

# 2010年全国统一高考数学试卷（文科）（大纲版Ⅱ）

参考答案与试题解析

## 一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1. （5分）设全集 $U = \{x \in \mathbb{N}_+ | x < 6\}$ ，集合 $A = \{1, 3\}$ ， $B = \{3, 5\}$ ，则 $C_U(A \cup B) =$ （ ）
- A.  $\{1, 4\}$       B.  $\{1, 5\}$       C.  $\{2, 4\}$       D.  $\{2, 5\}$

【考点】1H：交、并、补集的混合运算.

【专题】11：计算题.

【分析】由全集 $U = \{x \in \mathbb{N}_+ | x < 6\}$ ，可得 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，然后根据集合混合运算的法则即可求解.

【解答】解：∵ $A = \{1, 3\}$ ， $B = \{3, 5\}$ ，

∴ $A \cup B = \{1, 3, 5\}$ ，

∴ $U = \{x \in \mathbb{N}_+ | x < 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，

∴ $C_U(A \cup B) = \{2, 4\}$ ，

故选：C.

【点评】本题考查了集合的基本运算，属于基础知识，注意细心运算.

2. （5分）不等式 $\frac{x-3}{x+2} < 0$ 的解集为（ ）

A.  $\{x | -2 < x < 3\}$     B.  $\{x | x < -2\}$     C.  $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 3\}$     D.  $\{x | x > 3\}$

【考点】73：一元二次不等式及其应用.

【专题】11：计算题.

【分析】本题的方法是：要使不等式小于0即要分子与分母异号，得到一个一元二次不等式，讨论x的值即可得到解集.

【解答】解：∵ $\frac{x-3}{x+2} < 0$ ，得到 $(x-3)(x+2) < 0$

即 $x - 3 > 0$ 且 $x + 2 < 0$ 解得： $x > 3$ 且 $x < -2$ 所以无解；

或 $x - 3 < 0$ 且 $x + 2 > 0$ ，解得 $-2 < x < 3$ ，

所以不等式的解集为 $-2 < x < 3$

故选：A.

**【点评】** 本题主要考查学生求不等式解集的能力，是一道基础题.

3. (5分) 已知 $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ ，则 $\cos(\pi - 2\alpha) = (\quad)$

A.  $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

B.  $-\frac{1}{9}$

C.  $\frac{1}{9}$

D.  $\frac{\sqrt{5}}{3}$

**【考点】** G0: 运用诱导公式化简求值；GS: 二倍角的三角函数.

**【专题】** 11: 计算题.

**【分析】** 先根据诱导公式求得 $\cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha$ 进而根据二倍角公式把 $\sin\alpha$ 的值代入即可求得答案.

**【解答】** 解：∵ $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ ，

∴ $\cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = -(1 - 2\sin^2\alpha) = -\frac{1}{9}$ .

故选：B.

**【点评】** 本题考查了二倍角公式及诱导公式，考查了学生对三角函数基础公式的记忆.

4. (5分) 函数 $y = \frac{1 + \ln(x-1)}{2} (x > 1)$ 的反函数是 ( $\quad$ )

A.  $y = e^{2x-1} - 1 (x > 0)$

B.  $y = e^{2x-1} + 1 (x > 0)$

C.  $y = e^{2x-1} - 1 (x \in \mathbb{R})$

D.  $y = e^{2x-1} + 1 (x \in \mathbb{R})$

**【考点】** 4H: 对数的运算性质；4R: 反函数.

**【专题】** 11: 计算题；16: 压轴题.

**【分析】** 从条件中 $y = \frac{1 + \ln(x-1)}{2} (x > 1)$ 中反解出 $x$ ，再将 $x, y$ 互换即得. 解答本

题首先熟悉反函数的概念，然后根据反函数求解三步骤：1、换： $x, y$ 换位

， 2、解：解出y， 3、标：标出定义域，据此即可求得反函数.

**【解答】**解：由原函数解得

$$x=e^{2y-1}+1,$$

$$\therefore f^{-1}(x)=e^{2x-1}+1,$$

$$\text{又 } x > 1, \therefore x-1 > 0;$$

$$\therefore \ln(x-1) \in \mathbb{R} \therefore \text{在反函数中 } x \in \mathbb{R},$$

故选：D.

**【点评】**求反函数，一般应分以下步骤：（1）由已知解析式 $y=f(x)$ 反求出 $x=\Phi(y)$ ；（2）交换 $x=\Phi(y)$ 中 $x$ 、 $y$ 的位置；（3）求出反函数的定义域（一般可通过求原函数的值域的方法求反函数的定义域）.

5. （5分）若变量 $x$ ， $y$ 满足约束条件
$$\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq x \\ 3x+2y \leq 5 \end{cases}$$
，则 $z=2x+y$ 的最大值为（ ）

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

**【考点】**7C：简单线性规划.

**【专题】**31：数形结合.

**【分析】**先根据约束条件画出可行域，设 $z=2x+y$ ，再利用 $z$ 的几何意义求最值，

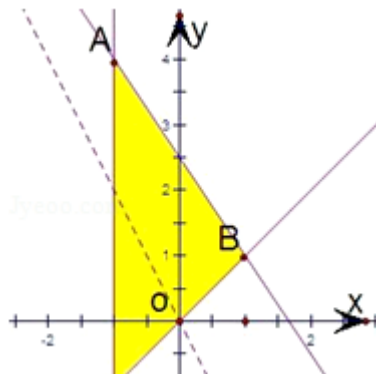
只需求出直线 $z=2x+y$ 过可行域内的点B时，从而得到 $m$ 值即可.

**【解答】**解：作出可行域，作出目标函数线，

可得直线与 $y=x$ 与 $3x+2y=5$ 的交点为最优解点，

$\therefore$ 即为B（1，1），当 $x=1$ ， $y=1$ 时 $z_{\max}=3$ .

故选：C.



【点评】 本题考查了线性规划的知识，以及利用几何意义求最值，属于基础题

6. (5分) 如果等差数列  $\{a_n\}$  中， $a_3+a_4+a_5=12$ ，那么  $a_1+a_2+\dots+a_7=$  ( )

- A. 14                      B. 21                      C. 28                      D. 35

【考点】 83: 等差数列的性质; 85: 等差数列的前n项和.

【分析】 由等差数列的性质求解.

【解答】 解:  $a_3+a_4+a_5=3a_4=12$ ,  $a_4=4$ ,

$$\therefore a_1+a_2+\dots+a_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=7a_4=28$$

故选: C.

【点评】 本题主要考查等差数列的性质.

7. (5分) 若曲线  $y=x^2+ax+b$  在点  $(1, b)$  处的切线方程是  $x - y + 1 = 0$ ，则 ( )

- A.  $a=1, b=2$             B.  $a=-1, b=2$             C.  $a=1, b=-2$             D.  $a=-1, b=-2$

【考点】 6H: 利用导数研究曲线上某点切线方程.

【专题】 11: 计算题; 52: 导数的概念及应用.

【分析】 由  $y=x^2+ax+b$ ，知  $y'=2x+a$ ，再由曲线  $y=x^2+ax+b$  在点  $(1, b)$  处的切线方程为  $x - y + 1 = 0$ ，求出  $a$  和  $b$ .

【解答】 解:  $\because y=x^2+ax+b$ ,

$$\therefore y'=2x+a,$$

$$\therefore y'|_{x=1}=2+a,$$

$$\therefore \text{曲线 } y=x^2+ax+b \text{ 在点 } (1, b) \text{ 处的切线方程为 } y - b = (2+a)(x - 1),$$

$$\therefore \text{曲线 } y=x^2+ax+b \text{ 在点 } (1, b) \text{ 处的切线方程为 } x - y + 1 = 0,$$

$$\therefore a = -1, b = 2.$$

故选: B.

**【点评】** 本题考查利用导数求曲线上某点切线方程的应用，解题时要认真审题，仔细解答.

8. (5分) 已知三棱锥S - ABC中，底面ABC为边长等于2的等边三角形，SA垂直于底面ABC，SA=3，那么直线AB与平面SBC所成角的正弦值为 ( )

A.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

B.  $\frac{\sqrt{5}}{4}$

C.  $\frac{\sqrt{7}}{4}$

D.  $\frac{3}{4}$

**【考点】** MI: 直线与平面所成的角.

**【专题】** 11: 计算题.

**【分析】** 由图，过A作AE垂直于BC交BC于E，连接SE，过A作AF垂直于SE交SE于F，连BF，由题设条件证出∠ABF即所求线面角. 由数据求出其正弦值.

**【解答】** 解：过A作AE垂直于BC交BC于E，连接SE，过A作AF垂直于SE交SE于F，连BF，

∵正三角形ABC，

∴E为BC中点，

∴BC⊥AE，SA⊥BC，

∴BC⊥面SAE，

∴BC⊥AF，AF⊥SE，

∴AF⊥面SBC，

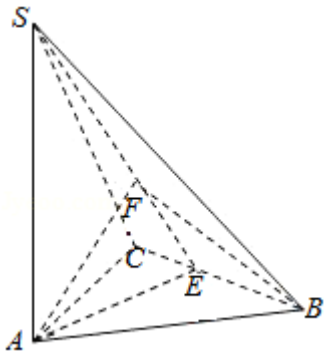
∴∠ABF为直线AB与面SBC所成角，由正三角形边长2，

$$\therefore AE = \sqrt{3}, AS = 3,$$

$$\therefore SE = 2\sqrt{3}, AF = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \sin \angle ABF = \frac{3}{4}.$$

故选：D.



【点评】 本题考查了立体几何的线与面、面与面位置关系及直线与平面所成角

9. (5分) 将标号为1, 2, 3, 4, 5, 6的6张卡片放入3个不同的信封中, 若每个信封放2张, 其中标号为1, 2的卡片放入同一信封, 则不同的方法共有 ( )
- A. 12种                      B. 18种                      C. 36种                      D. 54种

【考点】 D9: 排列、组合及简单计数问题.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 本题是一个分步计数问题, 首先从3个信封中选一个放1, 2有3种不同的选法, 再从剩下的4个数中选两个放一个信封有 $C_4^2$ , 余下放入最后一个信封, 根据分步计数原理得到结果.

【解答】 解: 由题意知, 本题是一个分步计数问题,

∴先从3个信封中选一个放1, 2, 有 $C_3^1=3$ 种不同的选法; 根据分组公式, 其他四

封信放入两个信封, 每个信封两个有 $\frac{C_4^2 \cdot C_2^2}{A_2^2} \cdot A_2^2=6$ 种放法,

∴共有 $3 \times 6 \times 1=18$ .

故选: B.

【点评】 本题考查分步计数原理, 考查平均分组问题, 是一个易错题, 解题的关键是注意到第二步从剩下的4个数中选两个放到一个信封中, 这里包含两个步骤, 先平均分组, 再排列.

10. (5分)  $\triangle ABC$ 中, 点D在边AB上, CD平分 $\angle ACB$ , 若 $\overrightarrow{CB}=\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$ ,  $|\vec{a}|=1$ ,  $|\vec{b}|=2$ , 则 $\overrightarrow{CD}=(\quad)$

- A.  $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$       B.  $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$       C.  $\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}$       D.  $\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$

**【考点】**9B: 向量加减混合运算.

**【分析】**由 $\triangle ABC$ 中, 点D在边AB上, CD平分 $\angle ACB$ , 根据三角形内角平分线定理, 我们易得到 $\frac{BD}{AD}=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2}$ , 我们将 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}$ 后, 将各向量用 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 表示, 即可得到答案.

**【解答】**解:  $\because$ CD为角平分线,

$$\therefore \frac{BD}{AD}=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

故选: B.

**【点评】**本题考查了平面向量的基础知识, 解答的核心是三角形内角平分线定理, 即若AD为三角形ABC的内角A的角平分线, 则 $AB: AC=BD: CD$

11. (5分) 与正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的三条棱AB、 $CC_1$ 、 $A_1D_1$ 所在直线的距离相等的点( )

- A. 有且只有1个    B. 有且只有2个    C. 有且只有3个    D. 有无数个

**【考点】**L0: 空间中直线与直线之间的位置关系.

**【专题】**16: 压轴题.

**【分析】**由于点D、 $B_1$ 显然满足要求, 猜想 $B_1D$ 上任一点都满足要求, 然后想办法证明结论.

**【解答】**解: 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 上建立如图所示空间直角坐标系, 并设该正方体的棱长为1, 连接 $B_1D$ , 并在 $B_1D$ 上任取一点P,

因为  $\overrightarrow{DB_1} = (1, 1, 1)$ ,

所以设  $P(a, a, a)$ , 其中  $0 \leq a \leq 1$ .

作  $PE \perp$  平面  $A_1D$ , 垂足为  $E$ , 再作  $EF \perp A_1D_1$ , 垂足为  $F$ ,

则  $PF$  是点  $P$  到直线  $A_1D_1$  的距离.

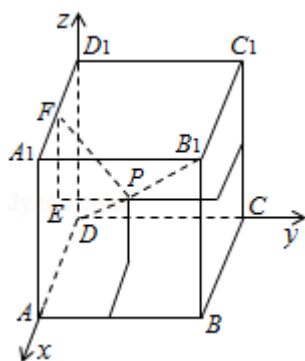
所以  $PF = \sqrt{a^2 + (1-a)^2}$ ;

同理点  $P$  到直线  $AB$ 、 $CC_1$  的距离也是  $\sqrt{a^2 + (1-a)^2}$ .

所以  $B_1D$  上任一点与正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的三条棱  $AB$ 、 $CC_1$ 、 $A_1D_1$  所在直线的距离都相等,

所以与正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的三条棱  $AB$ 、 $CC_1$ 、 $A_1D_1$  所在直线的距离相等的点有无数个.

故选: D.



**【点评】** 本题主要考查合情推理的能力及空间中点到线的距离的求法.

12. (5分) 已知椭圆  $T: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 过右焦点  $F$  且

斜率为  $k$  ( $k > 0$ ) 的直线与  $T$  相交于  $A$ ,  $B$  两点, 若  $\overline{AF} = 3\overline{FB}$ , 则  $k =$  ( )

- A. 1                      B.  $\sqrt{2}$                       C.  $\sqrt{3}$                       D. 2

**【考点】** KH: 直线与圆锥曲线的综合.

**【专题】** 11: 计算题; 16: 压轴题.

**【分析】** 设  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 根据  $\overline{AF} = 3\overline{FB}$  求得  $y_1$  和  $y_2$  关系根据离心率

设  $a = 2t$ ,  $c = \sqrt{3}t$ ,  $b = t$ , 代入椭圆方程与直线方程联立, 消去  $x$ , 根据韦达定

理表示出 $y_1+y_2$ 和 $y_1y_2$ ，进而根据 $y_1$ 和 $y_2$ 关系求得 $k$ 。

**【解答】**解：A ( $x_1, y_1$ )，B ( $x_2, y_2$ )，

$$\therefore \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}, \therefore y_1 = -3y_2,$$

$$\therefore e = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 设 } a=2t, c=\sqrt{3}t, b=t,$$

$$\therefore x^2 + 4y^2 - 4t^2 = 0 \text{ ①},$$

设直线AB方程为 $x=sy+\sqrt{3}t$ ，代入①中消去 $x$ ，可得 $(s^2+4)y^2+2\sqrt{3}sty-t^2=0$

$$\therefore y_1+y_2 = -\frac{2\sqrt{3}st}{s^2+4}, y_1y_2 = -\frac{t^2}{s^2+4}, -2y_2 = -\frac{2\sqrt{3}st}{s^2+4}, -3y_2^2 = -\frac{t^2}{s^2+4},$$

$$\text{解得 } s^2 = \frac{1}{2}, k = \sqrt{2}$$

故选：B。

**【点评】**本题主要考查了直线与圆锥曲线的综合问题。此类题问题综合性强，要求考生有较高地转化数学思想的运用能力，能将已知条件转化到基本知识的运用。

## 二、填空题（共4小题，每小题5分，满分20分）

13. （5分）已知 $\alpha$ 是第二象限的角， $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$ ，则 $\cos\alpha = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{5}}{5}}}$ 。

**【考点】**GG：同角三角函数间的基本关系。

**【分析】**根据 $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ，以及 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 可求出答案。

**【解答】**解： $\therefore \tan\alpha = \frac{1-\sin\alpha}{2\cos\alpha}$ ， $\therefore 2\sin\alpha = -\cos\alpha$

又 $\therefore \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ， $\alpha$ 是第二象限的角

$$\therefore \cos\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

故答案为： $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

**【点评】**本题考查了同角三角函数的基础知识。

14. (5分)  $(x+\frac{1}{x})^9$ 展开式中 $x^3$ 的系数是 84. (用数字作答)

【考点】DA: 二项式定理.

【分析】本题考查二项式定理的展开式, 解题时需要先写出二项式定理的通项 $T_{r+1}$ , 因为题目要求展开式中 $x^3$ 的系数, 所以只要使 $x$ 的指数等于3就可以, 用通项可以解决二项式定理的一大部分题目.

【解答】解: 写出  $(x+\frac{1}{x})^9$ 通项  $C_9^r x^{9-r} (\frac{1}{x})^r = C_9^r x^{9-2r}$ ,

∵要求展开式中 $x^3$ 的系数

∴令 $9 - 2r=3$ 得 $r=3$ ,

∴ $C_9^3=84$

故答案为: 84.

【点评】本题是一个二项展开式的特定项的求法. 解本题时容易公式记不清楚导致计算错误, 所以牢记公式. 它是经常出现的一个客观题.

15. (5分) 已知抛物线C:  $y^2=2px$  ( $p>0$ ) 的准线 $l$ , 过M (1, 0) 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与 $l$ 相交于A, 与C的一个交点为B, 若 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ , 则 $p=$  2.

【考点】K8: 抛物线的性质.

【专题】11: 计算题; 16: 压轴题.

【分析】设直线AB的方程与抛物线方程联立消去 $y$ 得 $3x^2+(-6-2p)x+3=0$ , 进而根据 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ , 可知M为A、B的中点,

可得 $p$ 的关系式, 解方程即可求得 $p$ .

【解答】解: 设直线AB:  $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$ , 代入 $y^2=2px$ 得 $3x^2+(-6-2p)x+3=0$ ,

又∵ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ , 即M为A、B的中点,

∴ $x_B+(-\frac{p}{2})=2$ , 即 $x_B=2+\frac{p}{2}$ ,

得 $p^2+4p-12=0$ ,

解得 $p=2$ ,  $p=-6$  (舍去)

故答案为：2

【点评】 本题考查了抛物线的几何性质. 属基础题.

16. (5分) 已知球O的半径为4, 圆M与圆N为该球的两个小圆, AB为圆M与圆N的公共弦,  $AB=4$ , 若 $OM=ON=3$ , 则两圆圆心的距离 $MN=$  3 .

【考点】 JE: 直线和圆的方程的应用; ND: 球的性质.

【专题】 11: 计算题; 16: 压轴题.

【分析】 根据题意画出图形, 欲求两圆圆心的距离, 将它放在与球心组成的三角形MNO中, 只要求出球心角即可, 通过球的性质构成的直角三角形即可解得.

【解答】 解法一:  $\because ON=3$ , 球半径为4,

$\therefore$ 小圆N的半径为 $\sqrt{7}$ ,

$\therefore$ 小圆N中弦长 $AB=4$ , 作NE垂直于AB,

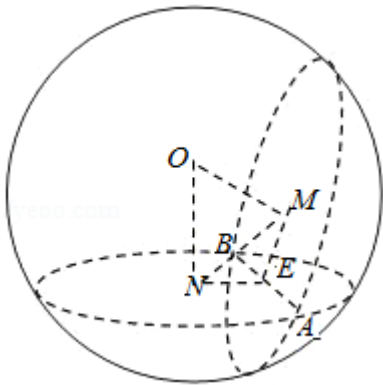
$\therefore NE=\sqrt{3}$ , 同理可得 $ME=\sqrt{3}$ , 在直角三角形ONE中,

$\therefore NE=\sqrt{3}$ ,  $ON=3$ ,

$\therefore \angle EON=\frac{\pi}{6}$ ,

$\therefore \angle MON=\frac{\pi}{3}$ ,

$\therefore MN=3$ .



故填: 3.

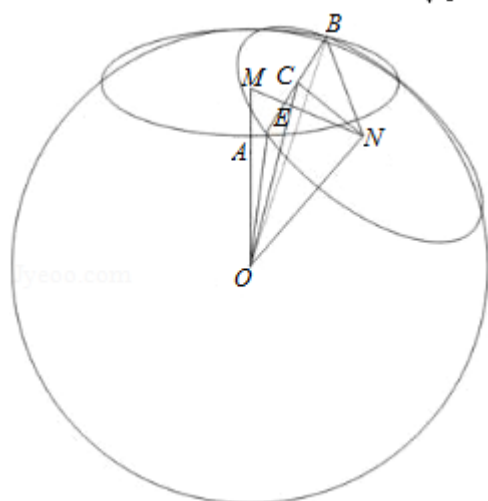
解法二: 如下图: 设AB的中点为C, 则OC与MN必相交于MN中点为E, 因为 $OM=ON=3$ ,

故小圆半径NB为 $\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

C为AB中点，故CB=2；所以NC= $\sqrt{\sqrt{7}^2-2^2}=\sqrt{3}$ ，

$\because \triangle ONC$ 为直角三角形，NE为 $\triangle ONC$ 斜边上的高， $OC=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$$\therefore MN=2EN=2 \cdot CN \cdot \frac{ON}{CO}=2 \times \sqrt{3} \times \frac{3}{2\sqrt{3}}=3$$



故填：3.

**【点评】** 本题主要考查了点、线、面间的距离计算，还考查球、直线与圆的基础知识，考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力，属于基础题.

### 三、解答题（共6小题，满分70分）

17. （10分） $\triangle ABC$ 中，D为边BC上的一点， $BD=33$ ， $\sin B=\frac{5}{13}$ ， $\cos \angle ADC=\frac{3}{5}$ ，求AD.

**【考点】** GG：同角三角函数间的基本关系；HP：正弦定理.

**【分析】** 先由 $\cos \angle ADC=\frac{3}{5}$ 确定角ADC的范围，因为 $\angle BAD=\angle ADC - B$ 所以可求其正弦值，最后由正弦定理可得答案.

**【解答】** 解：由 $\cos \angle ADC=\frac{3}{5}>0$ ，则 $\angle ADC<\frac{\pi}{2}$ ，

又由知 $B<\angle ADC$ 可得 $B<\frac{\pi}{2}$ ，

由 $\sin B=\frac{5}{13}$ ，可得 $\cos B=\frac{12}{13}$ ，

又由 $\cos\angle ADC = \frac{3}{5}$ , 可得 $\sin\angle ADC = \frac{4}{5}$ .

从而 $\sin\angle BAD = \sin(\angle ADC - B) = \sin\angle ADC \cos B - \cos\angle ADC \sin B = \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} - \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{33}{65}$ .

由正弦定理得 $\frac{AD}{\sin B} = \frac{BD}{\sin\angle BAD}$ ,

所以 $AD = \frac{BD \cdot \sin B}{\sin\angle BAD} = \frac{33 \times \frac{5}{13}}{\frac{33}{65}} = 25$ .

**【点评】**三角函数与解三角形的综合性问题, 是近几年高考的热点, 在高考试题中频繁出现. 这类题型难度比较低, 一般出现在17或18题, 属于送分题, 估计以后这类题型仍会保留, 不会有太大改变. 解决此类问题, 要根据已知条件, 灵活运用正弦定理或余弦定理, 求边角或将边角互化.

18. (12分) 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列 $a_1 + a_2 = 2 \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right)$ ,  $a_3 + a_4 + a_5 = 64 \left( \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} \right)$

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right)^2$ , 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$ .

**【考点】**88: 等比数列的通项公式; 8E: 数列的求和.

**【专题】**11: 计算题.

**【分析】**(1) 由题意利用等比数列的通项公式建立首项 $a_1$ 与公比 $q$ 的方程, 然后求解即可

(2) 由 $b_n$ 的定义求出通项公式, 在由通项公式, 利用分组求和法即可求解

**【解答】**解: (1) 设正等比数列 $\{a_n\}$ 首项为 $a_1$ , 公比为 $q$ , 由题意得:

$$\begin{cases} a_1(1+q) = 2 \cdot \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{q}(1+q) \\ a_1 q^2(1+q+q^2) = 64 \cdot \frac{1}{a_1 q^4}(1+q+q^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 q = 2 \\ a_1^2 q^6 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases} \therefore a_n = 2^{n-1} \quad (6 \text{分})$$

)

$$(2) b_n = \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 = 4^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + 2$$

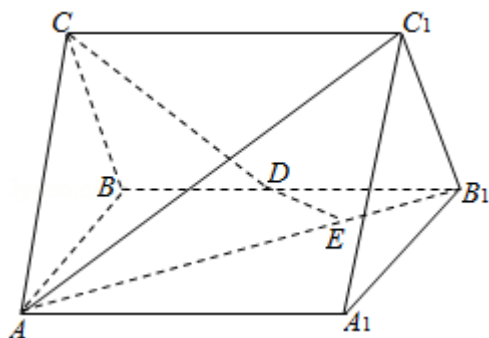
$$\therefore b_n \text{的前} n \text{项和} T_n = \frac{1(1-4^n)}{1-4} + \frac{1(1-\frac{1}{4^n})}{1-\frac{1}{4}} + 2n = \frac{1}{3} \cdot 4^n - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2n + 1 \quad (12 \text{分})$$

**【点评】** (1) 此问重基础及学生的基本运算技能 (2) 此处重点考查了高考常考的数列求和方法之一的分组求和, 及指数的基本运算性质

19. (12分) 如图, 直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AC=BC$ ,  $AA_1=AB$ ,  $D$  为  $BB_1$  的中点,  $E$  为  $AB_1$  上的一点,  $AE=3EB_1$ .

(I) 证明:  $DE$  为异面直线  $AB_1$  与  $CD$  的公垂线;

(II) 设异面直线  $AB_1$  与  $CD$  的夹角为  $45^\circ$ , 求二面角  $A_1 - AC_1 - B_1$  的大小.



**【考点】** LM: 异面直线及其所成的角; LQ: 平面与平面之间的位置关系.

**【专题】** 11: 计算题; 14: 证明题.

**【分析】** (1) 欲证  $DE$  为异面直线  $AB_1$  与  $CD$  的公垂线, 即证  $DE$  与异面直线  $AB_1$  与  $CD$  垂直相交即可;

(2) 将  $AB_1$  平移到  $DG$ , 故  $\angle CDG$  为异面直线  $AB_1$  与  $CD$  的夹角, 作  $HK \perp AC_1$ ,  $K$  为垂足, 连接  $B_1K$ , 由三垂线定理, 得  $B_1K \perp AC_1$ , 因此  $\angle B_1KH$  为二面角  $A_1 - AC_1 - B_1$  的平面角, 在三角形  $B_1KH$  中求出此角即可.

**【解答】** 解: (1) 连接  $A_1B$ , 记  $A_1B$  与  $AB_1$  的交点为  $F$ .

因为面  $AA_1BB_1$  为正方形, 故  $A_1B \perp AB_1$ , 且  $AF = FB_1$ ,

又  $AE = 3EB_1$ , 所以  $FE = EB_1$ ,

又  $D$  为  $BB_1$  的中点,

故 $DE \parallel BF$ ,  $DE \perp AB_1$ .

作 $CG \perp AB$ ,  $G$ 为垂足, 由 $AC=BC$ 知,  $G$ 为 $AB$ 中点.

又由底面 $ABC \perp$ 面 $AA_1B_1B$ . 连接 $DG$ , 则 $DG \parallel AB_1$ ,

故 $DE \perp DG$ , 由三垂线定理, 得 $DE \perp CD$ .

所以 $DE$ 为异面直线 $AB_1$ 与 $CD$ 的公垂线.

(2) 因为 $DG \parallel AB_1$ , 故 $\angle CDG$ 为异面直线 $AB_1$ 与 $CD$ 的夹角,  $\angle CDG=45^\circ$

设 $AB=2$ , 则 $AB_1=2\sqrt{2}$ ,  $DG=\sqrt{2}$ ,  $CG=\sqrt{2}$ ,  $AC=\sqrt{3}$ .

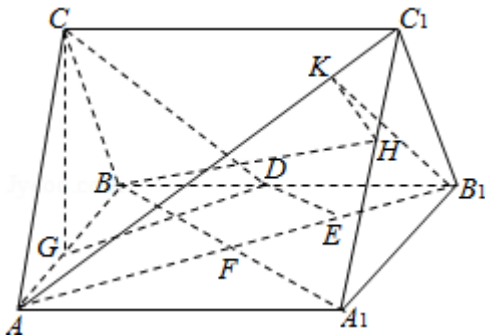
作 $B_1H \perp A_1C_1$ ,  $H$ 为垂足, 因为底面 $A_1B_1C_1 \perp$ 面 $AA_1CC_1$ , 故 $B_1H \perp$ 面 $AA_1C_1C$ . 又作 $HK$

$\perp A_1C_1$ ,  $K$ 为垂足, 连接 $B_1K$ , 由三垂线定理, 得 $B_1K \perp A_1C_1$ , 因此 $\angle B_1KH$ 为二面角 $A_1 - A_1C_1 - B_1$ 的平面角.

$$B_1H = \frac{2\sqrt{6}}{3}, C_1H = \frac{\sqrt{3}}{3}, A_1C_1 = \sqrt{7}, HK = \frac{2\sqrt{21}}{21}$$

$$\tan \angle B_1KH = \sqrt{14},$$

$\therefore$ 二面角 $A_1 - A_1C_1 - B_1$ 的大小为 $\arctan \sqrt{14}$ .

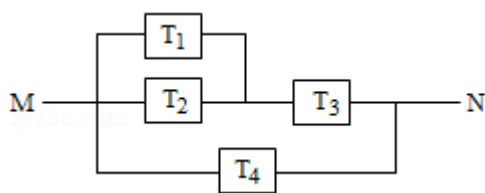


**【点评】** 本试题主要考查空间的线面关系与空间角的求解, 考查考生的空间想象与推理计算的能力. 三垂线定理是立体几何的最重要定理之一, 是高考的热点, 它是处理线线垂直问题的有效方法, 同时它也是确定二面角的平面角的主要手段. 通过引入空间向量, 用向量代数形式来处理立体几何问题, 淡化了传统几何中的“形”到“形”的推理方法, 从而降低了思维难度, 使解题变得程序化, 这是用向量解立体几何问题的独到之处.

20. (12分) 如图, 由 $M$ 到 $N$ 的电路中有4个元件, 分别标为 $T_1, T_2, T_3, T_4$ , 电流能通过 $T_1, T_2, T_3$ 的概率都是 $P$ , 电流能通过 $T_4$ 的概率是 $0.9$ , 电流能否通过各元件相互独立. 已知 $T_1, T_2, T_3$ 中至少有一个能通过电流的概率为 $0.999$ .

(I) 求 $P$ ;

(II) 求电流能在M与N之间通过的概率.



**【考点】** C5: 互斥事件的概率加法公式; C8: 相互独立事件和相互独立事件的概率乘法公式.

**【专题】** 11: 计算题.

**【分析】** (I) 设出基本事件, 将要求事件用基本事件的来表示, 将 $T_1, T_2, T_3$ 至少有一个能通过电流用基本事件表示并求出概率即可求得 $p$ .

(II) 根据题意,  $B$ 表示事件: 电流能在M与N之间通过, 根据电路图, 可得 $B = A_4 + (1 - A_4) A_1 A_3 + (1 - A_4) (1 - A_1) A_2 A_3$ , 由互斥事件的概率公式, 代入数据计算可得答案.

**【解答】** 解: (I) 根据题意, 记电流能通过 $T_i$ 为事件 $A_i, i=1, 2, 3, 4$ ,

$A$ 表示事件:  $T_1, T_2, T_3$ , 中至少有一个能通过电流,

易得 $A_1, A_2, A_3$ 相互独立, 且 $\bar{A} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$ ,

$$P(\bar{A}) = (1 - p)^3 = 1 - 0.999 = 0.001,$$

计算可得,  $p=0.9$ ;

(II) 根据题意,  $B$ 表示事件: 电流能在M与N之间通过,

有 $B = A_4 + (1 - A_4) A_1 A_3 + (1 - A_4) (1 - A_1) A_2 A_3$ ,

则 $P(B) = P(A_4 + (1 - A_4) A_1 A_3 + (1 - A_4) (1 - A_1) A_2 A_3)$

$$= 0.9 + 0.1 \times 0.9 \times 0.9 + 0.1 \times 0.1 \times 0.9 \times 0.9$$

$$= 0.9891.$$

**【点评】** 本题考查了概率中的互斥事件、对立事件及独立事件的概率, 注意先明确事件之间的关系, 进而选择对应的公式来计算.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = -x^2 + ax + 1 - \ln x$ .

(I) 当 $a=3$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(II) 若  $f(x)$  在区间  $(0, \frac{1}{2})$  上是减函数, 求实数  $a$  的取值范围.

**【考点】** 3D: 函数的单调性及单调区间; 3E: 函数单调性的性质与判断.

**【专题】** 16: 压轴题.

**【分析】** (1) 求单调区间, 先求导, 令导函数大于等于 0 即可.

(2) 已知  $f(x)$  在区间  $(0, \frac{1}{2})$  上是减函数, 即  $f'(x) \leq 0$  在区间  $(0, \frac{1}{2})$  上

恒成立, 然后用分离参数求最值即可.

**【解答】** 解: (I) 当  $a=3$  时,  $f(x) = -x^2 + 3x + 1 - \ln x$

$$\therefore f'(x) = -2x + 3 - \frac{1}{x} = \frac{-(2x^2 - 3x + 1)}{x}$$

$$\text{解 } f'(x) > 0,$$

$$\text{即: } 2x^2 - 3x + 1 < 0$$

函数  $f(x)$  的单调递增区间是  $(\frac{1}{2}, 1)$ .

$$(II) f'(x) = -2x + a - \frac{1}{x},$$

$\therefore f(x)$  在  $(0, \frac{1}{2})$  上为减函数,

$\therefore x \in (0, \frac{1}{2})$  时  $-2x + a - \frac{1}{x} \leq 0$  恒成立.

即  $a \leq 2x + \frac{1}{x}$  恒成立.

设  $g(x) = 2x + \frac{1}{x}$ , 则  $g'(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$

$\therefore x \in (0, \frac{1}{2})$  时,  $\frac{1}{x^2} > 4$ ,

$\therefore g'(x) < 0$ ,

$\therefore g(x)$  在  $(0, \frac{1}{2})$  上递减,

$\therefore g(x) > g(\frac{1}{2}) = 3$ ,

$\therefore a \leq 3$ .

**【点评】** 本题考查函数单调性的判断和已知函数单调性求参数的范围, 此类问题一般用导数解决, 综合性较强.

22. (12分) 已知斜率为1的直线l与双曲线C:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  相交于B

、D两点, 且BD的中点为M(1, 3).

(I) 求C的离心率;

(II) 设C的右顶点为A, 右焦点为F,  $|DF| \cdot |BF| = 17$ , 证明: 过A、B、D三点的圆与x轴相切.

**【考点】** J9: 直线与圆的位置关系; KC: 双曲线的性质; KH: 直线与圆锥曲线的综合.

**【专题】** 11: 计算题; 14: 证明题; 16: 压轴题.

**【分析】** (I) 由直线过点(1, 3)及斜率可得直线方程, 直线与双曲线交于B、D两点的中点为(1, 3), 可利用直线与双曲线消元后根据中点坐标公式找出a, b的关系式即求得离心率.

(II) 利用离心率将条件 $|FA| \cdot |FB| = 17$ , 用含a的代数式表示, 即可求得a, 则A点坐标可得(1, 0), 由于A在x轴上所以, 只要证明 $2AM = BD$ 即证得.

**【解答】** 解: (I) 由题设知, l的方程为:  $y = x + 2$ , 代入C的方程, 并化简, 得  $(b^2 - a^2)x^2 - 4a^2x - a^2b^2 - 4a^2 = 0$ ,

$$\text{设 } B(x_1, y_1), D(x_2, y_2), \text{ 则 } x_1 + x_2 = \frac{4a^2}{b^2 - a^2}, x_1x_2 = -\frac{4a^2 + a^2b^2}{b^2 - a^2}, \quad \textcircled{1}$$

$$\text{由 } M(1, 3) \text{ 为 } BD \text{ 的中点知 } \frac{x_1 + x_2}{2} = 1.$$

$$\text{故 } \frac{1}{2} \times \frac{4a^2}{b^2 - a^2} = 1, \text{ 即 } b^2 = 3a^2, \quad \textcircled{2}$$

$$\text{故 } c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2a,$$

$$\therefore C \text{ 的离心率 } e = \frac{c}{a} = 2.$$

(II) 由①②知, C的方程为:  $3x^2 - y^2 = 3a^2$ , A(a, 0), F(2a, 0),

$$x_1 + x_2 = 2, x_1x_2 = -\frac{4 + 3a^2}{2}.$$

故不妨设  $x_1 \leq -a, x_2 \geq a$ ,

$$|BF| = \sqrt{(x_1 - 2a)^2 + y_1^2} = a - 2x_1, |FD| = \sqrt{(x_2 - 2a)^2 + y_2^2} = 2x_2 - a,$$

$$|BF| \cdot |FD| = (a - 2x_1)(2x_2 - a) = -4x_1x_2 + 2a(x_1 + x_2) - a^2 = 5a^2 + 4a + 8.$$

又  $|BF| \cdot |FD| = 17$ ，故  $5a^2 + 4a + 8 = 17$ 。

解得  $a = 1$ ，或  $a = -\frac{9}{5}$ （舍去），

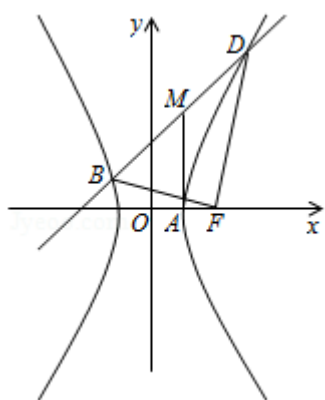
$$\text{故 } |BD| = \sqrt{2} |x_1 - x_2| = \sqrt{2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = 6,$$

连接  $MA$ ，则由  $A(1, 0)$ ， $M(1, 3)$  知  $|MA| = 3$ ，

从而  $MA = MB = MD$ ，且  $MA \perp x$  轴，

因此以  $M$  为圆心， $MA$  为半径的圆经过  $A$ 、 $B$ 、 $D$  三点，且在点  $A$  处与  $x$  轴相切，

所以过  $A$ 、 $B$ 、 $D$  三点的圆与  $x$  轴相切。



**【点评】** 本题考查了圆锥曲线、直线与圆的知识，考查学生运用所学知识解决问题的能力。