

# 2003 年山东高考理科数学真题及答案

## 注意事项:

1. 答第 I 卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上.
2. 每小题选出答案后, 用铅笔把答题卡上对应答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案, 不能答在试题卷上.
3. 考试结束, 监考人将本试卷和答题卡一并收回.

参考公式:

三角函数的积化和差公式:

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

正棱台、圆台的侧面积公式

$$S_{\text{台侧}} = \frac{1}{2}(c' + c)l \quad \text{其中 } c', c \text{ 分别表示}$$

上、下底面周长,  $l$  表示斜高或母线长.

球体的体积公式:  $V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3$ , 其中  $R$

表示球的半径.

本试卷分第 I 卷 (选择题) 和第 II 卷 (非选择题) 两部分.

第 I 卷 (选择题共 60 分)

一. 选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合要求的

1. 已知  $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ ,  $\cos x = \frac{4}{5}$ , 则  $\tan 2x =$  ( )

- (A)  $\frac{7}{24}$       (B)  $-\frac{7}{24}$       (C)  $\frac{24}{7}$       (D)  $-\frac{24}{7}$

2. 圆锥曲线  $\rho = \frac{8\sin\theta}{\cos^2\theta}$  的准线方程是 ( )

- (A)  $\rho \cos\theta = -2$       (B)  $\rho \cos\theta = 2$       (C)  $\rho \sin\theta = 2$       (D)  $\rho \sin\theta = -2$

3. 设函数  $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1 & x \leq 0 \\ \frac{1}{x^2} & x > 0 \end{cases}$ , 若  $f(x_0) > 1$ , 则  $x_0$  的取值范围是 ( )

- (A)  $(-1, 1)$       (B)  $(-1, +\infty)$   
(C)  $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$       (D)  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

4. 函数  $y = 2\sin x(\sin x + \cos x)$  的最大值为 ( )
- (A)  $1 + \sqrt{2}$       (B)  $\sqrt{2} - 1$       (C)  $\sqrt{2}$       (D) 2
5. 已知圆  $C: (x-a)^2 + (y-2)^2 = 4$  ( $a > 0$ ) 及直线  $l: x - y + 3 = 0$ , 当直线  $l$  被  $C$  截得的弦长为  $2\sqrt{3}$  时, 则  $a$  ( )
- (A)  $\sqrt{2}$       (B)  $2 - \sqrt{2}$       (C)  $\sqrt{2} - 1$       (D)  $\sqrt{2} + 1$
6. 已知圆锥的底面半径为  $R$ , 高为  $3R$ , 在它的所有内接圆柱中, 全面积的最大值是 ( )
- (A)  $2\pi R^2$       (B)  $\frac{9}{4}\pi R^2$       (C)  $\frac{8}{3}\pi R^2$       (D)  $\frac{3}{2}\pi R^2$
7. 已知方程  $(x^2 - 2x + m)(x^2 - 2x + n) = 0$  的四个根组成一个首项为  $\frac{1}{4}$  的等差数列, 则  $|m - n| =$  ( )
- (A) 1      (B)  $\frac{3}{4}$       (C)  $\frac{1}{2}$       (D)  $\frac{3}{8}$
8. 已知双曲线中心在原点且一个焦点为  $F(\sqrt{7}, 0)$ , 直线  $y = x - 1$  与其相交于  $M, N$  两点,  $MN$  中点的横坐标为  $-\frac{2}{3}$ , 则此双曲线的方程是 ( )
- (A)  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$       (B)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$       (C)  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$       (D)  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1$
9. 函数  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  的反函数  $f^{-1}(x) =$  ( )
- (A)  $-\arcsin x$   $x \in [-1, 1]$       (B)  $-\pi - \arcsin x$   $x \in [-1, 1]$
- (C)  $\pi + \arcsin x$   $x \in [-1, 1]$       (D)  $\pi - \arcsin x$   $x \in [-1, 1]$
10. 已知长方形的四个顶点  $A(0, 0)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $C(2, 1)$  和  $D(0, 1)$ , 一质点从  $AB$  的中点  $P_0$  沿与  $AB$  的夹角  $\theta$  的方向射到  $BC$  上的点  $P_1$  后, 依次反射到  $CD$ 、 $DA$  和  $AB$  上的点  $P_2$ 、 $P_3$  和  $P_4$  (入射角等于反射角), 设  $P_4$  的坐标为  $(x_4, 0)$ , 若  $1 < x_4 < 2$ , 则  $\text{tg}\theta$  的取值范围是 ( )
- (A)  $(\frac{1}{3}, 1)$       (B)  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$       (C)  $(\frac{2}{5}, \frac{1}{2})$       (D)  $(\frac{2}{5}, \frac{2}{3})$

11.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \dots + C_n^2}{n(C_2^1 + C_3^1 + C_4^1 + \dots + C_n^1)} =$  ( )

- (A) 3      (B)  $\frac{1}{3}$       (C)  $\frac{1}{6}$       (D) 6

12. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$ ，四个顶点在同一球面上，则此球的表面积为 ( )

- (A)  $3\pi$       (B)  $4\pi$       (C)  $3\sqrt{3}\pi$       (D)  $6\pi$

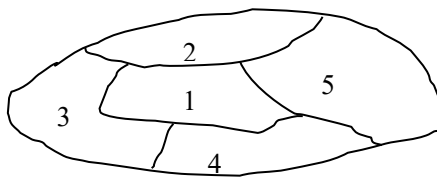
**第II卷** (非选择题共 90 分)

二. 填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.

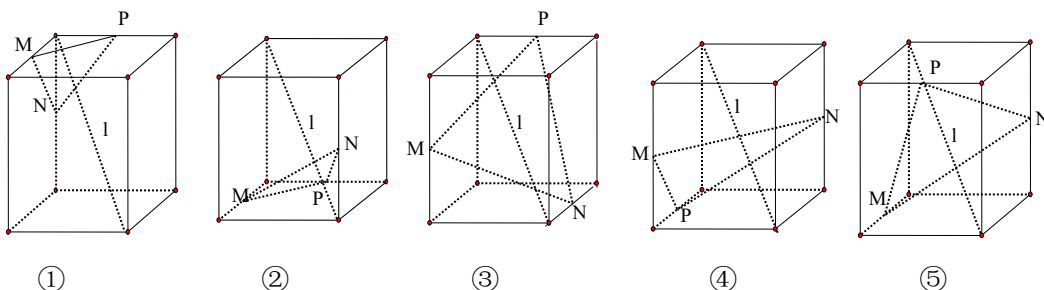
13.  $(x^2 - \frac{1}{2x})^9$  的展开式中  $x^9$  系数是 \_\_\_\_\_

14. 使  $\log_2(-x) < x+1$  成立的  $x$  的取值范围是 \_\_\_\_\_

15. 如图, 一个地区分为 5 个行政区域, 现给地图着色, 要求相邻地区不得使用同一颜色, 现有 4 种颜色可供选择, 则不同的着色方法共有种. (以数字作答)



16. 下列 5 个正方体图形中,  $l$  是正方体的一条对角线, 点 M、N、P 分别为其所在棱的中点, 能得出  $l \perp$  面 MNP 的图形的序号是 (写出所有符合要求的图形序号)



三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤

17. (本小题满分 12 分)

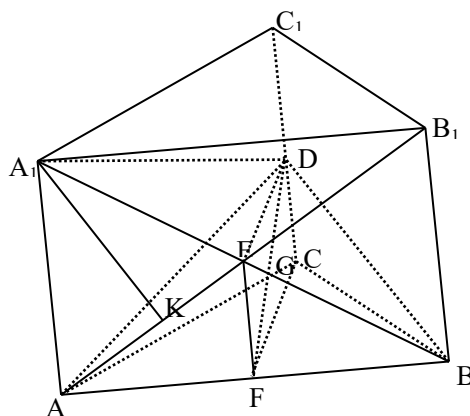
已知复数  $z$  的辐角为  $60^\circ$ , 且  $|z-1|$  是  $|z|$  和  $|z-2|$  的等比中项, 求  $|z|$

18. (本小题满分 12 分)

如图，在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中，底面是等腰直角三角形， $\angle ACB = 90^\circ$ ，侧棱  $AA_1 = 2$ ，D、E 分别是  $CC_1$  与  $A_1B$  的中点，点 E 在平面 ABD 上的射影是  $\triangle ABD$  的重心 G

(I) 求  $A_1B$  与平面 ABD 所成角的大小 (结果用反三角函数值表示)

(II) 求点  $A_1$  到平面 AED 的距离



19. (本小题满分 12 分)

已知  $c > 0$ ，设

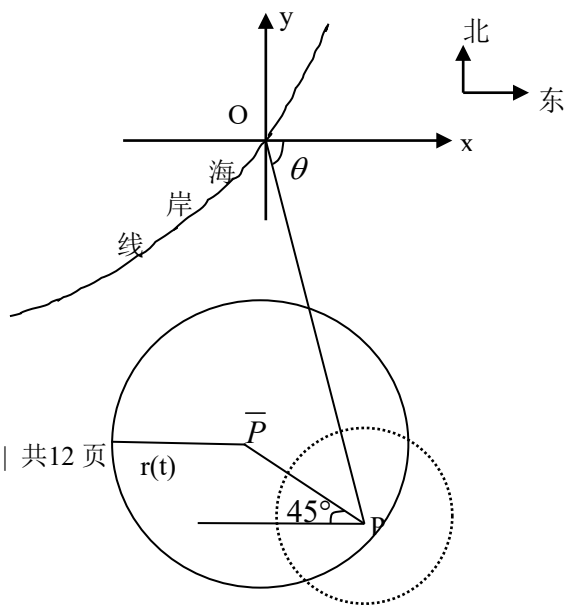
P: 函数  $y = c^x$  在  $\mathbb{R}$  上单调递减

Q: 不等式  $x + |x - 2c| > 1$  的解集为  $\mathbb{R}$

如果 P 和 Q 有且仅有一个正确，求  $c$  的取值范围

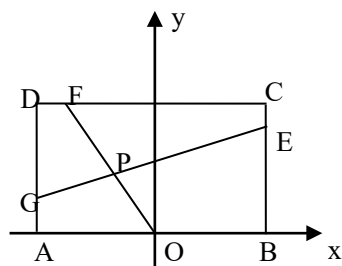
20. (本小题满分 12 分)

在某海滨城市附近海面有一台风，据监测，当前台风中心位于城市  $O$  (如图) 的东偏南  $\theta$  ( $\theta = \arccos \frac{\sqrt{2}}{10}$ ) 方向  $300\text{km}$  的海面  $P$  处，并以  $20\text{km/h}$  的速度向西偏北  $45^\circ$  方向移动，台风侵袭的范围为圆形区域，当前半径为  $60\text{km}$ ，并以  $10\text{km/h}$  的速度不断增大，问几小时后该城市开始受到台风的侵袭？



21. (本小题满分 14 分)

已知常数  $a > 0$ ，在矩形 ABCD 中， $AB = 4$ ， $BC = 4a$ ，O 为 AB 的中点，点 E、F、G 分别在 BC、CD、DA 上移动，且  $\frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CD} = \frac{DG}{DA}$ ，P 为 GE 与 OF 的交点 (如图)，问是否存在两个定点，使 P 到这两点的距离的和为定值？若存在，求出这两点的坐标及此定值；若不存在，请说明理由。



22. (本小题满分 12 分, 附加题 4 分)

(I) 设  $\{a_n\}$  是集合  $\{2^s + 2^t \mid 0 \leq s < t \text{ 且 } s, t \in \mathbb{Z}\}$  中所有的数从小到大排列成的数列,

即  $a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 6, a_4 = 9, a_5 = 10, a_6 = 12, \dots$

将数列  $\{a_n\}$  各项按照上小下大, 左小右大的原则写成如下的三角形数表:

		3		
		5	6	
	9	10	12	
—	—	—	—	—
		.....		

(1)写出这个三角形数表的第四行、第五行各数:

(2)求  $a_{100}$

(II) (本小题为附加题, 如果解答正确, 加 4 分, 但全卷总分不超过 150 分)

设  $\{b_n\}$  是集合  $\{2^r + 2^s + 2^t \mid 0 \leq r < s < t, \text{ 且 } r, s, t \in \mathbb{Z}\}$  中所有的数从小到大排列成的数列, 已知  $b_k = 1160$ , 求  $k$ .

一、选择题: 本题考查基本知识和基本运算. 每小题 5 分, 满分 60 分.

1. D 2. C 3. D 4. A 5. C 6. B 7. C 8. D 9. D 10. C 11. B 12. A

二、填空题: 本题考查基本知识和基本运算. 每小题 4 分, 满分 16 分.

13.  $-\frac{21}{2}$  14.  $(-1, 0)$  15. 72 16. ①④⑤

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 解: 设  $z = r \cos 60^\circ + r \sin 60^\circ i$ , 则复数  $z$  的实部为  $\frac{r}{2}$ .  $z - \bar{z} = r, z\bar{z} = r^2$  由题设

$$|z-1|^2 = |z| \cdot |z-2| \text{ 即: } (z-1)(\bar{z}-1) = |z| \sqrt{(z-2)(\bar{z}-2)}, \therefore r^2 - r + 1 = r\sqrt{r^2 - 2r + 4},$$

整理得  $r^2 + 2r - 1 = 0$ . 解得:  $r = \sqrt{2} - 1, r = -\sqrt{2} - 1$  (舍去). 即  $|z| = \sqrt{2} - 1$ .

18. (I) 解: 连结 BG, 则 BG 是 BE 在 ABD 的射影, 即  $\angle EBG$  是  $A_1B$  与平面 ABD 所成的角.

设 F 为 AB 中点, 连结 EF、FC,

$\because D, E$ 分别是 $CC_1, A_1B$ 的中点, 又 $DC \perp$ 平面 $ABC, \therefore CDEF$ 为矩形  
 连结 $DE, G$ 是 $\triangle ADB$ 的重心,  $\therefore G \in DF$ . 在直角三角形 $EFD$ 中

$$EF^2 = FG \cdot FD = \frac{1}{3}FD^2, \therefore EF = 1, \therefore FD = \sqrt{3}. \dots\dots(4分)$$

$$\text{于是 } ED = \sqrt{2}, EG = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\because FC = CD = \sqrt{2}, \therefore AB = 2\sqrt{2}, A_1B = 2\sqrt{3}, EB = \sqrt{3}.$$

$$\therefore \sin \angle EBG = \frac{EG}{EB} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$\therefore A_1B \text{与平面} ABD \text{所成的角是 } \arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

(II) 解:  $\because ED \perp AB, ED \perp EF, \text{又} EF \cap AB = F,$

$\therefore ED \perp$ 面 $A_1AB, \text{又} ED \subset$ 面 $AED. \therefore$ 平面 $AED \perp$ 平面 $A_1AB, \text{且面} AED \cap \text{面} A_1AB = AE.$

作 $A_1K \perp AE,$ 垂足为 $K. \therefore A_1K \perp$ 平面 $AED,$ 即 $A_1K$ 是 $A_1$ 到平面 $AED$ 的距离.

$$\text{在} \triangle A_1AB_1 \text{中, } A_1K = \frac{A_1A \cdot A_1B_1}{AB_1} = \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \therefore A_1 \text{到平面} AED \text{的距离为} \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

19. 解: 函数  $y = c^x$  在  $R$  上单调递减  $\Leftrightarrow 0 < c < 1.$

不等式  $x + |x - 2c| > 1$  的解集为  $R \Leftrightarrow$  函数  $y = x + |x - 2c|$  在  $R$  上恒大于 1.

$$\because x + |x - 2c| = \begin{cases} 2x - 2c, & x \geq 2c, \\ 2c, & x < 2c, \end{cases}$$

$\therefore$  函数  $y = x + |x - 2c|$  在  $R$  上的最小值为  $2c.$

$$\therefore \text{不等式 } |x + x - 2c| > 1 \text{ 的解集为 } R \Leftrightarrow 2c > 1 \Leftrightarrow c > \frac{1}{2}.$$

如果  $P$  正确, 且  $Q$  不正确, 则  $0 < c \leq \frac{1}{2}.$

如果  $P$  不正确, 且  $Q$  正确, 则  $c \geq 1.$  所以  $c$  的取值范围为  $(0, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty).$

(以上方法在新疆考区无一人使用, 大都是用解不等式的方法, 个别使用的图象法)

20. 解: 如图建立坐标系以  $O$  为原点, 正东方向为  $x$  轴正向.

$$\text{在时刻: (1) 台风中心 } P(\bar{x}, \bar{y}) \text{ 的坐标为 } \begin{cases} \bar{x} = 300 \times \frac{\sqrt{2}}{10} - 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ \bar{y} = -300 \times \frac{7\sqrt{2}}{10} + 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2}t. \end{cases}$$

此时台风侵袭的区域是  $(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 \leq [r(t)]^2$ ,

其中  $r(t) = 10t + 60$ , 若在  $t$  时刻城市  $O$  受到台风的侵袭, 则有

$$(0-\bar{x})^2 + (0-\bar{y})^2 \leq (10t+60)^2. \text{ 即 } (300 \times \frac{\sqrt{2}}{10} - 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2}t)^2 + (-300 \times \frac{7\sqrt{2}}{10} + 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2}t)^2 \leq (10t+60)^2, \text{ 即 } t^2 - 36t + 288 \leq 0, \text{ 解得 } 12 \leq t \leq 24$$

答: 12 小时后该城市开始受到台风的侵袭.

21. 根据题设条件, 首先求出点  $P$  坐标满足的方程, 据此再判断是否存在存在的两定点, 使得点  $P$  到两点距离的和为定值.

按题意有  $A(-2, 0), B(2, 0), C(2, 4a), D(-2, 4a)$  设

$$\frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CD} = \frac{DG}{DA} = k (0 \leq k \leq 1)$$

由此有  $E(2, 4ak), F(2-4k, 4a), G(-2, 4a-4ak)$

直线  $OF$  的方程为:  $2ax + (2k-1)y = 0$  ①

直线  $GE$  的方程为:  $-a(2k-1)x + y - 2a = 0$  ②

从①, ②消去参数  $k$ , 得点  $P(x, y)$  坐标满足方程  $2a^2x^2 + y^2 - 2ay = 0$

整理得  $\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{(y-a)^2}{a^2} = 1$  当  $a^2 = \frac{1}{2}$  时, 点  $P$  的轨迹为圆弧, 所以不存在符合题意的两点.

当  $a^2 \neq \frac{1}{2}$  时, 点  $P$  轨迹为椭圆的一部分, 点  $P$  到该椭圆焦点的距离的和为定长.

当  $a^2 < \frac{1}{2}$  时, 点  $P$  到椭圆两个焦点  $(-\sqrt{\frac{1}{2}-a^2}, a), (\sqrt{\frac{1}{2}-a^2}, a)$  的距离之和为定值  $\sqrt{2}$ .

当  $a^2 > \frac{1}{2}$  时, 点  $P$  到椭圆两个焦点  $(0, a-\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}), (0, a+\sqrt{a^2-\frac{1}{2}})$  的距离之和为定值

$2a$ .

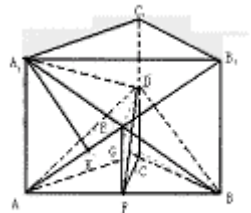
22. (本小题满分 12 分, 附加题 4 分)

(I) 解: 用  $(t, s)$  表示  $2^t + 2^s$ , 下表的规律为

$$3 \text{ ( } (0, 1) = 2^0 + 2^1 \text{ )}$$

$$5(0, 2) \quad 6(1, 2)$$

$$9(0, 3) \quad 10(1, 3) \quad 12(2, 3)$$



.....

- (i) 第四行 17(0, 4) 18(1, 4) 20(2, 4) 24(3, 4)
- 第五行 33(0, 5) 34(1, 5) 36(2, 5) 40(3, 5) 48(4, 5)

(i i) 解法一：因为  $100 = (1+2+3+4+\dots+13) + 9$ ，所以  $a_{100} = (8, 14) = 2^8 + 2^{14} = 16640$

解法二：设  $a_{100} = 2^{s_0} + 2^{t_0}$ ，只须确定正整数  $s_0, t_0$ 。

数列  $\{a_n\}$  中小于  $2^{t_0}$  的项构成的子集为  $\{2^t + 2^s \mid 0 \leq s < t < t_0\}$ ，

其元素个数为  $C_{t_0}^2 = \frac{t_0(t_0-1)}{2}$ ，依题意  $\frac{t_0(t_0-1)}{2} < 100$ 。

满足等式的最大整数  $t_0$  为 14，所以取  $t_0 = 14$ 。

因为  $100 - C_{14}^2 = s_0 + 1$ ，由此解得  $s_0 = 8, \therefore a_{100} = 2^{14} + 2^8 = 16640$ 。

(II) 解：  $b_k = 1160 = 2^{10} + 2^7 + 2^3$ ，

令  $M = \{c \in B \mid C < 1160\}$  (其中,  $B = \{2^r + 2^s + 2^t \mid 0 \leq r < s < t\}$ )

因  $M = \{c \in B \mid c < 2^{10}\} \cup \{c \in B \mid 2^{10} < c < 2^{10} + 2^7\} \cup \{c \in B \mid 2^{10} + 2^7 < c < 2^{10} + 2^7 + 2^3\}$ 。

现在求 M 的元素个数：  $\{c \in B \mid c < 2^{10}\} = \{2^r + 2^s + 2^t \mid 0 \leq r < s < t < 10\}$ ，

其元素个数为  $C_{10}^3$ ：  $\{c \in B \mid 2^{10} < c < 2^{10} + 2^7\} = \{2^{10} + 2^s + 2^r \mid 0 \leq r < s < 7\}$ 。

某元素个数为  $C_7^2$ ：  $\{c \in B \mid 2^{10} + 2^7 < c < 2^{10} + 2^7 + 2^3\} = \{2^{10} + 2^7 + 2^r \mid 0 \leq r < 3\}$

某元素个数为  $C_{10}^7$ ：  $k = C_{10}^3 + C_7^2 + C_3^2 + 1 = 145$ 。

另法：规定  $2^r + 2^t + 2^s = (r, t, s)$ ，  $b_k = 1160 = 2^{10} + 2^7 + 2^3 = (3, 7, 10)$

则  $b_1 = 2^0 + 2^1 + 2^2 = (0, 1, 2) \quad C_2^2$

依次为  $(0, 1, 3) \quad (0, 2, 3) \quad (1, 2, 3) \quad C_3^2$

$(0, 1, 4) \quad (0, 2, 4) \quad (1, 2, 4) \quad (0, 3, 4) \quad (1, 3, 4) \quad (2, 3, 4) \quad C_4^2$

.....

$$(0, 1, 9) \quad (0, 2, 9) \quad \dots \quad (6, 8, 9) \quad (7, 8, 9) \quad C_9^2$$

$$(0, 1, 10) \quad (0, 2, 10) \quad \dots \quad (0, 7, 10) \quad (1, 7, 10) \quad (2, 7, 10) \quad (3, 7, 10) \quad \dots \quad C_7^2 + 4$$

$$k = (C_2^2 + C_3^2 + \dots + C_9^2) + C_7^2 + 4 = 145.$$