆的中心在坐标原点 O ，焦点在坐标轴上，直线 $y=x+1$ 与该椭圆相交于 P 和 Q ，且 $OP \perp OQ$ ， $|PQ| = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 。求椭圆的方程。

参考答案及评分标准

说明：

一. 本解答指出了每题所要考查的主要知识和能力，并给出了一种或几种较为常见的解法，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容参照评分标准制定相应评分细则。

二. 每题都要评阅到底，不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅。当考生的解答在某一步出现错误，影响了后继部分时，如果该步以后的解答未改变这一题的内容和难度时，可视影响的程度决定后面部分的给分，但不得超过后面部分应给分数的一半；如果这一步以后的解答有较严重的错误，就不给分。

三. 为了阅卷方便，本试题解答中的推导步骤写得较为详细，允许考生在解题过程中合理省略非关键性的推导步骤。

四. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

五. 只给整数分数。

一. 选择题. 本题考查基本知识和基本运算. 每小题3分，满分45分.

(1)A (2)D (3)B (4)C (5)B (6)A (7)D (8)A (9)B (10)C (11)A (12)C
(13)C (14)B (15)C

二. 填空题. 本题考查基本知识基本运算. 每小题3分，满分15分.

(16) $(-2, 2)$ (17) $2 - \sqrt{5}$ (18) $\{x | -4 < x < 2\}$ (19) $1 + \frac{\sqrt{10}}{5}$ (20)

2

三. 解答题

(21) 本小题考查三角函数式的恒等变形及三角函数的性质. 满分8分.

解: $y = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x$ ——2分

分

$= 1 + \sin 2x + (1 + \cos 2x)$ ——4分

$= 2 + \sin 2x + \cos 2x$

$= 2 + \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$. ——6分

当 $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 1$ 时, 函数 y 有最大值, 这时 y 的最大值等于 $2 + \sqrt{2}$. ——8分

注: 没有说明 “当 $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 1$ 时, 函数 y 有最大值” 而得出正确答案, 不扣分.

(22) 本小题考查复数基本概念和运算能力. 满分8分.

解: $\frac{z^2 - 3z + 6}{z + 1} = \frac{(1 + i)^2 - 3(1 + i) + 6}{1 + i + 1}$

$= \frac{3 - i}{2 + i}$ ——2分

$= 1 - i$. ——4分

$1 - i$ 的模 $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. 因为 $1 - i$ 对应的点在第四象限且辐角的正切

$\text{tg } \theta = -1$, 所以辐角的主值 $\theta = \frac{7}{4} \pi$. ——8分

(23) 本小题考查直线与直线, 直线与平面的位置关系, 以及逻辑推理和空间想象能力. 满分10分.

解: 因为 $A_1 A \perp$ 底面 ABC , 所以根据平面的垂线的定义有 $A_1 A \perp BC$. 又 $BC \perp BB_1$, 且棱 AA_1 和 BB_1 的延长线交于一点, 所以利用直线和平面垂直的判定定理可以推出 $BC \perp$ 侧面 $A_1 A B B_1$, 从而根据平面的垂线的定义又可得出 $BC \perp AB$.

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形, $\angle ABC = 90^\circ$. 并且 $\angle ABB_1$ 就是 BB_1 和底面 ABC 所成的角,

$\angle ABB_1 = 45^\circ$. ——3分

作 $B_1 D \perp AB$ 交 AB 于 D , 则 $B_1 D \parallel A_1 A$, 故 $B_1 D \perp$ 底面 ABC .

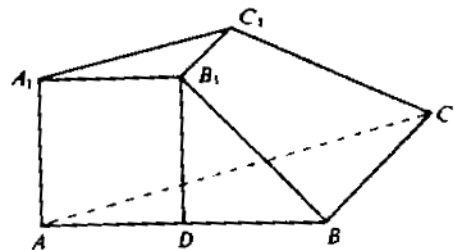
\therefore Rt $\triangle B_1 D B$ 中 $\angle D B B_1 = 45^\circ$,

$\therefore DB = D B_1 = A A_1 = a$,

$\therefore AB = 2a$.

——6分

由于棱台的两个底面相似, 故



$$\text{Rt}\triangle ABC \sim \text{Rt}\triangle A_1B_1C_1.$$

$$\therefore B_1C_1 = A_1B_1 = a, \quad AB = 2a,$$

$$\therefore BC = 2a.$$

$$\therefore S_{\text{上}} = \frac{1}{2} A_1B_1 \times B_1C_1 = \frac{a^2}{2}.$$

$$S_{\text{下}} = \frac{1}{2} AB \times BC = 2a^2. \quad \text{---8分}$$

$$V_{\text{棱台}} = \frac{1}{3} \cdot A_1A \cdot (S_{\text{上}} + \sqrt{S_{\text{上}} \cdot S_{\text{下}}} + S_{\text{下}})$$

$$= \frac{1}{3} \cdot a \cdot \left(\frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{2} \times 2a^2} + 2a^2 \right) = \frac{7}{6} a^3. \quad \text{---10分}$$

分

(24) 本小题考查等差数列, 等比数列的概念及运用方程(组)解决问题的能力. 满分10分.

解 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $a_n = a_1 + (n-1)d$.

$$\therefore b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{a_1 + (n-1)d}$$

$$b_1 b_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{a_1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{a_1 + 2d} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2(a_1 + d)} = b_2^2.$$

$$\text{由 } b_1 b_2 b_3 = \frac{1}{8}, \text{ 得 } b_2^3 = \frac{1}{8},$$

$$\text{解得 } b_2 = \frac{1}{2}. \quad \text{---3分}$$

代入已知条件

$$\begin{cases} b_1 b_2 b_3 = \frac{1}{8}, \\ b_1 + b_2 + b_3 = \frac{21}{8}. \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} b_1 b_3 = \frac{1}{4}, \\ b_1 + b_3 = \frac{17}{8}. \end{cases}$$

解这个方程组得 $b_1=2$, $b_3=\frac{1}{8}$ 或 $b_1=\frac{1}{8}$, $b_3=2$ ——6分

$\therefore a_1=-1, d=2$ 或 $a_1=3, d=-2$. ——8分

所以, 当 $a_1=-1, d=2$ 时

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 2n - 3.$$

当 $a_1=3, d=-2$ 时

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 5 - 2n. \quad \text{——10分}$$

(25) 本小题考查指数函数性质、解不等式及综合分析能力. 满分12分.

解法一 原不等式可写成 $a^{x^4-2x^2} > a^{-a^2}$. ① ——1分

根据指数函数性质, 分为两种情形讨论:

(I) 当 $0 < a < 1$ 时, 由①式得

$$x^4 - 2x^2 + a^2 < 0, \quad \text{②} \quad \text{——3分}$$

由于 $0 < a < 1$ 时, 判别式

$$\Delta = 4 - 4a^2 > 0,$$

所以②式等价于

$$\begin{cases} x^2 > 1 - \sqrt{1 - a^2}, & \text{③} \\ x^2 < 1 + \sqrt{1 - a^2}. & \text{④} \end{cases} \quad \text{——5分}$$

解③式得 $x < -\sqrt{1 - \sqrt{1 - a^2}}$ 或 $x > \sqrt{1 - \sqrt{1 - a^2}}$,

解④式得 $-\sqrt{1 + \sqrt{1 - a^2}} < x < \sqrt{1 + \sqrt{1 - a^2}}$. ——7分

所以, $0 < a < 1$ 时, 原不等式的解集为

$$\{x \mid -\sqrt{1 + \sqrt{1 - a^2}} < x < -\sqrt{1 - \sqrt{1 - a^2}}\} \cup \{x \mid \sqrt{1 - \sqrt{1 - a^2}} < x < \sqrt{1 + \sqrt{1 - a^2}}\}. \quad \text{——8分}$$

(II) 当 $a > 1$ 时, 由①式得

$$x^4 - 2x^2 + a^2 > 0, \quad \text{⑤} \quad \text{——9分}$$

由于 $a > 1$, 判别式 $\Delta < 0$, 故⑤式对任意实数 x 成立, 即得原不等式的解集为

$$\{x \mid -\infty < x < +\infty\}. \quad \text{——12分}$$

综合得

当 $0 < a < 1$ 时, 原不等式的解集为

$$\{x|-\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}} < x < -\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}\} \cup \{x|\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}} < x < \sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}\};$$

当 $a > 1$ 时, 原不等式的解集为

$$\{x|-\infty < x < +\infty\}.$$

解法二 原不等式可写成 $a^{x^4-2x^2} > a^{-a^2}$. ① ——1分

(I) 当 $0 < a < 1$ 时, 由①式得

$$x^4 - 2x^2 + a^2 < 0, \quad \text{②} \quad \text{——3分}$$

$$\text{分解因式得 } (x^2 - 1 + \sqrt{1-a^2})(x^2 - 1 - \sqrt{1-a^2}) < 0. \quad \text{③}$$

$$\text{即 } \begin{cases} x^2 - 1 + \sqrt{1-a^2} > 0, & \text{④} \\ x^2 - 1 - \sqrt{1-a^2} < 0; & \text{⑤} \end{cases}$$

$$\text{或 } \begin{cases} x^2 - 1 + \sqrt{1-a^2} < 0, & \text{⑥} \\ x^2 - 1 - \sqrt{1-a^2} > 0. & \text{⑦} \end{cases} \quad \text{——5分}$$

解由④、⑤组成的不等式组得

$$-\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}} < x < -\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}.$$

$$\text{或 } \sqrt{1-\sqrt{1-a^2}} < x < \sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}. \quad \text{——7分}$$

由⑥、⑦组成的不等式组解集为空集; 所以, $0 < a < 1$ 时, 原不等式的解集为

$$\{x|-\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}} < x < -\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}\} \cup \{x|\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}} < x < \sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}\};$$

——8分

(II) 当 $a > 1$ 时, 由①式得

$$x^4 - 2x^2 + a^2 > 0, \quad \text{⑧} \quad \text{——9分}$$

$$\text{配方得 } (x^2 - 1)^2 + a^2 - 1 > 0, \quad \text{⑨}$$

对任意实数 x , 不等式⑨都成立, 即 $a > 1$ 时, 原不等式的解集为

$$\{x|-\infty < x < +\infty\}. \quad \text{——12分}$$

综合得

当 $0 < a < 1$ 时, 原不等式的解集为

$$\{x|-\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}} < x < -\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}\} \cup \{x|\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}} < x < \sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}\};$$

当 $a > 1$ 时, 原不等式的解集为 $\{x|-\infty < x < +\infty\}$.

(26) 本小题考查椭圆的性质、两点的距离公式、两条直线垂直条件、二次方程根与系

数的关系及分析问题的能力. 满分 12 分.

解法一 设所求椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

依题意知, 点 P 、 Q 的坐标满足方程组

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, & \text{①} \\ y = x + 1. & \text{②} \end{cases}$$

将②式代入①式, 整理得

$$(a^2 + b^2)x^2 + 2a^2x + a^2(1 - b^2) = 0, \quad \text{③} \quad \text{---2}$$

分

设方程③的两个根分别为 x_1 , x_2 , 那么直线 $y = x + 1$ 与椭圆的交点为

$$P(x_1, x_1 + 1), Q(x_2, x_2 + 1). \quad \text{---3 分}$$

由题设 $OP \perp OQ$, $|PQ| = \frac{\sqrt{10}}{2}$, 可得

$$\begin{cases} \frac{x_1 + 1}{x_1} \cdot \frac{x_2 + 1}{x_2} = -1, \\ (x_2 - x_1)^2 + [(x_2 + 1) - (x_1 + 1)]^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2. \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} (x_1 + x_2) + 2x_1x_2 + 1 = 0, & \text{④} \\ 4(x_1 + x_2)^2 - 16x_1x_2 - 5 = 0. & \text{⑤} \end{cases} \quad \text{---6}$$

分

解这个方程组, 得

$$\begin{cases} x_1x_2 = \frac{1}{4}, \\ x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}; \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x_1x_2 = -\frac{1}{4}, \\ x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

根据根与系数的关系, 由③式得

$$(I) \begin{cases} \frac{2a^2}{a^2+b^2} = \frac{3}{2}, \\ \frac{a^2(1-b^2)}{a^2+b^2} = \frac{1}{4}; \end{cases} \quad \text{或} \quad (II) \begin{cases} \frac{2a^2}{a^2+b^2} = \frac{1}{2}, \\ \frac{a^2(1-b^2)}{a^2+b^2} = -\frac{1}{4}. \end{cases} \quad \text{---10分}$$

解方程组(I), (II), 得

$$\begin{cases} a^2 = 2, \\ b^2 = \frac{2}{3}; \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a^2 = \frac{2}{3}, \\ b^2 = 2. \end{cases}$$

故所求椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{\frac{2}{3}} = 1, \quad \text{或} \quad \frac{x^2}{\frac{2}{3}} + \frac{y^2}{2} = 1. \quad \text{---12分}$$

解法二 同解法一得

$$(a^2+b^2)x^2 + 2a^2x + a^2(1-b^2) = 0, \quad \text{③} \quad \text{---2分}$$

解方程③得

$$x_1 = \frac{-a^2 + ab\sqrt{a^2+b^2-1}}{a^2+b^2}, \quad x_2 = \frac{-a^2 - ab\sqrt{a^2+b^2-1}}{a^2+b^2}. \quad \text{④} \quad \text{---4}$$

分

则直线 $y=x+1$ 与椭圆的交点为

$P(x_1, x_1+1), Q(x_2, x_2+1).$

由题设 $OP \perp OQ$, 得