

2024 年普通高等学校招生全国统一考试

全国甲卷理科数学

使用范围：陕西、宁夏、青海、内蒙古、四川

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后，只将答题卡交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $z = 5 + i$ ，则 $i(\bar{z} + z) =$ ()

- A. $10i$ B. $2i$ C. 10 D. -2

2. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{x \mid \sqrt{x} \in A\}$ ，则 $\partial_A(A \cap B) =$ ()

- A. $\{1, 4, 9\}$ B. $\{3, 4, 9\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{2, 3, 5\}$

3. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 4x - 3y - 3 \geq 0 \\ x - 2y - 2 \leq 0 \\ 2x + 6y - 9 \leq 0 \end{cases}$ ，则 $z = x - 5y$ 的最小值为 ()

- A. 5 B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. $-\frac{7}{2}$

4. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_5 = S_{10}$ ， $a_5 = 1$ ，则 $a_1 =$ ()

- A. -2 B. $\frac{7}{3}$ C. 1 D. 2

5. 已知双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的上、下焦点分别为 $F_1(0, 4), F_2(0, -4)$ ，点 $P(-6, 4)$ 在该双曲

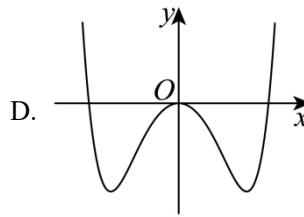
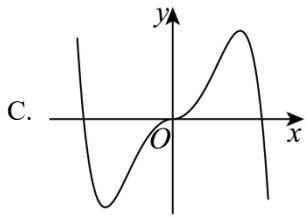
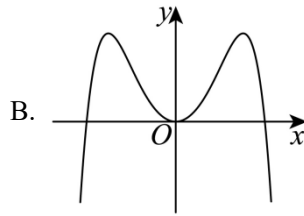
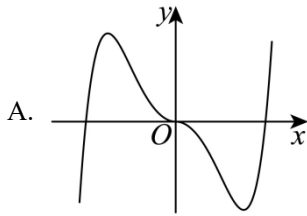
线上，则该双曲线的离心率为 ()

- A. 4 B. 3 C. 2 D. $\sqrt{2}$

6. 设函数 $f(x) = \frac{e^x + 2\sin x}{1+x^2}$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $(0,1)$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积为 ()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

7. 函数 $f(x) = -x^2 + (e^x - e^{-x})\sin x$ 在区间 $[-2.8, 2.8]$ 的大致图像为 ()



8. 已知 $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sqrt{3}$, 则 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ ()

- A. $2\sqrt{3}+1$ B. $2\sqrt{3}-1$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $1-\sqrt{3}$

9. 已知向量 $\vec{a} = (x+1, x)$, $\vec{b} = (x, 2)$, 则 ()

- A. “ $x = -3$ ”是“ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ”的必要条件 B. “ $x = -3$ ”是“ $\vec{a} // \vec{b}$ ”的必要条件
C. “ $x = 0$ ”是“ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ”的充分条件 D. “ $x = -1 + \sqrt{3}$ ”是“ $\vec{a} // \vec{b}$ ”的充分条件

10. 设 α 、 β 是两个平面, m 、 n 是两条直线, 且 $\alpha \cap \beta = m$. 下列四个命题:

- ①若 $m // n$, 则 $n // \alpha$ 或 $n // \beta$ ②若 $m \perp n$, 则 $n \perp \alpha, n \perp \beta$
③若 $n // \alpha$, 且 $n // \beta$, 则 $m // n$ ④若 n 与 α 和 β 所成的角相等, 则 $m \perp n$

其中所有真命题的编号是 ()

- A. ①③ B. ②④ C. ①②③ D. ①③④

11. 在 $\triangle ABC$ 中内角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c , 若 $B = \frac{\pi}{3}$, $b^2 = \frac{9}{4}ac$, 则 $\sin A + \sin C =$ ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. 已知 b 是 a, c 的等差中项, 直线 $ax + by + c = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB|$ 的最小值为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. $2\sqrt{5}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $\left(\frac{1}{3} + x\right)^{10}$ 的展开式中, 各项系数的最大值是_____.

14. 已知甲、乙两个圆台上、下底面的半径均为 r_1 和 r_2 , 母线长分别为 $2(r_2 - r_1)$ 和 $3(r_2 - r_1)$, 则两个圆台的体积之比 $\frac{V_{甲}}{V_{乙}} =$ _____.

15. 已知 $a > 1$, $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = -\frac{5}{2}$, 则 $a =$ _____.

16. 有 6 个相同的球, 分别标有数字 1、2、3、4、5、6, 从中不放回地随机抽取 3 次, 每次取 1 个球. 记 m 为前两次取出的球上数字的平均值, n 为取出的三个球上数字的平均值, 则 m 与 n 差的绝对值不超过 $\frac{1}{2}$ 的概率是_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤. 第 17 题~第 21 题为必考题, 每个考题考生必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. 某工厂进行生产线智能化升级改造, 升级改造后, 从该工厂甲、乙两个车间的产品中随机抽取 150 件进行检验, 数据如下:

	优级品	合格品	不合格品	总计
甲车间	26	24	0	50
乙车间	70	28	2	100
总计	96	52	2	150

(1) 填写如下列联表:

	优级品	非优级品
甲车间		

乙车间		
-----	--	--

能否有 95% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异？能否有 99% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异？

(2) 已知升级改造前该工厂产品的优级品率 $p = 0.5$ ，设 \bar{p} 为升级改造后抽取的 n 件产品的优级品率. 如果

$\bar{p} > p + 1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ ，则认为该工厂产品的优级品率提高了，根据抽取的 150 件产品的数据，能否认为

为生产线智能化升级改造后，该工厂产品的优级品率提高了？（ $\sqrt{150} \approx 12.247$ ）

附：
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

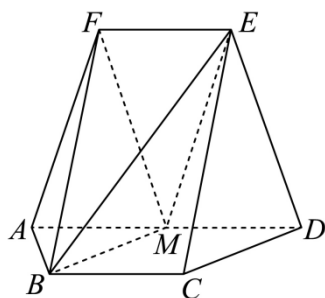
$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $4S_n = 3a_n + 4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = (-1)^{n-1}na_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

19. 如图，在以 A, B, C, D, E, F 为顶点的五面体中，四边形 $ABCD$ 与四边形 $ADEF$ 均为等腰梯形， $BC \parallel AD, EF \parallel AD$ ， $AD = 4, AB = BC = EF = 2$ ， $ED = \sqrt{10}, FB = 2\sqrt{3}$ ， M 为 AD 的中点.



(1) 证明： $BM \parallel$ 平面 CDE ；

(2) 求二面角 $F - BM - E$ 的正弦值.

20. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F ，点 $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 在 C 上，且 $MF \perp x$ 轴.

(1) 求 C 的方程；

(2) 过点 $P(4,0)$ 的直线与 C 交于 A, B 两点, N 为线段 FP 的中点, 直线 NB 交直线 MF 于点 Q , 证明: $AQ \perp y$ 轴.

21. 已知函数 $f(x) = (1-ax)\ln(1+x) - x$.

(1) 当 $a = -2$ 时, 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分, 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 并用 2B 铅笔将所选题号涂黑, 多涂、错涂、漏涂均不给分, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

[选修 4-4: 坐标系与参数方程]

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = \rho \cos \theta + 1$.

(1) 写出 C 的直角坐标方程;

(2) 设直线 $l: \begin{cases} x = t \\ y = t + a \end{cases}$ (t 为参数), 若 C 与 l 相交于 A, B 两点, 若 $|AB| = 2$, 求 a 的值.

[选修 4-5: 不等式选讲]

23. 实数 a, b 满足 $a + b \geq 3$.

(1) 证明: $2a^2 + 2b^2 > a + b$;

(2) 证明: $|a - 2b^2| + |b - 2a^2| \geq 6$.