

2006 年四川高考文科数学真题及答案

第 I 卷

参考公式：

如果事件 A、B 互斥，那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A、B 相互独立，那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P，那么

n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

一. 选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分；

(1) 已知集合 $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$ ，集合 $B = \{x | |2x - 1| > 3\}$ ，则集合 $A \cup B =$

(A) $\{x | 2 \leq x \leq 3\}$

(B) $\{x | 2 \leq x < 3\}$

(C) $\{x | 2 < x \leq 3\}$

(D) $\{x | -1 < x < 3\}$

(2) 函数 $f(x) = \ln(x-1), (x > 1)$ 的反函数是

(A) $f^{-1}(x) = e^x + 1 (x \in R)$

(B) $f^{-1}(x) = 10^x + 1 (x \in R)$

(C) $f^{-1}(x) = 10^x + 1 (x > 1)$

(D) $f^{-1}(x) = e^x + 1 (x > 1)$

(3) 曲线 $y = 4x - x^3$ 在点 $(-1, -3)$ 处的切线方程是

(A) $y = 7x + 4$

(B) $y = 7x + 2$

(C) $y = x - 4$

(D) $y = x - 2$

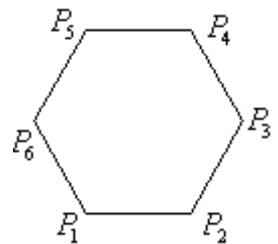
(4) 如图，已知正六边形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ ，下列向量的数量积中最大的是

(A) $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_3}$

(B) $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_4}$

(C) $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_5}$

(D) $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_6}$

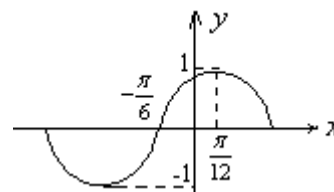


(5) 甲校有 3600 名学生，乙校有 5400 名学生，丙校有 1800 名学生，为统计三校学生某方面的情况，计划采用分层抽样法，抽取一个容量为 90 人的样本，应在这三校分别抽取学生

- (A) 30人, 30人, 30人 (B) 30人, 45人, 15人
 (C) 20人, 30人, 10人 (D) 30人, 50人, 10人

(6) 下列函数中, 图象的一部分如右图所示的是

- (A) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ (B) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
 (C) $y = \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ (D) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

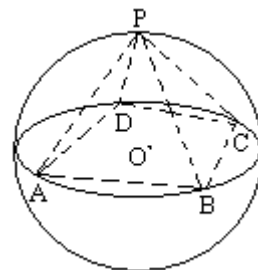


(7) 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 60° , m, n 为异面直线, 且 $m \perp \beta, n \perp \beta$, 则 m, n 所成的角为

- (A) 30° (B) 60° (C) 90° (D) 120°

(8) 已知两定点 $A(-2,0), B(1,0)$, 如果动点 P 满足 $|PA| = 2|PB|$, 则点 P 的轨迹所包围的图形的面积等于

- (A) 9π (B) 8π (C) 4π (D) π



(9) 如图, 正四棱锥 $P-ABCD$ 底面的四个顶点 A, B, C, D 在球 O 的同一

个大圆上, 点 P 在球面上, 如果 $V_{P-ABCD} = \frac{16}{3}$, 则球 O 的表面积是

- (A) 4π (B) 8π (C) 12π (D) 16π

(10) 直线 $y = x - 3$ 与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点, 过 A, B 两点向抛物线的准线作垂线, 垂足分别为 P, Q , 则梯形 $APQB$ 的面积为

- (A) 36 (B) 48 (C) 56 (D) 64

(11) 设 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边, 则 $a^2 = b(b+c)$ 是 $A = 2B$ 的

- (A) 充要条件 (B) 充分而不必要条件
 (C) 必要而充分条件 (D) 既不充分又不必要条件

(12) 从 0 到 9 这 10 个数字中任取 3 个数字组成一个没有重复数字的三位数, 这个数不能被 3 整除的概率为

- (A) $\frac{41}{60}$ (B) $\frac{38}{54}$ (C) $\frac{35}{54}$ (D) $\frac{19}{54}$

第 II 卷

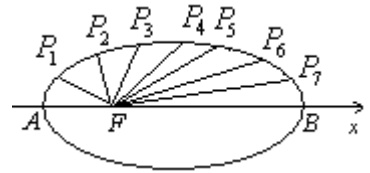
二. 填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分; 把答案填在题中的横线上。

(13) $(1-2x)^{10}$ 展开式中的 x^3 系数为___ (用数字作答)

(14) 设 x, y 满足约束条件:
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq \frac{1}{2}x \\ 2x + y \leq 10 \end{cases}$$
, 则 $z = 2x - y$ 的最

小值为___;

(15) 如图, 把椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的长轴 AB 分成 8 等份, 过每



个分点作 x 轴的垂线交椭圆的上半部分于 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ 七

个点, F 是椭圆的一个焦点, 则

$$|P_1F| + |P_2F| + |P_3F| + |P_4F| + |P_5F| + |P_6F| + |P_7F| = \underline{\quad};$$

(16) m, n 是空间两条不同直线, α, β 是两个不同平面, 下面有四个命题:

- ① $m \perp \alpha, n // \beta, \alpha // \beta \Rightarrow m \perp n$ ② $m \perp n, \alpha // \beta, m \perp \alpha \Rightarrow n // \beta$
 ③ $m \perp n, \alpha // \beta, m // \alpha \Rightarrow n \perp \beta$ ④ $m \perp \alpha, m // n, \alpha // \beta \Rightarrow n \perp \beta$

其中真命题的编号是_____ ; (写出所有真命题的编号)

三. 解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分; 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

(17) (本大题满分 12 分)

数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 $S_n, a_1 = 1, a_{n+1} = 2S_n + 1 (n \geq 1)$

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 等差数列 $\{b_n\}$ 的各项为正, 其前 n 项和为 T_n , 且 $T_3 = 15$, 又 $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3$

成等比数列, 求 T_n

(18) (本大题满分 12 分)

已知 A, B, C 是三角形 $\triangle ABC$ 三内角, 向量 $\vec{m} = (-1, \sqrt{3}), \vec{n} = (\cos A, \sin A)$, 且

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = 1$$

(I) 求角 A ;

(II) 若 $\frac{1 + \sin 2B}{\cos^2 B - \sin^2 B} = -3$, 求 $\tan B$

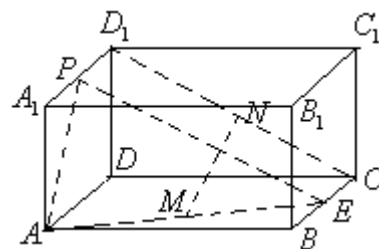
(19) (本大题满分 12 分)

某课程考核分理论与实验两部分进行，每部分考核成绩只记“合格”与“不合格”，两部分考核都是“合格”则该课程考核“合格”，甲、乙、丙三人在理论考核中合格的概率分别为 0.9, 0.8, 0.7；在实验考核中合格的概率分别为 0.8, 0.7, 0.9，所有考核是否合格相互之间没有影响

- (I) 求甲、乙、丙三人在理论考核中至少有两人合格的概率；
 (II) 求这三个人该课程考核都合格的概率。(结果保留三位小数)

(20) (本大题满分 12 分)

如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E, P 分别是 BC, A_1D_1 的中点， M, N 分别是 AE, CD_1 的中点， $AD = AA_1 = a, AB = 2a$



- (I) 求证： $MN \parallel$ 面 ADD_1A_1 ；
 (II) 求二面角 $P-AE-D$ 的大小。

(21) (本大题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^3 + 3ax - 1, g(x) = f(x) - ax - 5$ ，其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数

- (I) 对满足 $-1 \leq a \leq 1$ 的一切 a 的值，都有 $g(x) < 0$ ，求实数 x 的取值范围；
 (II) 设 $a = -m^2$ ，当实数 m 在什么范围内变化时，函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = 3$ 只有一个公共点

(22) (本大题满分 14 分)

已知两定点 $F_1(-\sqrt{2}, 0), F_2(\sqrt{2}, 0)$ ，满足条件 $|\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| = 2$ 的点 P 的轨迹是曲线 E ，直线 $y = kx - 1$ 与曲线 E 交于 A, B 两点

- (I) 求 k 的取值范围；
 (II) 如果 $|AB| = 6\sqrt{3}$ ，且曲线 E 上存在点 C ，使 $\overline{OA} + \overline{OB} = m\overline{OC}$ ，求 m 的值和 $\triangle ABC$ 的面积 S

一. 选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分;

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	D	A	B	D	B	C	D	B	A	C

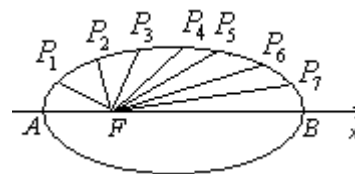
二. 填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分; 把答案填在题中的横线上。

(13) $(1-2x)^{10}$ 展开式中的 x^3 系数为 -960 (用数字作答)

(14) 设 x, y 满足约束条件:
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq \frac{1}{2}x \\ 2x + y \leq 10 \end{cases}$$
, 则 $z = 2x - y$ 的最

小值为 -6 ;

(15) 如图, 把椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的长轴 AB 分成 8 等份, 过每



个分点作 x 轴的垂线交椭圆的上半部分于 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ 七个点, F 是椭圆的一个焦点, 则

$|P_1F| + |P_2F| + |P_3F| + |P_4F| + |P_5F| + |P_6F| + |P_7F| = \underline{35}$;

(16) m, n 是空间两条不同直线, α, β 是两个不同平面, 下面有四个命题:

① $m \perp \alpha, n // \beta, \alpha // \beta \Rightarrow m \perp n$

② $m \perp n, \alpha // \beta, m \perp \alpha \Rightarrow n // \beta$

③ $m \perp n, \alpha // \beta, m // \alpha \Rightarrow n \perp \beta$

④ $m \perp \alpha, m // n, \alpha // \beta \Rightarrow n \perp \beta$

其中真命题的编号是 ①, ② ; (写出所有真命题的编号)

三. 解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分; 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

(17) (本大题满分 12 分)

数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 $S_n, a_1 = 1, a_{n+1} = 2S_n + 1 (n \geq 1)$

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 等差数列 $\{b_n\}$ 的各项为正, 其前 n 项和为 T_n , 且 $T_3 = 15$, 又 $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3$

成等比数列, 求 T_n

本小题主要考察等差数列、等比数列的基础知识, 以及推理能力与运算能力。满分 12

分。

解：（I）由 $a_{n+1} = 2S_n + 1$ 可得 $a_n = 2S_{n-1} + 1 (n \geq 2)$ ，两式相减得

$$a_{n+1} - a_n = 2a_n, a_{n+1} = 3a_n (n \geq 2)$$

$$\text{又 } a_2 = 2S_1 + 1 = 3 \therefore a_2 = 3a_1$$

故 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 3 得等比数列

$$\therefore a_n = 3^{n-1}$$

（II）设 $\{b_n\}$ 的公比为 d

由 $T_3 = 15$ 得，可得 $b_1 + b_2 + b_3 = 15$ ，可得 $b_2 = 5$

故可设 $b_1 = 5 - d, b_3 = 5 + d$

$$\text{又 } a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 9$$

由题意可得 $(5 - d + 1)(5 + d + 9) = (5 + 3)^2$

解得 $d_1 = 2, d_2 = 10$

\therefore 等差数列 $\{b_n\}$ 的各项为正， $\therefore d > 0$

$$\therefore d = 2$$

$$\therefore T_n = 3n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 + 2n$$

（18）（本大题满分 12 分）

已知 A, B, C 是三角形 $\triangle ABC$ 三内角，向量 $\vec{m} = (-1, \sqrt{3}), \vec{n} = (\cos A, \sin A)$ ，且

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = 1$$

（I）求角 A ；

（II）若 $\frac{1 + \sin 2B}{\cos^2 B - \sin^2 B} = -3$ ，求 $\tan B$

本小题主要考察三角函数概念、同角三角函数的关系、两角和与差的三角函数的公式以及倍角公式，考察应用、分析和计算能力。满分 12 分。

解：（I） $\therefore \vec{m} \cdot \vec{n} = 1 \therefore (-1, \sqrt{3}) \cdot (\cos A, \sin A) = 1$

$$\text{即 } \sqrt{3} \sin A - \cos A = 1$$

$$2\left(\sin A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos A \cdot \frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\because 0 < A < \pi, -\frac{\pi}{6} < A - \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{3}$$

(II) 由题知 $\frac{1+2\sin B \cos B}{\cos^2 B - \sin^2 B} = -3$, 整理得

$$\sin^2 B - \sin B \cos B - 2\cos^2 B = 0$$

$$\therefore \cos B \neq 0 \quad \therefore \tan^2 B - \tan B - 2 = 0$$

$$\therefore \tan B = 2 \text{ 或 } \tan B = -1$$

而 $\tan B = -1$ 使 $\cos^2 B - \sin^2 B = 0$, 舍去

$$\therefore \tan B = 2$$

(19) (本大题满分 12 分)

某课程考核分理论与实验两部分进行, 每部分考核成绩只记“合格”与“不合格”, 两部分考核都是“合格”则该课程考核“合格”, 甲、乙、丙三人在理论考核中合格的概率分别为 0.9, 0.8, 0.7; 在实验考核中合格的概率分别为 0.8, 0.7, 0.9, 所有考核是否合格相互之间没有影响

(I) 求甲、乙、丙三人在理论考核中至少有两人合格的概率;

(II) 求这三个人该课程考核都合格的概率。(结果保留三位小数)

本小题主要考察相互独立事件、互斥事件、对立事件等概率的计算方法, 考察应用概率知识解决实际问题的能力。满分 12 分。

解: 记“甲理论考核合格”为事件 A_1 , “乙理论考核合格”为事件 A_2 , “丙理论考核合格”为事件 A_3 , 记 \bar{A}_i 为 A_i 的对立事件, $i=1, 2, 3$; 记“甲实验考核合格”为事件 B_1 , “乙实验考核合格”为事件 B_2 , “丙实验考核合格”为事件 B_3 ,

(I) 记“理论考核中至少有两人合格”为事件 C , 记 \bar{C} 为 C 的对立事件

$$\text{解法 1: } P(C) = P(A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3)$$

$$= P(A_1 A_2 \bar{A}_3) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3)$$

$$= 0.9 \times 0.8 \times 0.3 + 0.9 \times 0.2 \times 0.7 + 0.1 \times 0.8 \times 0.7 + 0.9 \times 0.8 \times 0.7$$

$$= 0.902$$

解法 2: $P(C) = 1 - P(\bar{C})$

$$\begin{aligned} &= 1 - P(\overline{A_1 A_2 A_3} + \overline{A_1 A_2 \bar{A}_3} + \overline{A_1 \bar{A}_2 A_3} + \overline{A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3}) \\ &= 1 - [P(\overline{A_1 A_2 A_3}) + P(\overline{A_1 A_2 \bar{A}_3}) + P(\overline{A_1 \bar{A}_2 A_3}) + P(\overline{A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3})] \\ &= 1 - (0.1 \times 0.2 \times 0.3 + 0.9 \times 0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.8 \times 0.3 + 0.1 \times 0.2 \times 0.7) \\ &= 1 - 0.098 \\ &= 0.902 \end{aligned}$$

所以, 理论考核中至少有两人合格的概率为 0.902

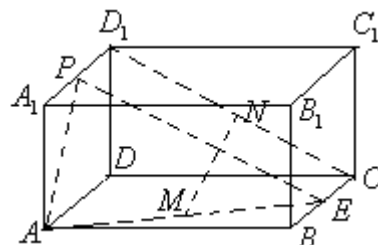
(II) 记“三人该课程考核都合格”为事件 D

$$\begin{aligned} P(D) &= P[(A_1 \cdot B_1) \cdot (A_2 \cdot B_2) \cdot (A_3 \cdot B_3)] \\ &= P(A_1 \cdot B_1) \cdot P(A_2 \cdot B_2) \cdot P(A_3 \cdot B_3) \\ &= P(A_1) \cdot P(B_1) \cdot P(A_2) \cdot P(B_2) \cdot P(A_3) \cdot P(B_3) \\ &= 0.9 \times 0.8 \times 0.8 \times 0.8 \times 0.7 \times 0.9 \\ &= 0.254016 \\ &\approx 0.254 \end{aligned}$$

所以, 这三人该课程考核都合格的概率为 0.254

(20) (本大题满分 12 分)

如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, P 分别是 BC, A_1D_1 的中点, M, N 分别是 AE, CD_1 的中点, $AD = AA_1 = a, AB = 2a$



(I) 求证: $MN \parallel$ 面 ADD_1A_1 ;

(II) 求二面角 $P - AE - D$ 的大小。

本小题主要考察长方体的概念、直线和平面、平面和平面的关系等基础知识, 以及空间想象能力和推理能力。满分 12 分

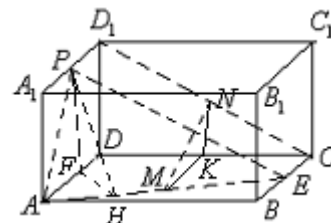
解法一:

(I) 证明: 取 CD 的中点 K , 连结 MK, NK

$\because M, N, K$ 分别为 AE, CD_1, CD 的中点

$\therefore MK \parallel AD, NK \parallel DD_1$

$\therefore MK \parallel$ 面 $ADD_1A_1, NK \parallel$ 面 ADD_1A_1



\therefore 面 $MNK \parallel$ 面 ADD_1A_1

$\therefore MN \parallel$ 面 ADD_1A_1

(II) 设 F 为 AD 的中点

$\therefore P$ 为 A_1D_1 的中点 $\therefore PF \parallel DD_1$

$\therefore PF \perp$ 面 $ABCD$

作 $FH \perp AE$, 交 AE 于 H , 连结 PH , 则由三垂线定理得 $AE \perp PH$

从而 $\angle PHF$ 为二面角 $P-AE-D$ 的平面角。

在 $Rt\triangle AEF$ 中, $AF = \frac{a}{2}, EF = 2a, AE = \frac{\sqrt{17}}{2}a$, 从而

$$FH = \frac{AF \cdot EF}{AE} = \frac{\frac{a}{2} \cdot 2a}{\frac{\sqrt{17}}{2}a} = \frac{2a}{\sqrt{17}}$$

在 $Rt\triangle PFH$ 中, $\tan \angle PFH = \frac{PF}{FH} = \frac{DD_1}{FH} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

故: 二面角 $P-AE-D$ 的大小为 $\arctan \frac{\sqrt{17}}{2}$

方法二: 以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立直角坐标系, 则

$$A(a, 0, 0), B(a, 2a, 0), C(0, 2a, 0), A_1(a, 0, a), D_1(0, 0, a)$$

$\therefore E, P, M, N$ 分别是 BC, A_1D_1, AE, CD_1 的中点

$$\therefore E\left(\frac{a}{2}, 2a, 0\right), P\left(\frac{a}{2}, 0, a\right), M\left(\frac{3a}{4}, a, 0\right), N\left(0, a, \frac{a}{2}\right),$$

$$(I) \overrightarrow{MN} = \left(-\frac{3}{4}a, 0, \frac{a}{2}\right)$$

取 $\vec{n} = (0, 1, 0)$, 显然 $\vec{n} \perp$ 面 ADD_1A_1 $\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n} = 0$, $\therefore \overrightarrow{MN} \perp \vec{n}$

又 $MN \not\subset$ 面 ADD_1A_1 $\therefore MN \parallel$ 面 ADD_1A_1

\therefore 过 P 作 $PH \perp AE$, 交 AE 于 H , 取 AD 的中点 F , 则 $F\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$

设 $H(x, y, 0)$, 则 $\overrightarrow{HP} = \left(\frac{a}{2} - x, -y, a\right), \overrightarrow{HF} = \left(\frac{a}{2} - x, -y, 0\right)$

$$\text{又 } \overrightarrow{AE} = \left(-\frac{a}{2}, 2a, 0\right)$$

$$\text{由 } \overline{AP} \cdot \overline{AE} = 0, \text{ 及 } H \text{ 在直线 } AE \text{ 上, 可得: } \begin{cases} -\frac{a^2}{4} + \frac{a}{2}x - 2ay = 0 \\ 4x + y = 4a \end{cases}$$

$$\text{解得 } x = \frac{33}{34}a, y = \frac{2}{17}a$$

$$\therefore \overline{HP} = \left(-\frac{8a}{17}, -\frac{2a}{17}, a \right), \overline{HF} = \left(-\frac{8a}{17}, -\frac{2a}{17}, 0 \right)$$

$$\therefore \overline{HF} \cdot \overline{AE} = 0 \quad \text{即 } \overline{HF} \perp \overline{AE}$$

$\therefore \overline{HP}$ 与 \overline{HF} 所夹的角等于二面角 $P-AE-D$ 的大小

$$\cos \langle \overline{HP}, \overline{HF} \rangle = \frac{\overline{HP} \cdot \overline{HF}}{|\overline{HP}| \cdot |\overline{HF}|} = \frac{2}{\sqrt{21}}$$

故: 二面角 $P-AE-D$ 的大小为 $\arccos \frac{2\sqrt{21}}{21}$

(21) (本大题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^3 + 3ax - 1, g(x) = f(x) - ax - 5$, 其中 $f'(x)$ 是的导函数

(I) 对满足 $-1 \leq a \leq 1$ 的一切 a 的值, 都有 $g(x) < 0$, 求实数 x 的取值范围;

(II) 设 $a = -m^2$, 当实数 m 在什么范围内变化时, 函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = 3$ 只有一个公共点

本小题主要考察函数的单调性、导数的应用、解不等式等基础知识, 以及推理能力、运输能力和综合应用数学知识的能力。满分 12 分。

解: (I) 由题意 $g(x) = 3x^2 - ax + 3a - 5$

$$\text{令 } \varphi(x) = (3-x)a + 3x^2 - 5, \quad -1 \leq a \leq 1$$

对 $-1 \leq a \leq 1$, 恒有 $g(x) < 0$, 即 $\varphi(x) < 0$

$$\therefore \begin{cases} \varphi(1) < 0 \\ \varphi(-1) < 0 \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} 3x^2 - x - 2 < 0 \\ 3x^2 + x - 8 < 0 \end{cases} \quad \text{解得 } -\frac{2}{3} < x < 1$$

故 $x \in \left(-\frac{2}{3}, 1 \right)$ 时, 对满足 $-1 \leq a \leq 1$ 的一切 a 的值, 都有 $g(x) < 0$

(II) $f'(x) = 3x^2 - 3m^2$

①当 $m = 0$ 时, $f(x) = x^3 - 1$ 的图象与直线 $y = 3$ 只有一个公共点

②当 $m \neq 0$ 时, 列表:

x	$(-\infty, m)$	$- m $	$(- m , m)$	$ m $	$(m , +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	极大	\searrow	极小	\nearrow

$$\therefore f(x)_{\text{极小}} = f(|x|) = -2m^2|m| - 1 < -1$$

又 $\because f(x)$ 的值域是 R , 且在 $(|m|, +\infty)$ 上单调递增

\therefore 当 $x > |m|$ 时函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = 3$ 只有一个公共点。

当 $x < |m|$ 时, 恒有 $f(x) \leq f(-|m|)$

由题意得 $f(-|m|) < 3$

$$\text{即 } 2m^2|m| - 1 = 2|m|^3 - 1 < 3$$

$$\text{解得 } m \in (-\sqrt[3]{2}, 0) \cup (0, \sqrt[3]{2})$$

综上, m 的取值范围是 $(-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$

(22) (本大题满分 14 分)

已知两定点 $F_1(-\sqrt{2}, 0), F_2(\sqrt{2}, 0)$, 满足条件 $|\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| = 2$ 的点 P 的轨迹是曲线 E , 直线 $y = kx - 1$ 与曲线 E 交于 A, B 两点

(I) 求 k 的取值范围;

(II) 如果 $|\overline{AB}| = 6\sqrt{3}$, 且曲线 E 上存在点 C , 使 $\overline{OA} + \overline{OB} = m\overline{OC}$, 求 m 的值和 $\triangle ABC$ 的面积 S

本小题主要考察双曲线的定义和性质、直线与双曲线的关系、点到直线的距离等知识及解析几何的基本思想、方法和综合解决问题的能力。满分 14 分。

解: (I) 由双曲线的定义可知, 曲线 E 是以 $F_1(-\sqrt{2}, 0), F_2(\sqrt{2}, 0)$ 为焦点的双曲线的左支, 且 $c = \sqrt{2}, a = 1$, 易知 $b = 1$

故曲线 E 的方程为 $x^2 - y^2 = 1 (x < 0)$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 由题意建立方程组 } \begin{cases} y = kx - 1 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{消去 } y, \text{ 得 } (1 - k^2)x^2 + 2kx - 2 = 0$$

又已知直线与双曲线左支交于两点 A, B , 有

$$\begin{cases} 1-k^2 \neq 0 \\ \Delta = (2k)^2 + 8(1-k^2) > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{-2k}{1-k^2} < 0 \\ x_1 x_2 = \frac{-2}{1-k^2} > 0 \end{cases} \quad \text{解得 } -\sqrt{2} < k < -1$$

$$(II) \because |AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$$

$$= \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{-2k}{1-k^2}\right)^2 - 4 \times \frac{-2}{1-k^2}}$$

$$= 2 \sqrt{\frac{(1+k^2)(2-k^2)}{(1-k^2)^2}}$$

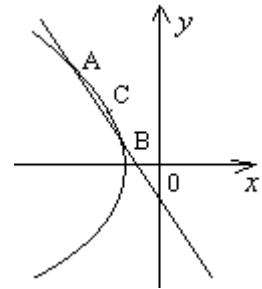
$$\text{依题意得 } 2 \sqrt{\frac{(1+k^2)(2-k^2)}{(1-k^2)^2}} = 6\sqrt{3}$$

$$\text{整理后得 } 28k^4 - 55k^2 + 25 = 0$$

$$\therefore k^2 = \frac{5}{7} \text{ 或 } k^2 = \frac{5}{4}$$

$$\text{但 } -\sqrt{2} < k < -1 \quad \therefore k = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{故直线 } AB \text{ 的方程为 } \frac{\sqrt{5}}{2}x + y + 1 = 0$$



$$\text{设 } C(x_0, y_0), \text{ 由已知 } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = m\overrightarrow{OC}, \text{ 得 } (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (mx_0, my_0)$$

$$\therefore (x_0, y_0) = \left(\frac{x_1 + x_2}{m}, \frac{y_1 + y_2}{m} \right), (m \neq 0)$$

$$\text{又 } x_1 + x_2 = \frac{2}{k^2 - 1} = -4\sqrt{5}, \quad y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) - 2 = \frac{2k^2}{k^2 - 1} - 2 = \frac{2}{k^2 - 1} = 8$$

$$\therefore \text{点 } C \left(\frac{-4\sqrt{5}}{m}, \frac{8}{m} \right)$$

$$\text{将点 } C \text{ 的坐标代入曲线 } E \text{ 的方程, 得 } \frac{80}{m^2} - \frac{64}{m^2} = 1 \text{ 得 } m = \pm 4,$$

但当 $m = -4$ 时, 所得的点在双曲线的右支上, 不合题意

$$\therefore m = 4, \text{ 点 } C \text{ 的坐标为 } (-\sqrt{5}, 2)$$

$$C \text{ 到 } AB \text{ 的距离为 } \frac{\left| \frac{\sqrt{5}}{2} \times (-\sqrt{5}) + 2 + 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times \frac{1}{3} = \sqrt{3}$$