2014年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)

理科数学

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至5页。

第Ⅰ卷

一、选择题

（本大题共8小题，每小题5分，共40分）在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

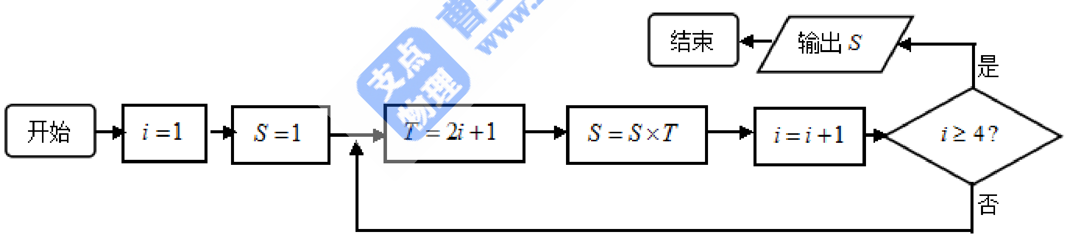
1. i 是虚数单位，复数 $\dfrac{7+i}{3+4i}=$

A. $1-i$　　B. $-1+i$　　C. $\dfrac{17}{25}+\dfrac{31}{25}i$　　D. $-\dfrac{17}{7}+\dfrac{25}{7}i$

2. 设变量 x、y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-2\ge 0 \\ x-y-2\le 0 \\ y\ge 1 \end{cases}$，则目标函数 $z=x+2y$ 的最小值为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

3. 阅读下边的程序框图，运行相应的程序，输出 S 的值为



A. 15　　B. 105　　C. 245　　D. 945

4. 函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4)$ 的单调递增区间为

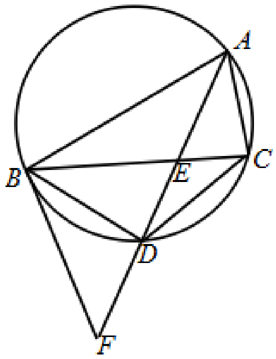
A. $(0，+\infty)$　　B. $(-\infty，0)$　　C. $(2，+\infty)$　　D. $(-\infty，-2)$

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$ 的一条渐近线平行于直线 l：$y=2x+10$，双曲线的一个焦点在直线 l 上，则双曲线的方程为

A. $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{20}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{5}=1$

C. $\dfrac{3x^2}{25}-\dfrac{3y^2}{100}=1$　　D. $\dfrac{3x^2}{100}-\dfrac{3y^2}{25}=1$

6. 如图，ΔABC 是圆的内接三角形，$\angle BAC$ 的平分线交圆于点 D，交 BC 于点 E，过点 B 的圆的切线与 AD 的延长线交于点 F，在上述条件下，给出下列四个结论：① BD 平分 $\angle CBF$；② $FB^2 = FD \cdot FA$；③ $AE \cdot CE = BE \cdot DE$；④ $AF \cdot BD = AB \cdot BF$. 则所有正确结论的序号是



A. ①②　　　　B. ③④　　　　C. ①②③

D. ①②④

7. 设 a、$b \in R$，则“$a > b$”是“$a|a| > b|b|$”的

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

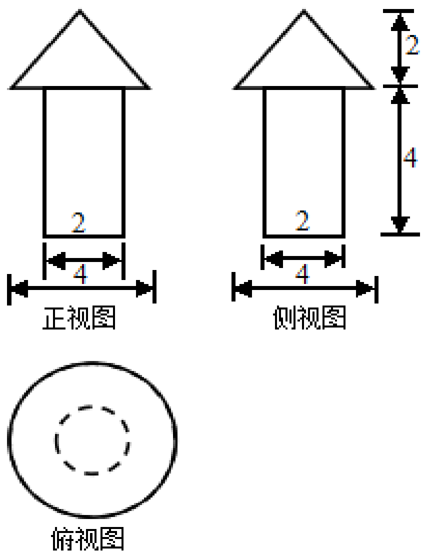
8. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle BAD = 120°$，点 E、F 分别在边 BC、DC 上，$BE = \lambda BC$，$DF = \mu DC$. 若 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = 1$，$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF} = -\dfrac{2}{3}$，则 $\lambda + \mu =$

A. $\dfrac{1}{2}$　　　　B. $\dfrac{2}{3}$　　　　C. $\dfrac{5}{6}$　　　　D. $\dfrac{7}{12}$

第II卷

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分.

9. 某大学为了解在校本科生对参加某项社会实践活动的意向，拟采用分层抽样的方法，从该校四个年级的本科生中抽取一个容量为300的样本进行调查. 已知该校一年级、二年级、三年级、四年级的本科生人数之比为 $4:5:5:6$，则应从一年级本科生中抽取_______名学生.



10. 一个几何体的三视图如图所示（单位：m），则该几何体的体积为____________ m^3.

11. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1，公差为 -1 的等差数列，S_n 为其前 n 项和，若 S_1、S_2、S_4 成等比数列，则 a_1 的值为_________.

12. 在 ΔABC 中，内角 A、B、C 所对的边分别是 a、b、c. 已知 $b - c = \dfrac{1}{4}a$，$2\sin B = 3\sin C$，则 $\cos A$ 的值为____.

13. 在以 O 为极点的极坐标系中，圆 $\rho = 4\sin\theta$ 和直线 $\rho\sin\theta = a$ 相交于 A、B 两点. 若 ΔAOB 是等边三角形，则 a 的值为_____________.

14. 已知函数 $f(x)=|x^2+3x|$，$x\in R$. 若方程 $f(x)-a|x-1|=0$ 恰有4个互异的实数根，则实数 a 的取值范围为______________.

三、解答题：本大题共6小题，共80分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分13分）

已知函数 $f(x)=\cos x\sin(x+\frac{\pi}{3})-\sqrt{3}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{4}$，$x\in R$.

⑴求 $f(x)$ 的最小正周期；

⑵求 $f(x)$ 在闭区间 $[-\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{4}]$ 上的最大值和最小值.

16.（本小题满分13分）

某大学志愿者协会有6名男同学，4名女同学. 在这10名同学中，3名同学来自数学学院，其余7名同学来自物理、化学等其他互不相同的七个学院. 现从这10名同学中随机选取3名同学，到希望小学进行支教活动（每位同学被选到的可能性相同）.

⑴求选出的3名同学是来自互不相同学院的概率；

⑵设 X 为选出的3名同学中女同学的人数，求随机变量 X 的分布列和数学期望.

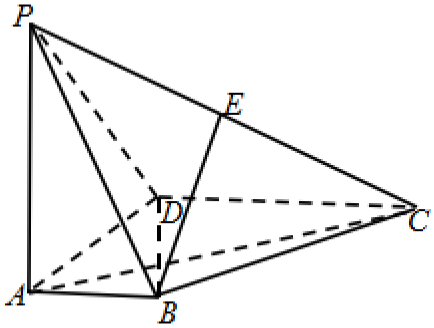
17.（本小题满分13分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AD\perp AB$，$AB//DC$，$AD=DC=AP=2$，$AB=1$，点 E 为棱 PC 的中点.

⑴证明：$BE\perp DC$；

⑵求直线 BE 与平面 PBD 所成角的正弦值；

⑶若 F 为棱 PC 上一点，满足 $BF\perp AC$，求二面角 $F-AB-P$ 的余弦值.



18.（本小题满分13分）

设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ，右顶点为 A ，上顶点为 B .

已知 $|AB|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}|F_1F_2|$.

⑴求椭圆的离心率；

⑵设 P 为椭圆上异于其顶点的一点，以线段 PB 为直径的圆经过点 F_1 ，经过原点 O 的直线 l 与该圆相切，求直线 l 的斜率.

19.（本小题满分14分）

已知 q 和 n 均为给定的大于1的自然数，设集合 $M=\{0，1，2，...，q-1\}$ ，集合 $A=\{x\,|\,x=x_1+x_2q+...+x_nq^{n-1}，x_i\in M，i=1，2，...，n\}$.

⑴当 $q=2$ ， $n=3$ 时，用列举法表示集合 A ；

⑵设 s 、 $t\in A$ ， $s=a_1+a_2q+...+a_nq^{n-1}$ ， $t=b_1+b_2q+...+b_nq^{n-1}$ ，其中 a_i 、 $b_i\in M$ ， $i=1，2，...，n$. 证明：若 $a_n<b_n$ ，则 $s<t$.

20.（本小题满分14分）

设 $f(x)=x-ae^x(a\in R)$ ， $x\in R$. 已知函数 $y=f(x)$ 有两个零点 x_1 ， x_2 ，且 $x_1<x_2$.

⑴求 a 的取值范围；

⑵证明 $\dfrac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的减小而增大；

⑶证明 x_1+x_2 随着 a 的减小而增大.

参考答案及解析

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

（1）【解析】A

$$\frac{7+\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}=\frac{(7+\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}{(3+4\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}=\frac{25-25\mathrm{i}}{25}=1-\mathrm{i}$$

（2）【解析】B

画出可行域，易知目标函数$z=x+2y$在$x=1,y=1$时取得最小值3

（3）【解析】B

该框图意在计算连续正奇数乘积，当$i\geq4$输出时，实际计算的乘积为$S=1\times3\times5\times7=105$

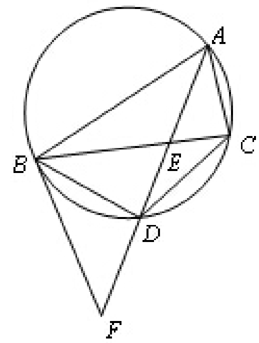
（4）【解析】D

函数的单调增区间是函数$y=x^2-4$的单调减区间与不等式$x^2-4>0$的解集的交集，因此函数的单调递增区间是$(-\infty,-2)$

（5）【解析】A

由渐近线斜率为 2 知 $b=2a$，因此 $c=\sqrt{5}a$，又∵左焦点坐标为 $(-5,0)$，即 $c=5$，$a=\sqrt{5}$ 故双曲线方程为 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$

（6）【解析】D



(第6题图)

由 AD 平分 $\angle BAC$ 知 $\angle BAD=\angle CAD, BD=CD$，由弦切角以及圆周角关系可知：

$\angle FBD=\angle CBD=\angle DCB=\angle DAB$，因此①正确；

由切割线定理可直接得出②正确；

由相交弦定理可知③错误

由上述结论可推知 ΔFDB 与 FBA 相似，即 $\frac{FB}{FA}=\frac{DB}{BA}$，因此④正确

（7）【解析】C

由 $a>b$，可分三种情况：① $a>b\geq 0$，则 $a^2=a|a|>b^2=b|b|$

② $a>0>b$，则 $a|a|>0>b|b|$；③ $0\geq a>b$，则 $a|a|=-a^2>-b^2=b|b|$，

综上可知，$a|a|>b|b|$

由 $a|a|>b|b|$，亦可分三种情况

① $a|a|>b|b|\geq 0$，由绝对值的非负性知此时 a、b 非负，因此 $a^2>b^2$，两边开方得 $a>b$

② $a|a|\geq 0>b|b|$，此时显然 $a\geq 0>b$

③ $0>a|a|>b|b|$，同理可知 a、b 同负，$\therefore -a^2>-b^2, a^2<b^2$，即 $|a|<|b|$，$\therefore a>b$

综上可知，$a>b$　　因此 $a>b$ 是 $a|a|>b|b|$ 的充要条件

（8）【解析】C

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}=\mu\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，代入已知得 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=4\mu+4\lambda-2(\lambda\mu+1)=1$

$\overrightarrow{CE}=(1-\lambda)\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CF}=(1-\mu)\overrightarrow{CD}$，代入已知得 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}=-2(1-\mu)(1-\lambda)=-\frac{2}{3}$

两式联立消去 $\lambda\mu$ 可得 $\lambda+\mu=\frac{5}{6}$

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

（9）【解析】60

由分层抽样方法知抽取人数应为 $\frac{4}{4+5+5+6}\times 300=60$ 人

（10）【解析】$\frac{20\pi}{3}$

该几何体上半部分为圆锥，下半部分为圆柱，因此其体积为 $V=\frac{1}{3}\times\pi\times 2^2\times 2+\pi\times 1^2\times 4=\frac{20\pi}{3}$

（11）【解析】$-\frac{1}{2}$

由于该数列为等差数列，因此 $S_1=a_1,S_2=2a_1+d,S_4=4a_1+6d$，由于 S_1、S_2、S_4 等比且 $d=-1$ 知 $(2a_1-1)^2=a_1(4a_1-6)$，解得 $a_1=-\frac{1}{2}$

（12）【解析】$-\frac{1}{4}$

由 $2\sin B=3\sin C$ 可得 $2b=3c$，代入 $b-c=\frac{1}{4}a$ 可得 $a=2c$，

由余弦定理知 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\frac{9}{4}c^2+c^2-4c^2}{2\cdot\frac{3}{2}c\cdot c}=-\frac{1}{4}$

（13）【解析】3

以极点为平面直角坐标系原点，极轴作为 x 轴正半轴建立平面直角坐标系，则 $\rho=4\sin\theta$ 所表示圆的直角坐标方程为 $x^2+(y-2)^2=4$，而 $\rho\sin\theta=a$ 则表示直线 $y=a$

由已知，直线截圆所得弦与原点组成三角形为正三角形，则弦 AB 所对圆心角为 $120°$，该弦到圆心距离等于半径的一半，因此易知 $a=2+1=3$

（14）【解析】$(0,1)\cup(9,+\infty)$

方程 $f(x)-a|x-1|=0$ 的实根与 $y=f(x)$ 图象和 $y=a|x-1|$ 图象交点一一对应

由函数图像变换可知，$f(x)$ 图象为将 $y=x^2+3x$ 沿 x 轴向上翻折得到，而 $y=a|x-1|$ 图象则由 $y=a|x|$ 图象沿 x 轴向右平移一个单位得到。由图象易知

①$a\le 0$ 时不可能成立

②$a>0$ 时，

当 $x<1$ 时，易知有 $y=-a(x-1)$ 与 $y=x^2+3x$ 必有两交点，则分为如下情况：

当 $x>1$ 时，$y=a(x-1)$ 与 $y=x^2+3x$ 有两交点，此时联立两曲线方程有 $\Delta=a^2-10a+9>0$，

解得 $0<a<1$ 或 $a>9$，由于 $0<a<1$ 时两曲线交点在第三象限，不合题意，

故此时 a 的取值范围为 $a>9$

$y=-a(x-1)$ 与 $y=-x^2-3x$、$y=a(x-1)$ 与 $y=x^2+3x$ 同时相切，计算知不可能成立

$y=-a(x-1)$ 与 $y=-x^2-3x$ 有两交点，联立曲线方程由判别式解得 $0<a<1$ 或 $a>9$，同理由交点位置舍去 $a>9$，故此时 a 的取值范围为 $0<a<1$

综上所述，a 的取值范围为 $(0,1)\cup(9,+\infty)$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

（15）（本小题满分 13 分）

【解析】(1) 由已知，有

$f(x)=\cos x\cdot\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)-\sqrt{3}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{4}$

$=\frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{4}$

$=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\cos 2x)+\frac{\sqrt{3}}{4}$

$=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x$

$=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

所以，$f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$．

(2) $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{5}{6}\pi,\frac{\pi}{6}\right]$，

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，从而 $f(x)\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right]$.

即函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$上的最大值为 $\frac{1}{4}$，最小值为 $-\frac{1}{2}$．

（16）（本小题满分 13 分）

【解析】(1) 设“选出的 3 名同学是来自互不相同的学院”为事件 A，则

$$P(A)=\frac{C_3^1\cdot C_7^2+C_3^0\cdot C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{49}{60}.$$

所以，选出的 3 名同学是来自互不相同学院的概率为 $\frac{49}{60}$．

(2) 随机变量 X 的所有可能值为 0，1，2，3．

$$P(X=k)=\frac{C_4^k\cdot C_6^{3-k}}{C_{10}^3}(k=0，1，2，3).$$

所以，随机变量 X 的分布列是

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$.

（17）（本小题满分 13 分）

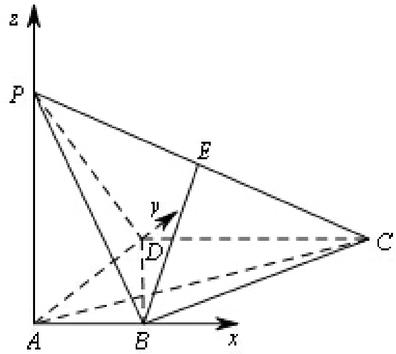
【解析】(方法一)

依题意，以点 A 为原点建立空间直角坐标系(如图)，可得 $B(1，0，0)$，$C(2，2，0)$，$D(0，2，0)$，$P(0，0，2)$，由 E 为棱 PC 的中点，得 $E(1，1，1)$．

(1) 证明：向量 $\overrightarrow{BE}=(0，1，1)$，$\overrightarrow{DC}=(2，0，0)$，故 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DC}=0$．

所以，$BE\perp DC$．

(2) 向量 $\overrightarrow{BD}=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{PB}=(1,0,-2)$．设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 PBD 的法向量，



则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+2y=0,\\ x-2z=0.\end{cases}$ 不妨令 $y=1$，

可得 $\vec{n}=(2,1,1)$ 为平面 PBD 的一个法向量．于是有

$\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{BE}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{BE}|}=\dfrac{2}{\sqrt{6}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

所以，直线 BE 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

(3) 向量 $\overrightarrow{BC}=(1,2,0)$，$\overrightarrow{CP}=(-2,-2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，

由点 F 在棱 PC 上，设 $\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CP}$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$．

故 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BC}+\lambda\overrightarrow{CP}=(1-2\lambda,2-2\lambda,2\lambda)$．由 $BF\perp AC$，得 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

因此，$2(1-2\lambda)+2(2-2\lambda)=0$，解得 $\lambda=\dfrac{3}{4}$，即 $\overrightarrow{BF}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$．设

$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 FAB 的法向量，则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$ 即

$\begin{cases}x_1=0,\\ -\dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{1}{2}y_1+\dfrac{3}{2}z_1=0.\end{cases}$ 不妨令 $z_1=1$，

可得 $\overrightarrow{n_1}=(0,-3,1)$ 为平面 FAB 的一个法向量，

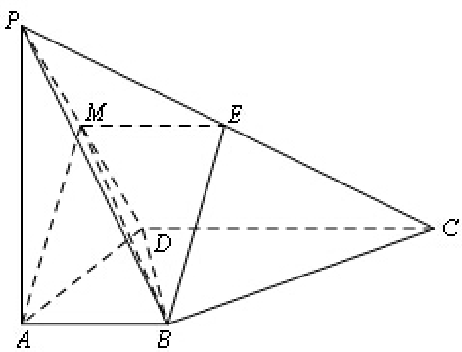
取平面 ABP 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(0,1,0)$，则

$$\cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{-3}{\sqrt{10}\times1}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

易知，二面角 $F-AB-P$ 是锐角，所以其余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$．

（方法二）

(1) 证明：如图，取 PD 中点 M，连接 EM，AM．由于 E，M 分别为 PC，PD 的中点，故 $EM\parallel DC$，且 $EM=\dfrac{1}{2}DC$，



又由已知，可得 $EM\parallel AB$ 且 $EM=AB$，故四边形 $ABEM$ 为平行四边形，所以 $BE\parallel AM$．

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp CD$．

又因为 $CD\perp AD$，$PA\cap AD=A$，所以 $CD\perp$ 平面 PAD．

因为 $AM\subset$ 平面 PAD，于是 $CD\perp AM$，又 $BE\parallel AM$，所以 $BE\perp CD$．

(2) 连接 BM，由(1)有 $CD\perp$ 平面 PAD，得 $CD\perp PD$，而 $EM\parallel CD$，故 $PD\perp EM$．又因为 $AD=AP$，M 为 PD 的中点，故 $PD\perp AM$，可得 $PD\perp BE$，所以 $PD\perp$ 平面 BEM，故平面 $BEM\perp$ 平面 PBD．所以，直线 BE 在平面 PBD 内的射影为直线 BM，而 $BE\perp EM$，可得 $\angle EBM$ 为锐角，故 $\angle EBM$ 为直线 BE 与平面 PBD 所成的角．

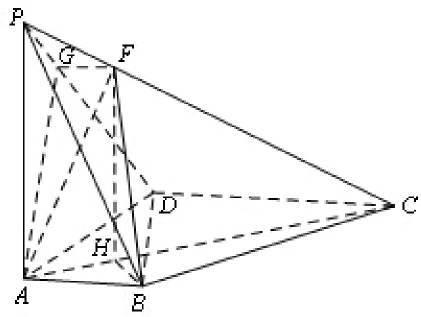
依题意，有 $PD=2\sqrt{2}$，而 M 为 PD 中点，可得 $AM=\sqrt{2}$，进而 $BE=\sqrt{2}$．故在直角三角形 BEM 中，$\tan\angle EBM=\dfrac{EM}{BE}=\dfrac{AB}{BE}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，因此 $\sin\angle EBM=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

所以，直线 BE 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

(3) 如图，在 $\triangle PAC$ 中，过点 F 作 $FH\parallel PA$ 交 AC 于点 H．因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，故 $FH\perp$ 底面 $ABCD$，从而 $FH\perp AC$．
又 $BF\perp AC$，得 $AC\perp$ 平面 FHB，因此 $AC\perp BH$．在底面 $ABCD$ 内，可得 $CH=3HA$，从而 $CF=3FP$．在平面 PDC 内，作 $FG\parallel DC$ 交 PD 于点 G，于是 $DG=3GP$．由于 $DC\parallel AB$，故 $GF\parallel AB$，所以 A，B，F，G 四点共面．由 $AB\perp PA$，$AB\perp AD$，得 $AB\perp$ 平面 PAD，故 $AB\perp AG$．所以 $\angle PAG$ 为二面角 $F-AB-P$ 的平面角．

在 $\triangle PAG$ 中，$PA=2$，$PG=\dfrac{1}{4}PD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\angle APG=45^\circ$，由余弦定理可得 $AG=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，$\cos\angle PAG=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$．

所以，二面角 $F-AB-P$ 的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$．



（18）（本小题满分 13 分）

【解析】(1) 设椭圆右焦点 F_2 的坐标为 $(c，0)$．由 $|AB|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}|F_1F_2|$，可得 $a^2+b^2=3c^2$，又 $b^2=a^2-c^2$，则 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{1}{2}$．所以，椭圆的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

(2) 由(1)知 $a^2=2c^2$，$b^2=c^2$．故椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2c^2}+\dfrac{y^2}{c^2}=1$．

设 $P(x_0，y_0)$，由 $F_1(-c，0)$，$B(0，c)$，有 $\overrightarrow{F_1P}=(x_0+c，y_0)$，$\overrightarrow{F_1B}=(c，c)$．

由已知，有 $\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_1B}=0$，即 $(x_0+c)c+y_0c=0$．又 $c\neq 0$，故有 $x_0+y_0+c=0$．　①

又因为点 P 在椭圆上，故 $\dfrac{x_0^2}{2c^2}+\dfrac{y_0^2}{c^2}=1$．　　②

由①和②可得 $3x_0^2+4cx_0=0$，而点 P 不是椭圆的顶点，故 $x_0=-\dfrac{4}{3}c$，代入①得 $y_0=\dfrac{c}{3}$，

即点 P 的坐标为 $\left(-\dfrac{4c}{3}，\dfrac{c}{3}\right)$．

设圆的圆心为 $T(x_1, y_1)$，则 $x_1=\dfrac{-\frac{4}{3}c+0}{2}=-\dfrac{2}{3}c$， $y_1=\dfrac{\frac{c}{3}+c}{2}=\dfrac{2}{3}c$，进而圆的半径

$r=\sqrt{(x_1-0)^2+(y_1-c)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}c$.

设直线 l 的斜率为 k，依题意，直线 l 的方程为 $y=kx$．由 l 与圆相切，可得 $\dfrac{|kx_1-y_1|}{\sqrt{k^2+1}}=r$，

即 $\dfrac{\left|k\left(-\frac{2c}{3}\right)-\frac{2c}{3}\right|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}c$，整理得 $k^2-8k+1=0$，解得 $k=4\pm\sqrt{15}$.

所以，直线 l 的斜率为 $4+\sqrt{15}$ 或 $4-\sqrt{15}$.

（19）（本小题满分 14 分）

【解析】(1) 当 $q=2$， $n=3$ 时， $M=\{0, 1\}$，

$A=\{x\mid x=x_1+x_2\cdot 2+x_3\cdot 2^2, x_i\in M, i=1, 2, 3\}$.

可得， $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

(2) 由 s， $t\in A$， $s=a_1+a_2q+\cdots+a_nq^{n-1}$， $t=b_1+b_2q+\cdots+b_nq^{n-1}$，

a_i， $b_i\in M$， $i=1, 2, \cdots, n$ 及 $a_n<b_n$，可得

$$\begin{aligned}s-t&=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)q+\cdots+(a_{n-1}-b_{n-1})q^{n-2}+(a_n-b_n)q^{n-1}\\&\leqslant(q-1)+(q-1)q+\cdots+(q-1)q^{n-2}-q^{n-1}\\&=\frac{(q-1)(1-q^{n-1})}{1-q}-q^{n-1}=-1<0.\end{aligned}$$

所以， $s<t$.

（20）（本小题满分 14 分）

【解析】(1) 由 $f(x)=x-ae^x$，可得 $f'(x)=1-ae^x$.

下面分两种情况讨论：

① $a\leqslant 0$ 时

$f'(x)>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，可得 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，不合题意.

② $a>0$ 时

由 $f'(x)=0$，得 $x=-\ln a$.

当 x 变化时， $f'(x)$， $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty, -\ln a)$	$-\ln a$	$(-\ln a, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$-\ln a-1$	↘

这时， $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -\ln a)$；单调递减区间是 $(-\ln a, +\infty)$.

于是，“函数 $y=f(x)$ 有两个零点”等价于如下条件同时成立：1° $f(-\ln a)>0$；2° 存在 $s_1\in(-\infty, -\ln a)$， $f(s_1)<0$；3° 存在 $s_2\in(-\ln a, +\infty)$，满足 $f(s_2)<0$.

由 $f(-\ln a)>0$，即 $-\ln a-1>0$，解得 $0<a<e^{-1}$．而此时，取 $s_1=0$，满足 $s_1\in(-\infty, -\ln a)$，

且 $f(s_1)=-a<0$；取 $s_2=\frac{2}{a}+\ln\frac{2}{a}$，满足 $s_2\in(-\ln a,+\infty)$，且

$$f(s_2)=\left(\frac{2}{a}-e^{\frac{2}{a}}\right)+\left(\ln\frac{2}{a}-e^{\frac{2}{a}}\right)<0.$$

所以，a 的取值范围是 $(0,e^{-1})$．

(2) 由 $f(x)=x-ae^x=0$，有 $a=\frac{x}{e^x}$，设 $g(x)=\frac{x}{e^x}$，由 $g'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，知 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减．并且，当 $x\in(-\infty,0]$ 时，$g(x)\leqslant 0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)>0$．由已知，x_1，x_2 满足 $a=g(x_1)$，$a=g(x_2)$．由 $a\in(0,e^{-1})$，及 $g(x)$ 的单调性，可得 $x_1\in(0,1)$，$x_2\in(1,+\infty)$．

对于任意的 a_1，$a_2\in(0,e^{-1})$，设 $a_1>a_2$，$g(\xi_1)=g(\xi_2)=a_1$，其中 $0<\xi_1<1<\xi_2$；$g(\eta_1)=g(\eta_2)=a_2$，其中 $0<\eta_1<1<\eta_2$．

因为 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，故由 $a_1>a_2$，即 $g(\xi_1)>g(\eta_1)$，可得 $\xi_1>\eta_1$；类似可得 $\xi_2<\eta_2$．

又由 ξ_1，$\eta_1>0$，得 $\frac{\xi_2}{\xi_1}<\frac{\eta_2}{\xi_1}<\frac{\eta_2}{\eta_1}$．

所以，$\frac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的减小而增大．

(3) 由 $x_1=ae^{x_1}$，$x_2=ae^{x_2}$，可得 $\ln x_1=\ln a+x_1$，$\ln x_2=\ln a+x_2$．故 $x_2-x_1=\ln x_2-\ln x_1=\ln\frac{x_2}{x_1}$．

设 $\frac{x_2}{x_1}=t$，则 $t>1$，且 $\begin{cases}x_2=tx_1,\\x_2-x_1=\ln t\end{cases}$，解得 $x_1=\frac{\ln t}{t-1}$，$x_2=\frac{t\ln t}{t-1}$．所以，

$$x_1+x_2=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}. \qquad ①$$

令 $h(x)=\frac{(x+1)\ln x}{x-1}$，$x\in(1,+\infty)$，则 $h'(x)=\frac{-2\ln x+x-\frac{1}{x}}{(x-1)^2}$．

令 $u(x)=-2\ln x+x-\frac{1}{x}$，得 $u'(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$．当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$u'(x)>0$．

因此，$u(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故对于任意的 $x\in(1,+\infty)$，$u(x)>u(1)=0$，由此可得 $h'(x)>0$，故 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增．

因此，由①可得 x_1+x_2 随着 t 的增大而增大．