

2007 年山西高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。第 I 卷 1 至 2 页。第 II 卷 3 至 4 页。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷

注意事项：

1. 答题前，考生在答题卡上务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将自己的姓名、准考证号填写清楚，并贴好条形码。请认真核准条形码上的准考证号、姓名和科目。

2. 每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，在试题卷上作答无效。

3. 本卷共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

参考公式：

如果事件 A, B 互斥，那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A, B 相互独立，那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p ，那么

n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0,1,2,\dots,n)$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

一、选择题

(1) α 是第四象限角， $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$ ，则 $\sin \alpha =$ ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $-\frac{1}{5}$ C. $\frac{5}{13}$ D. $-\frac{5}{13}$

(2) 设 a 是实数，且 $\frac{a}{1+i} + \frac{1+i}{2}$ 是实数，则 $a =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

(3) 已知向量 $\mathbf{a} = (-5, 6)$ ， $\mathbf{b} = (6, 5)$ ，则 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} ()

- A. 垂直 B. 不垂直也不平行 C. 平行且同向 D. 平行且反向

(4) 已知双曲线的离心率为 2，焦点是 $(-4, 0)$ ， $(4, 0)$ ，则双曲线方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ B. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ C. $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = 1$ D. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{10} = 1$

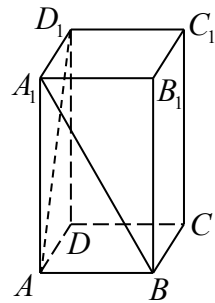
(5) 设 $a, b \in \mathbf{R}$ ，集合 $\{1, a+b, a\} = \{0, \frac{b}{a}, b\}$ ，则 $b-a =$ ()

- A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

(6) 下面给出的四个点中，到直线 $x - y + 1 = 0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，且位于 $\begin{cases} x + y - 1 < 0, \\ x - y + 1 > 0 \end{cases}$ 表示的平面区域内的点是 ()

- A. (1,1) B. (-1,1) C. (-1,-1) D. (1,-1)

(7) 如图，正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1 = 2AB$ ，则异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角的余弦值为 ()



- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

(8) 设 $a > 1$ ，函数 $f(x) = \log_a x$ 在区间 $[a, 2a]$ 上的最大值与最小值之差为 $\frac{1}{2}$ ，则 $a =$ ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 4

(9) $f(x)$ ， $g(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的函数， $h(x) = f(x) + g(x)$ ，则“ $f(x)$ ， $g(x)$ 均为偶函数”是“ $h(x)$ 为偶函数”的 ()

- A. 充要条件 B. 充分而不必要的条件
C. 必要而不充分的条件 D. 既不充分也不必要的条件

(10) $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中，常数项为 15，则 $n =$ ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

(11) 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，准线为 l ，经过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与抛物线在 x 轴上方的部分相交于点 A ， $AK \perp l$ ，垂足为 K ，则 $\triangle AKF$ 的面积是 ()

- A. 4 B. $3\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{3}$ D. 8

(12) 函数 $f(x) = \cos^2 x - 2\cos^2 \frac{x}{2}$ 的一个单调增区间是 ()

- A. $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ B. $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ C. $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ D. $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$

第 II 卷

注意事项：

1. 答题前，考生先在答题卡上用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将自己的姓名、准考证号填写清楚，然后贴好条形码。请认真核准条形码上的准考证号、姓名和科目。

2. 第 II 卷共 2 页，请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，在试题卷上作答无效。

3. 本卷共 10 题, 共 90 分.

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在横线上.

(13) 从班委会 5 名成员中选出 3 名, 分别担任班级学习委员、文娱委员与体育委员, 其中甲、乙二人不能担任文娱委员, 则不同的选法共有_____种. (用数字作答)

(14) 函数 $y = f(x)$ 的图像与函数 $y = \log_3 x (x > 0)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, 则 $f(x) =$ _____.

(15) 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_1, 2S_2, 3S_3$ 成等差数列, 则 $\{a_n\}$ 的公比为_____.

(16) 一个等腰直角三角形的三个顶点分别在正三棱柱的三条侧棱上. 已知正三棱柱的底面边长为 2, 则该三角形的斜边长为_____.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(17) (本小题满分 10 分)

设锐角三角形 ABC 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a = 2b \sin A$.

(I) 求 B 的大小;

(II) 求 $\cos A + \sin C$ 的取值范围.

(18) (本小题满分 12 分)

某商场经销某商品, 根据以往资料统计, 顾客采用的付款期数 ξ 的分布列为

ξ	1	2	3	4	5
P	0.4	0.2	0.2	0.1	0.1

商场经销一件该商品, 采用 1 期付款, 其利润为 200 元; 分 2 期或 3 期付款, 其利润为 250 元; 分 4 期或 5 期付款, 其利润为 300 元. η 表示经销一件该商品的利润.

(I) 求事件 A : “购买该商品的 3 位顾客中, 至少有 1 位采用 1 期付款” 的概率 $P(A)$;

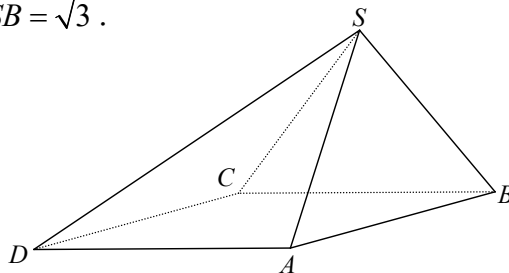
(II) 求 η 的分布列及期望 $E\eta$.

(19) (本小题满分 12 分)

四棱锥 $S-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, 侧面 $SBC \perp$ 底面 $ABCD$. 已知 $\angle ABC = 45^\circ$, $AB = 2$, $BC = 2\sqrt{2}$, $SA = SB = \sqrt{3}$.

(I) 证明 $SA \perp BC$;

(II) 求直线 SD 与平面 SAB 所成角的大小.



(20) (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = e^x - e^{-x}$.

(I) 证明: $f(x)$ 的导数 $f'(x) \geq 2$;

(II) 若对所有 $x \geq 0$ 都有 $f(x) \geq ax$, 求 a 的取值范围.

(21) (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 过 F_1 的直线交椭圆于 B, D 两点, 过 F_2

的直线交椭圆于 A, C 两点, 且 $AC \perp BD$, 垂足为 P .

(I) 设 P 点的坐标为 (x_0, y_0) , 证明: $\frac{x_0^2}{3} + \frac{y_0^2}{2} < 1$;

(II) 求四边形 $ABCD$ 的面积的最小值.

(22) (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = (\sqrt{2} - 1)(a_n + 2)$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若数列 $\{b_n\}$ 中 $b_1 = 2$, $b_{n+1} = \frac{3b_n + 4}{2b_n + 3}$, $n = 1, 2, 3, \dots$,

证明: $\sqrt{2} < b_n \leq a_{4n-3}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

参考答案

一、选择题:

(1) D (2) B (3) A (4) A (5) C (6) C
(7) D (8) D (9) B (10) D (11) C (12) A

二、填空题:

(13) 36 (14) $3^x (x \in \mathbf{R})$ (15) $\frac{1}{3}$ (16) $2\sqrt{3}$

三、解答题:

(17) 解:

(I) 由 $a = 2b \sin A$, 根据正弦定理得 $\sin A = 2 \sin B \sin A$, 所以 $\sin B = \frac{1}{2}$,

由 $\triangle ABC$ 为锐角三角形得 $B = \frac{\pi}{6}$.

(II) $\cos A + \sin C = \cos A + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6} - A\right)$

$= \cos A + \sin\left(\frac{\pi}{6} + A\right)$

$$= \cos A + \frac{1}{2} \cos A + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A$$

$$= \sqrt{3} \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right).$$

由 $\triangle ABC$ 为锐角三角形知,

$$\frac{\pi}{2} - A > \frac{\pi}{2} - B, \quad \frac{\pi}{2} - B = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\frac{2\pi}{3} < A + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{6},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{由此有 } \frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{3} \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3},$$

所以, $\cos A + \sin C$ 的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

(18) 解:

(I) 由 A 表示事件“购买该商品的 3 位顾客中至少有 1 位采用 1 期付款”.

知 \bar{A} 表示事件“购买该商品的 3 位顾客中无人采用 1 期付款”

$$P(\bar{A}) = (1 - 0.4)^2 = 0.216,$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.216 = 0.784.$$

(II) η 的可能取值为 200 元, 250 元, 300 元.

$$P(\eta = 200) = P(\xi = 1) = 0.4,$$

$$P(\eta = 250) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = 0.2 + 0.2 = 0.4,$$

$$P(\eta = 300) = 1 - P(\eta = 200) - P(\eta = 250) = 1 - 0.4 - 0.4 = 0.2.$$

η 的分布列为

η	200	250	300
P	0.4	0.4	0.2

$$E\eta = 200 \times 0.4 + 250 \times 0.4 + 300 \times 0.2$$

$$= 240 \text{ (元)}.$$

(19) 解法一:

(I) 作 $SO \perp BC$ ，垂足为 O ，连结 AO ，由侧面 $SBC \perp$ 底面 $ABCD$ ，得 $SO \perp$ 底面 $ABCD$ 。

因为 $SA = SB$ ，所以 $AO = BO$ ，

又 $\angle ABC = 45^\circ$ ，故 $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形， $AO \perp BO$ ，

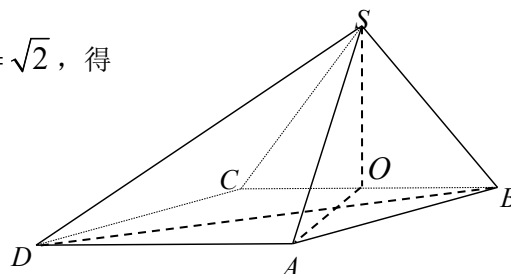
由三垂线定理，得 $SA \perp BC$ 。

(II) 由 (I) 知 $SA \perp BC$ ，依题设 $AD \parallel BC$ ，

故 $SA \perp AD$ ，由 $AD = BC = 2\sqrt{2}$ ， $SA = \sqrt{3}$ ， $AO = \sqrt{2}$ ，得

$$SO = 1, SD = \sqrt{11}.$$

$$\triangle SAB \text{ 的面积 } S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot \sqrt{SA^2 - \left(\frac{1}{2} AB\right)^2} = \sqrt{2}.$$



连结 DB ，得 $\triangle DAB$ 的面积 $S_2 = \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin 135^\circ = 2$

设 D 到平面 SAB 的距离为 h ，由于 $V_{D-SAB} = V_{S-ABD}$ ，得

$$\frac{1}{3} h \cdot S_1 = \frac{1}{3} SO \cdot S_2,$$

解得 $h = \sqrt{2}$ 。

设 SD 与平面 SAB 所成角为 α ，则 $\sin \alpha = \frac{h}{SD} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{22}}{11}$ 。

所以，直线 SD 与平面 SBC 所成的角为 $\arcsin \frac{\sqrt{22}}{11}$ 。

解法二：

(I) 作 $SO \perp BC$ ，垂足为 O ，连结 AO ，由侧面 $SBC \perp$ 底面 $ABCD$ ，得 $SO \perp$ 平面 $ABCD$ 。

因为 $SA = SB$ ，所以 $AO = BO$ 。

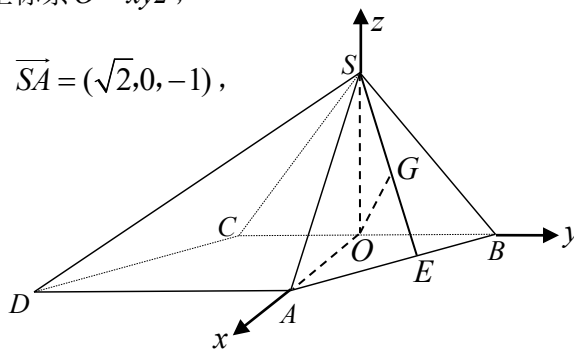
又 $\angle ABC = 45^\circ$ ， $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形， $AO \perp OB$ 。

如图，以 O 为坐标原点， OA 为 x 轴正向，建立直角坐标系 $O-xyz$ ，

$$A(\sqrt{2}, 0, 0), B(0, \sqrt{2}, 0), C(0, -\sqrt{2}, 0), S(0, 0, 1), \overrightarrow{SA} = (\sqrt{2}, 0, -1),$$

$$\overrightarrow{CB} = (0, 2\sqrt{2}, 0), \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0, \text{ 所以 } SA \perp BC.$$

(II) 取 AB 中点 E ， $E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ，



连结 SE ，取 SE 中点 G ，连结 OG ， $G\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right)$ 。

$$\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right), \quad \overrightarrow{SE} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), \quad \overrightarrow{AB} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0).$$

$\overrightarrow{SE} \cdot \overrightarrow{OG} = 0$ ， $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OG} = 0$ ， OG 与平面 SAB 内两条相交直线 SE ， AB 垂直。

所以 $OG \perp$ 平面 SAB ， \overrightarrow{OG} 与 \overrightarrow{DS} 的夹角记为 α ， SD 与平面 SAB 所成的角记为 β ，则 α 与 β 互余。

$$D(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0), \quad \overrightarrow{DS} = (-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 1).$$

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{DS}|}{|\overrightarrow{OG}| \cdot |\overrightarrow{DS}|} = \frac{\sqrt{22}}{11}, \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{22}}{11},$$

所以，直线 SD 与平面 SAB 所成的角为 $\arcsin \frac{\sqrt{22}}{11}$ 。

(20) 解：

(I) $f(x)$ 的导数 $f'(x) = e^x + e^{-x}$ 。

由于 $e^x + e^{-x} \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} = 2$ ，故 $f'(x) \geq 2$ 。

(当且仅当 $x=0$ 时，等号成立)。

(II) 令 $g(x) = f(x) - ax$ ，则

$$g'(x) = f'(x) - a = e^x + e^{-x} - a,$$

(i) 若 $a \leq 2$ ，当 $x > 0$ 时， $g'(x) = e^x + e^{-x} - a > 2 - a \geq 0$ ，

故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，

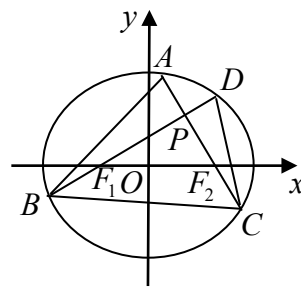
所以， $x \geq 0$ 时， $g(x) \geq g(0) = 0$ ，即 $f(x) \geq ax$ 。

(ii) 若 $a > 2$ ，方程 $g'(x) = 0$ 的正根为 $x_1 = \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ ，

此时，若 $x \in (0, x_1)$ ，则 $g'(x) < 0$ ，故 $g(x)$ 在该区间为减函数。

所以， $x \in (0, x_1)$ 时， $g(x) < g(0) = 0$ ，即 $f(x) < ax$ ，与题设 $f(x) \geq ax$ 相矛盾。

综上，满足条件的 a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$ 。



(21) 证明:

(I) 椭圆的半焦距 $c = \sqrt{3-2} = 1$,

由 $AC \perp BD$ 知点 P 在以线段 F_1F_2 为直径的圆上, 故 $x_0^2 + y_0^2 = 1$,

所以, $\frac{x_2^2}{3} + \frac{y_0^2}{2} \leq \frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{2} = \frac{1}{2} < 1$.

(II) (i) 当 BD 的斜率 k 存在且 $k \neq 0$ 时, BD 的方程为 $y = k(x+1)$, 代入椭圆方程

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1, \text{ 并化简得 } (3k^2 + 2)x^2 + 6k^2x + 3k^2 - 6 = 0.$$

设 $B(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$, 则

$$x_1 + x_2 = -\frac{6k^2}{3k^2 + 2}, \quad x_1x_2 = \frac{3k^2 - 6}{3k^2 + 2}$$

$$|BD| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{(1+k^2) \cdot [(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]} = \frac{4\sqrt{3}(k^2+1)}{3k^2+2},$$

因为 AC 与 BC 相交于点 P , 且 AC 的斜率为 $-\frac{1}{k}$,

$$\text{所以, } |AC| = \frac{4\sqrt{3}\left(\frac{1}{k^2} + 1\right)}{3 \times \frac{1}{k^2} + 2} = \frac{4\sqrt{3}(k^2+1)}{2k^2+3}.$$

四边形 $ABCD$ 的面积

$$S = \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot |AC| = \frac{24(k^2+1)^2}{(3k^2+2)(2k^2+3)} \geq \frac{24(k^2+1)^2}{\left[\frac{(3k^2+2)+(2k^2+3)}{2}\right]^2} = \frac{96}{25}.$$

当 $k^2 = 1$ 时, 上式取等号.

(ii) 当 BD 的斜率 $k = 0$ 或斜率不存在时, 四边形 $ABCD$ 的面积 $S = 4$.

综上, 四边形 $ABCD$ 的面积的最小值为 $\frac{96}{25}$.

(22) 解:

(I) 由题设:

$$a_{n+1} = (\sqrt{2}-1)(a_n+2)$$

$$= (\sqrt{2}-1)(a_n - \sqrt{2}) + (\sqrt{2}-1)(2 + \sqrt{2})$$

$$= (\sqrt{2}-1)(a_n - \sqrt{2}) + \sqrt{2},$$

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)(a_n - \sqrt{2}).$$

所以，数列 $\{a_n - \sqrt{2}\}$ 是首项为 $2 - \sqrt{2}$ ，公比为 $\sqrt{2} - 1$ 的等比数列，

$$a_n - \sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^n,$$

即 a_n 的通项公式为 $a_n = \sqrt{2}[(\sqrt{2}-1)^n + 1]$ ， $n = 1, 2, 3, \dots$.

(II) 用数学归纳法证明.

(i) 当 $n = 1$ 时，因 $\sqrt{2} < 2$ ， $b_1 = a_1 = 2$ ，所以

$$\sqrt{2} < b_1 \leq a_1, \text{ 结论成立.}$$

(ii) 假设当 $n = k$ 时，结论成立，即 $\sqrt{2} < b_k \leq a_{4k-3}$ ，

$$\text{也即 } 0 < b_k - \sqrt{2} \leq a_{4k-3} - \sqrt{3}.$$

当 $n = k + 1$ 时，

$$\begin{aligned} b_{k+1} - \sqrt{2} &= \frac{3b_k + 4}{2b_k + 3} - \sqrt{2} \\ &= \frac{(3-2\sqrt{2})b_k + (4-3\sqrt{2})}{2b_k + 3} \\ &= \frac{(3-2\sqrt{2})(b_k - \sqrt{2})}{2b_k + 3} > 0, \end{aligned}$$

$$\text{又 } \frac{1}{2b_k + 3} < \frac{1}{2\sqrt{2} + 3} = 3 - 2\sqrt{2},$$

$$\text{所以 } b_{k+1} - \sqrt{2} = \frac{(3-2\sqrt{2})(b_k - \sqrt{2})}{2b_k + 3}$$

$$< (3-2\sqrt{2})^2 (b_k - \sqrt{2})$$

$$\leq (\sqrt{2}-1)^4 (a_{4k-3} - \sqrt{2})$$

$$= a_{4k+1} - \sqrt{2}.$$

也就是说，当 $n = k + 1$ 时，结论成立.

根据 (i) 和 (ii) 知 $\sqrt{2} < b_n \leq a_{4n-3}$ ， $n = 1, 2, 3, \dots$.