

2009 年高考数学浙江理科试卷含详细解答

一、选择题（本大题共 10 小题，共 0 分）

1. (2009 浙江理 1) 设 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x | x > 0\}$, $B = \{x | x > 1\}$, 则 $A \cap C_U B = (\quad)$

- A. $\{x | 0 \leq x < 1\}$ B. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ C. $\{x | x < 0\}$ D. $\{x | x > 1\}$

【答案】B

2. (2009 浙江理 2) 已知 a, b 是实数, 则“ $a > 0$ 且 $b > 0$ ”是“ $a + b > 0$ 且 $ab > 0$ ”的()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解题关键点】对于“ $a > 0$ 且 $b > 0$ ”可以推出“ $a + b > 0$ 且 $ab > 0$ ”，反之也是成立的

3. (2009 浙江理 3) 设 $z = 1 + i$ (i 是虚数单位), 则 $\frac{2}{z} + z^2 = (\quad)$

- A. $-1 - i$ B. $-1 + i$ C. $1 - i$ D. $1 + i$

【答案】D

【解题关键点】对于 $\frac{2}{z} + z^2 = \frac{2}{1+i} + (1+i)^2 = 1 - i + 2i = 1 + i$

4. (2009 浙江理 4) 在二项式 $(x^2 - \frac{1}{x})^5$ 的展开式中, 含 x^4 的项的系数是().

- A. -10 B. 10 C. -5 D. 5

【答案】B

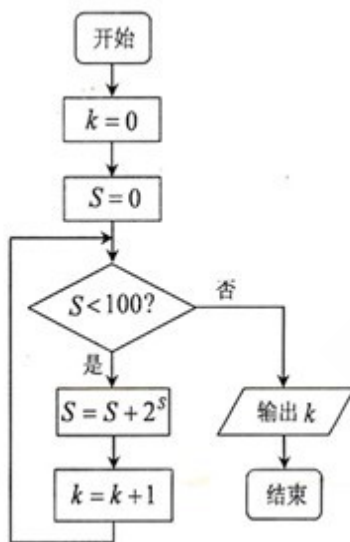
【解题关键点】对于 $T_{r+1} = C_5^r (x^2)^{5-r} (-\frac{1}{x})^r = (-1)^r C_5^r x^{10-3r}$, 对于 $10-3r=4, \therefore r=2$, 则 x^4 的项的系数是 $C_5^2 (-1)^2 = 10$

5. (2009 浙江理 5) 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 各棱长相等, 侧棱垂直于底面, 点 D 是侧面 BB_1C_1C 的中心, 则 AD 与平面 BB_1C_1C 所成角的大小是()
- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

【答案】C

【解题关键点】取 BC 的中点 E , 则 $AE \perp$ 面 BB_1C_1C , $\therefore AE \perp DE$, 因此 AD 与平面 BB_1C_1C 所成角即为 $\angle ADE$, 设 $AB = a$, 则 $AE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $DE = \frac{a}{2}$, 即有 $\tan \angle ADE = \sqrt{3}, \therefore \angle ADE = 60^\circ$

6. (2009 浙江理 6) 某程序框图如图所示, 该程序运行后输出的 k 的值是()



- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

【答案】A

【解题关键点】对于 $k=0, s=1, \therefore k=1$, 而对于 $k=1, s=3, \therefore k=2$, 则 $k=2, s=3+8, \therefore k=3$, 后面是 $k=3, s=3+8+2^{11}, \therefore k=4$, 不符合条件时输出的 $k=4$.

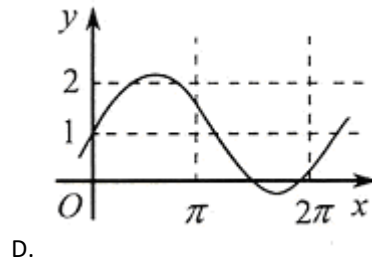
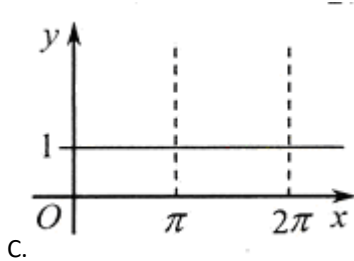
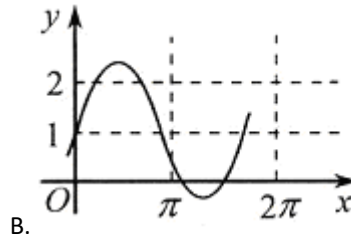
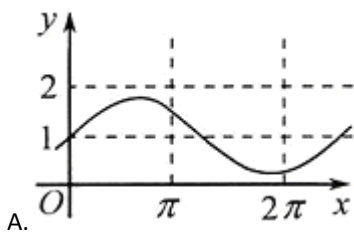
7. (2009 浙江理 7) 设向量 a, b 满足: $|a|=3, |b|=4, a \cdot b=0$. 以 $a, b, a-b$ 的模为边长构成三角形, 则它的边与半径为 1 的圆的公共点个数最多为().

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【答案】B

【解题关键点】对于半径为 1 的圆有一个位置是正好是三角形的内切圆，此时只有三个交点，对于圆的位置稍一右移或其他的变化，能实现 4 个交点的情况，但 5 个及 5 个以上的交点不能实现。

8. (2009 浙江理 8) 已知 a 是实数，则函数 $f(x) = 1 + a \sin ax$ 的图象不可能是()



【答案】D

【解题关键点】对于振幅大于 1 时，三角函数的周期为 $T = \frac{2\pi}{|a|}$, $\because |a| > 1, \therefore T < 2\pi$ ，而 D 不符合要求，它的振幅大于 1，但周期反而大于了 2π 。

9. (2009 浙江理 9) 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右顶点 A 作斜率为 -1 的直线，该直线

与双曲线的两条渐近线的交点分别为 B, C 。若 $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$ ，则双曲线的离心率是()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{10}$

【答案】C

【解题关键点】对于 $A(a, 0)$ ，则直线方程为 $x + y - a = 0$ ，直线与两渐近线的交点为 B, C ，

$$B\left(\frac{a^2}{a+b}, \frac{ab}{a+b}\right), C\left(\frac{a^2}{a-b}, -\frac{ab}{a-b}\right),$$

则有 $\overrightarrow{BC} = \left(\frac{2a^2b}{a^2-b^2}, -\frac{2a^2b}{a^2-b^2}\right), \overrightarrow{AB} = \left(-\frac{ab}{a+b}, \frac{ab}{a+b}\right)$, 因 $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}, \therefore 4a^2 = b^2, \therefore e = \sqrt{5}$.

10. (2009 浙江理 10) 对于正实数 α , 记 M_α 为满足下述条件的函数 $f(x)$ 构成的集合: $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ 且 $x_2 > x_1$, 有 $-\alpha(x_2 - x_1) < f(x_2) - f(x_1) < \alpha(x_2 - x_1)$. 下列结论中正确的是()

A. 若 $f(x) \in M_{\alpha_1}, g(x) \in M_{\alpha_2}$, 则 $f(x) \cdot g(x) \in M_{\alpha_1 \alpha_2}$

B. 若 $f(x) \in M_{\alpha_1}, g(x) \in M_{\alpha_2}$, 且 $g(x) \neq 0$, 则 $\frac{f(x)}{g(x)} \in M_{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$

C. 若 $f(x) \in M_{\alpha_1}, g(x) \in M_{\alpha_2}$, 则 $f(x) + g(x) \in M_{\alpha_1 + \alpha_2}$

D. 若 $f(x) \in M_{\alpha_1}, g(x) \in M_{\alpha_2}$, 且 $\alpha_1 > \alpha_2$, 则 $f(x) - g(x) \in M_{\alpha_1 - \alpha_2}$

【答案】C

【解题关键点】对于 $-\alpha(x_2 - x_1) < f(x_2) - f(x_1) < \alpha(x_2 - x_1)$, 即有 $-\alpha < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \alpha$,

令 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k$, 有 $-\alpha < k < \alpha$, 不妨设 $f(x) \in M_{\alpha_1}, g(x) \in M_{\alpha_2}$, 即有 $-\alpha_1 < k_f < \alpha_1, -\alpha_2 < k_g < \alpha_2$, 因此有 $-\alpha_1 - \alpha_2 < k_f + k_g < \alpha_1 + \alpha_2$, 因此有 $f(x) + g(x) \in M_{\alpha_1 + \alpha_2}$.

二、填空题 (本大题共 7 小题, 共 0 分)

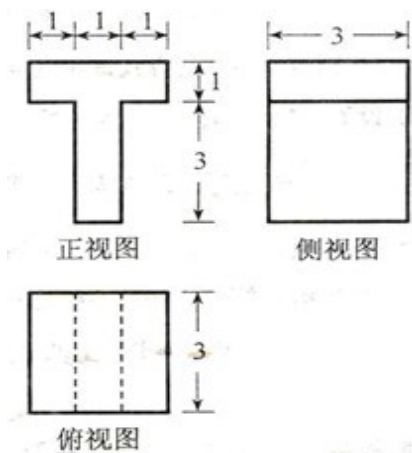
11. (2009 浙江理 11) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q = \frac{1}{2}$, 前 n 项和为 S_n , 则 $\frac{S_4}{a_4} =$ _____.

【答案】15

$$s_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q}, a_4 = a_1q^3, \therefore \frac{s_4}{a_4} = \frac{1-q^4}{q^3(1-q)} = 15$$

【解题关键点】对于

12. (2009 浙江理 12) 若某几何体的三视图 (单位: cm) 如图所示, 则此几何体的体积是 cm^3 .



【答案】18

【解题关键点】该几何体是由二个长方体组成, 下面体积为 $1 \times 3 \times 3 = 9$, 上面的长方体体积为 $3 \times 3 \times 1 = 9$, 因此其几何体的体积为 18

13. (2009 浙江理 13) 若实数 x, y 满足不等式组
$$\begin{cases} x + y \geq 2, \\ 2x - y \leq 4, \\ x - y \geq 0, \end{cases}$$
 则 $2x + 3y$ 的最小值是_____

【答案】4

【解题关键点】通过画出其线性规划, 可知直线 $y = -\frac{2}{3}x + Z$ 过点 $(2, 0)$ 时, $(2x + 3y)_{\min} = 4$

14. (2009 浙江理 14) 某地区居民生活用电分为高峰和低谷两个时间段进行分时计价. 该地区的电网销售电价表如下:

高峰时段用电价格表		低谷时段用电价格表	
高峰月用电量 (单位: 千瓦时)	高峰电价 (单位: 元/千瓦时)	低谷月用电量 (单位: 千瓦时)	低谷电价 (单位: 元/千瓦时)
50 及以下的部分	0.568	50 及以下的部分	0.288
超过 50 至 200 的部分	0.598	超过 50 至 200 的部分	0.318
超过 200 的部分	0.668	超过 200 的部分	0.388

若某家庭 5 月份的高峰时段用电量为 200 千瓦时, 低谷时段用电量为 100 千瓦时, 则按这种计费方式该家庭本月应付的电费为 _____ 元 (用数字作答) . .

【答案】 148.4

【解题关键点】 对于应付的电费应分二部分构成, 高峰部分为 $50 \times 0.568 + 150 \times 0.598$; 对于低谷部分为 $50 \times 0.288 + 50 \times 0.318$, 二部分之和为 148.4

15. (2009 浙江理 15) 观察下列等式:

$$C_5^1 + C_5^5 = 2^3 - 2,$$

$$C_9^1 + C_9^5 + C_9^9 = 2^7 + 2^3,$$

$$C_{13}^1 + C_{13}^5 + C_{13}^9 + C_{13}^{13} = 2^{11} - 2^5,$$

$$C_{17}^1 + C_{17}^5 + C_{17}^9 + C_{17}^{13} + C_{17}^{17} = 2^{15} + 2^7,$$

.....

由以上等式推测到一个一般的结论:

对于 $n \in N^*$, $C_{4n+1}^1 + C_{4n+1}^5 + C_{4n+1}^9 + \cdots + C_{4n+1}^{4n+1} = \underline{\hspace{2cm}}$. .

【答案】 $2^{4n-1} + (-1)^n 2^{2n-1}$

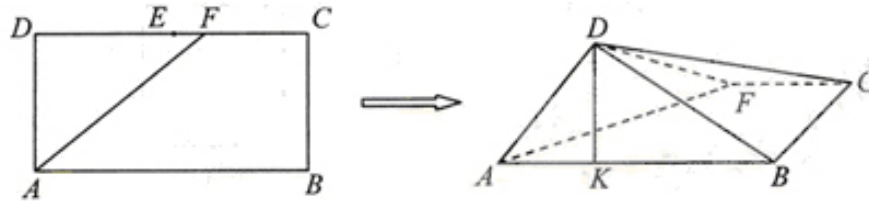
【解题关键点】 这是一种需类比推理方法破解的问题, 结论由二项构成, 第二项前有 $(-1)^n$, 二项指数分别为 $2^{4n-1}, 2^{2n-1}$, 因此对于 $n \in N^*$, $C_{4n+1}^1 + C_{4n+1}^5 + C_{4n+1}^9 + \cdots + C_{4n+1}^{4n+1} = 2^{4n-1} + (-1)^n 2^{2n-1}$

16. (2009 浙江理 16) 甲、乙、丙 3 人站到共有 7 级的台阶上, 若每级台阶最多站 2 人, 同一级台阶上的人不区分站的位置, 则不同的站法种数是 _____ (用数字作答).

【答案】 336

【解题关键点】 对于 7 个台阶上每一个只站一人, 则有 A_7^3 种; 若有一个台阶有 2 人, 另一个是 1 人, 则共有 $C_3^1 A_7^2$ 种, 因此共有不同的站法种数是 336 种.

17. (2009 浙江理 17) 如图, 在长方形 $ABCD$ 中, $AB=2$, $BC=1$, E 为 DC 的中点, F 为线段 EC (端点除外) 上一动点. 现将 $\triangle AFD$ 沿 AF 折起, 使平面 $ABD \perp$ 平面 ABC . 在平面 ABD 内过点 D 作 $DK \perp AB$, K 为垂足. 设 $AK=t$, 则 t 的取值范围是 _____.



(第 17 题)

【答案】 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

【解题关键点】 此题的破解可采用二个极端位置法, 即对于 F 位于 DC 的中点时, $t=1$, 随着 F 点到 C 点时, 因 $CB \perp AB, CB \perp DK, \therefore CB \perp$ 平面 ADB , 即有 $CB \perp BD$, 对于

$CD=2, BC=1, \therefore BD=\sqrt{3}$, 又 $AD=1, AB=2$, 因此有 $AD \perp BD$, 则有 $t=\frac{1}{2}$, 因此 t 的取

值范围是 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

三、解答题 (本大题共 5 小题, 共 0 分)

18. (2009 浙江理 18) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $\cos \frac{A}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$. (I) 求 $\triangle ABC$ 的面积; (II) 若 $b+c=6$, 求 a 的值.

【答案】解析: (I) 因为 $\cos \frac{A}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\therefore \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 = \frac{3}{5}$, $\sin A = \frac{4}{5}$, 又由

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3, \text{ 得 } bc \cos A = 3, \therefore bc = 5, \therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = 2$$

(II) 对于 $bc=5$, 又 $b+c=6$, $\therefore b=5, c=1$ 或 $b=1, c=5$, 由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 20$, $\therefore a = 2\sqrt{5}$

19. (2009 浙江理 19) 在 $1, 2, 3, \dots, 9$ 这 9 个自然数中, 任取 3 个数.

(I) 求这 3 个数中恰有 1 个是偶数的概率;

(II) 设 ξ 为这 3 个数中两数相邻的组数 (例如: 若取出的数为 $1, 2, 3$, 则有两组相邻的数 $1, 2$ 和 $2, 3$, 此时 ξ 的值是 2). 求随机变量 ξ 的分布列及其数学期望 $E\xi$.

$$P(A) = \frac{C_4^1 C_5^2}{C_9^3} = \frac{10}{21};$$

【答案】(I) 记“这 3 个数恰有一个是偶数”为事件 A, 则

(II) 随机变量 ξ 的取值为 $0, 1, 2, \xi$ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

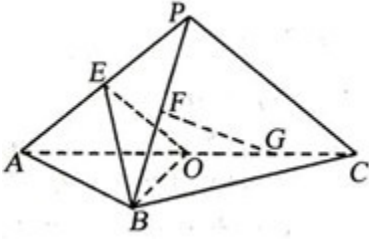
所以 ξ 的数学期望为 $E\xi = 0 \times \frac{5}{12} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$.

20. (2009 浙江理 20) 如图, 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC , $\triangle ABC$ 是以 AC 为斜边的等腰直角三角形,

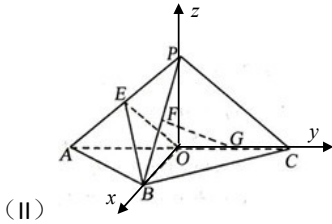
E, F, O 分别为 PA, PB, AC 的中点, $AC=16, PA=PC=10$.

(I) 设 G 是 OC 的中点, 证明: $FG \parallel$ 平面 BOE ;

(II) 证明: 在 $\triangle ABO$ 内存在一点 M , 使 $FM \perp$ 平面 BOE , 并求点 M 到 OA, OB 的距离.



【答案】证明: (I) 如图, 连结 OP , 以 O 为坐标原点, 分别以 OB, OC, OP 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系 $O-xyz$, 则 $O(0,0,0), A(0,-8,0), B(8,0,0), C(0,8,0), P(0,0,6), E(0,-4,3), F(4,0,3)$, 由题意得, $G(0,4,0)$, 因 $\overrightarrow{OB} = (8,0,0), \overrightarrow{OE} = (0,-4,3)$, 因此平面 BOE 的法向量为 $\vec{n} = (0,3,4)$, $\overrightarrow{FG} = (-4,4,-3)$ 得 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{FG} = 0$, 又直线 FG 不在平面 BOE 内, 因此有 $FG \parallel$ 平面 BOE



设点 M 的坐标为 $(x_0, y_0, 0)$, 则 $\overrightarrow{FM} = (x_0 - 4, y_0, -3)$, 因为 $FM \perp$ 平面 BOE , 所以有 $\overrightarrow{FM} \parallel \vec{n}$,

因此有 $x_0 = 4, y_0 = -\frac{9}{4}$, 即点 M 的坐标为 $(4, -\frac{9}{4}, 0)$, 在平面直角坐标系 xoy 中, $\triangle AOB$ 的内部

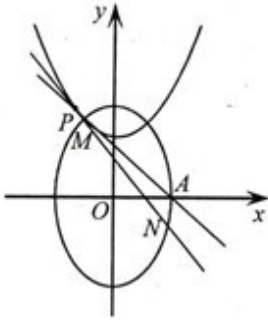
区域满足不等式组 $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ x - y < 8 \end{cases}$, 经检验, 点 M 的坐标满足上述不等式组, 所以在 $\triangle ABO$ 内存在一

点 M , 使 $FM \perp$ 平面 BOE , 由点 M 的坐标得点 M 到 OA, OB 的距离为 $4, \frac{9}{4}$.

21. (2009 浙江理 21) 已知椭圆 $C_1: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点为 $A(1, 0)$, 过 C_1 的焦点且垂直长轴的弦长为 1。

(I) 求椭圆 C_1 的方程;

(II) 设点 P 在抛物线 $C_2: y = x^2 + h (h \in \mathbf{R})$ 上, C_2 在点 P 处的切线与 C_1 交于点 M, N 当线段 AP 的中点与 MN 的中点的横坐标相等时, 求 h 的最小值。



【答案】解析: (I) 由题意得 $\begin{cases} b=1 \\ 2 \cdot \frac{b^2}{a} = 1 \end{cases}, \therefore \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$, 所求的椭圆方程为 $\frac{y^2}{4} + x^2 = 1$,

(II) 不妨设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), P(t, t^2 + h)$, 则抛物线 C_2 在点 P 处的切线斜率为 $y'|_{x=t} = 2t$, 直线 MN 的方程为 $y = 2tx - t^2 + h$, 将上式代入椭圆 C_1 的方程中, 得 $4x^2 + (2tx - t^2 + h)^2 - 4 = 0$,

即 $4(1+t^2)x^2 - 4t(t^2-h)x + (t^2-h)^2 - 4 = 0$, 因为直线 MN 与椭圆 C_1 有两个不同的交点, 所以有 $\Delta_1 = 16[-t^4 + 2(h+2)t^2 - h^2 + 4] > 0$,

设线段 MN 的中点的横坐标是 x_3 , 则 $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{t(t^2 - h)}{2(1+t^2)}$,

设线段 PA 的中点的横坐标是 x_4 , 则 $x_4 = \frac{t+1}{2}$, 由题意得 $x_3 = x_4$, 即有 $t^2 + (1+h)t + 1 = 0$, 其中的 $\Delta_2 = (1+h)^2 - 4 \geq 0, \therefore h \geq 1$ 或 $h \leq -3$;

当 $h \leq -3$ 时有 $h+2 < 0, 4-h^2 < 0$, 因此不等式 $\Delta_1 = 16[-t^4 + 2(h+2)t^2 - h^2 + 4] > 0$ 不成立;

因此 $h \geq 1$, 当 $h=1$ 时代入方程 $t^2 + (1+h)t + 1 = 0$ 得 $t = -1$, 将 $h=1, t=-1$ 代入不等式 $\Delta_1 = 16[-t^4 + 2(h+2)t^2 - h^2 + 4] > 0$ 成立, 因此 h 的最小值为 1.

22. (2009 浙江理 22) 已知函数 $f(x) = x^3 - (k^2 - k + 1)x^2 + 5x - 2$, $g(x) = k^2x^2 + kx + 1$, 其中 $k \in \mathbf{R}$.

(I) 设函数 $p(x) = f(x) + g(x)$. 若 $p(x)$ 在区间 $(0, 3)$ 上不单调, 求 k 的取值范围;

(II) 设函数 $q(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0, \\ f(x), & x < 0. \end{cases}$ 是否存在 k , 对任意给定的非零实数 x_1 , 存在唯一的非零实数 x_2 ($x_2 \neq x_1$), 使得 $q'(x_2) = q'(x_1)$ 成立? 若存在, 求 k 的值; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 解析: (I) 因 $P(x) = f(x) + g(x) = x^3 + (k-1)x^2 + (k+5)x - 1$, $p'(x) = 3x^2 + 2(k-1)x + (k+5)$, 因 $p(x)$ 在区间 $(0, 3)$ 上不单调, 所以 $p'(x) = 0$ 在 $(0, 3)$ 上有实数解, 且无重根, 由 $p'(x) = 0$ 得 $k(2x+1) = -(3x^2 - 2x + 5)$,

$$\therefore k = -\frac{(3x^2 - 2x + 5)}{2x+1} = -\frac{3}{4} \left[(2x+1) + \frac{9}{2x+1} - \frac{10}{3} \right], \quad \text{令 } t = 2x+1, \text{ 有 } t \in (1, 7), \quad \text{记}$$

$h(t) = t + \frac{9}{t}$, 则 $h(t)$ 在 $(1, 3]$ 上单调递减, 在 $[3, 7)$ 上单调递增, 所以有 $h(t) \in [6, 10)$, 于是

$$(2x+1) + \frac{9}{2x+1} \in [6, 10), \quad \text{得 } k \in (-5, -2], \quad \text{而当 } k = -2 \text{ 时有 } p'(x) = 0 \text{ 在 } (0, 3) \text{ 上有两个相等的实根 } x = 1, \text{ 故舍去, 所以 } k \in (-5, -2);$$

(II) 当 $x < 0$ 时有 $q'(x) = f'(x) = 3x^2 - 2(k^2 - k + 1)x + 5$;

当 $x > 0$ 时有 $q'(x) = g'(x) = 2k^2x + k$, 因为当 $k = 0$ 时不合题意, 因此 $k \neq 0$,

下面讨论 $k \neq 0$ 的情形，记 $A = (k, +\infty)$ ， $B = (5, +\infty)$ (i) 当 $x_1 > 0$ 时， $q'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，所以要使 $q'(x_2) = q'(x_1)$ 成立，只能 $x_2 < 0$ 且 $A \subseteq B$ ，因此有 $k \geq 5$ ，(ii) 当 $x_1 < 0$ 时， $q'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，所以要使 $q'(x_2) = q'(x_1)$ 成立，只能 $x_2 > 0$ 且 $A \subseteq B$ ，因此 $k \leq 5$ ，综合 (i) (ii) $k = 5$ ；

当 $k = 5$ 时 $A=B$ ，则 $\forall x_1 < 0, q'(x_1) \in B = A$ ，即 $\exists x_2 > 0$ ，使得 $q'(x_2) = q'(x_1)$ 成立，因为 $q'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，所以 x_2 的值是唯一的；

同理， $\forall x_1 < 0$ ，即存在唯一的非零实数 $x_2 (x_2 \neq x_1)$ ，要使 $q'(x_2) = q'(x_1)$ 成立，所以 $k = 5$ 满足题意。