

2024 年普通高等学校招生全国统一考试（新课标 II 卷）

数学

本试卷共 10 页，19 小题，满分 150 分。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的。请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上。

1. 已知 $z = -1 - i$ ，则 $|z| =$ ()

- A. 0 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】由复数模的计算公式直接计算即可。

【详解】若 $z = -1 - i$ ，则 $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ 。

故选：C。

2. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, |x+1| > 1$ ；命题 $q: \exists x > 0, x^3 = x$ ，则 ()

- A. p 和 q 都是真命题 B. $\neg p$ 和 q 都是真命题
C. p 和 $\neg q$ 都是真命题 D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

【答案】B

【解析】

【分析】对于两个命题而言，可分别取 $x = -1$ 、 $x = 1$ ，再结合命题及其否定的真假性相反即可得解。

【详解】对于 p 而言，取 $x = -1$ ，则有 $|x+1| = 0 < 1$ ，故 p 是假命题， $\neg p$ 是真命题，

对于 q 而言，取 $x = 1$ ，则有 $x^3 = 1^3 = 1 = x$ ，故 q 是真命题， $\neg q$ 是假命题，

综上， $\neg p$ 和 q 都是真命题.

故选：B.

3. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1, |\vec{a}+2\vec{b}|=2$ ，且 $(\vec{b}-2\vec{a}) \perp \vec{b}$ ，则 $|\vec{b}|=$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

【答案】B

【解析】

【分析】由 $(\vec{b}-2\vec{a}) \perp \vec{b}$ 得 $\vec{b}^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，结合 $|\vec{a}|=1, |\vec{a}+2\vec{b}|=2$ ，得 $1+4\vec{a} \cdot \vec{b}+4\vec{b}^2 = 1+6\vec{b}^2 = 4$ ，由此即可得解.

【详解】因为 $(\vec{b}-2\vec{a}) \perp \vec{b}$ ，所以 $(\vec{b}-2\vec{a}) \cdot \vec{b} = 0$ ，即 $\vec{b}^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，

又因为 $|\vec{a}|=1, |\vec{a}+2\vec{b}|=2$ ，

所以 $1+4\vec{a} \cdot \vec{b}+4\vec{b}^2 = 1+6\vec{b}^2 = 4$ ，

从而 $|\vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：B.

4. 某农业研究部门在面积相等的 100 块稻田上种植一种新型水稻，得到各块稻田的亩产量（单位：kg）并部分整理下表

亩产量	[900, 950)	[950, 1000)	[1000, 1050)	[1100, 1150)	[1150, 1200)
频数	6	12	18	24	10

据表中数据，结论中正确的是 ()

- A. 100 块稻田亩产量的中位数小于 1050kg
B. 100 块稻田中亩产量低于 1100kg 的稻田所占比例超过 80%
C. 100 块稻田亩产量的极差介于 200kg 至 300kg 之间
D. 100 块稻田亩产量的平均值介于 900kg 至 1000kg 之间

【答案】C

【解析】

【分析】计算出前三段频数即可判断 A；计算出低于 1100kg 的频数，再计算比例即可判断 B；根据极差计

算方法即可判断 C；根据平均值计算公式即可判断 D.

【详解】对于 A，根据频数分布表可知， $6+12+18=36<50$ ，

所以亩产量的中位数不小于 1050kg，故 A 错误；

对于 B，亩产量不低于 1100kg 的频数为 $24+10=34$ ，

所以低于 1100kg 的稻田占比为 $\frac{100-34}{100}=66\%$ ，故 B 错误；

对于 C，稻田亩产量的极差最大为 $1200-900=300$ ，最小为 $1150-950=200$ ，故 C 正确；

对于 D，由频数分布表可得，亩产量在 $[1050,1100)$ 的频数为 $100-(6+12+18+24+10)=30$ ，

所以平均值为 $\frac{1}{100} \times (6 \times 925 + 12 \times 975 + 18 \times 1025 + 30 \times 1075 + 24 \times 1125 + 10 \times 1175) = 1067$ ，故 D 错误.

故选：C.

5. 已知曲线 $C: x^2 + y^2 = 16$ ($y > 0$)，从 C 上任意一点 P 向 x 轴作垂线段 PP' ， P' 为垂足，则线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程为 ()

A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ ($y > 0$)

B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$ ($y > 0$)

C. $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$ ($y > 0$)

D. $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{8} = 1$ ($y > 0$)

【答案】A

【解析】

【分析】设点 $M(x, y)$ ，由题意，根据中点的坐标表示可得 $P(x, 2y)$ ，代入圆的方程即可求解.

【详解】设点 $M(x, y)$ ，则 $P(x, y_0), P'(x, 0)$ ，

因为 M 为 PP' 的中点，所以 $y_0 = 2y$ ，即 $P(x, 2y)$ ，

又 P 在圆 $x^2 + y^2 = 16$ ($y > 0$) 上，

所以 $x^2 + 4y^2 = 16$ ($y > 0$)，即 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ ($y > 0$)，

即点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ ($y > 0$).

故选：A

6. 设函数 $f(x) = a(x+1)^2 - 1$ ， $g(x) = \cos x + 2ax$ ，当 $x \in (-1, 1)$ 时，曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 恰有一个交点，则 $a =$ ()

A. -1

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】解法一：令 $F(x) = ax^2 + a - 1, G(x) = \cos x$ ，分析可知曲线 $y = F(x)$ 与 $y = G(x)$ 恰有一个交点，结合偶函数的对称性可知该交点只能在 y 轴上，即可得 $a = 2$ ，并代入检验即可；解法二：令

$h(x) = f(x) - g(x), x \in (-1, 1)$ ，可知 $h(x)$ 为偶函数，根据偶函数的对称性可知 $h(x)$ 的零点只能为 0，即可得 $a = 2$ ，并代入检验即可。

【详解】解法一：令 $f(x) = g(x)$ ，即 $a(x+1)^2 - 1 = \cos x + 2ax$ ，可得 $ax^2 + a - 1 = \cos x$ ，

令 $F(x) = ax^2 + a - 1, G(x) = \cos x$ ，

原题意等价于当 $x \in (-1, 1)$ 时，曲线 $y = F(x)$ 与 $y = G(x)$ 恰有一个交点，

注意到 $F(x), G(x)$ 均为偶函数，可知该交点只能在 y 轴上，

可得 $F(0) = G(0)$ ，即 $a - 1 = 1$ ，解得 $a = 2$ ，

若 $a = 2$ ，令 $F(x) = G(x)$ ，可得 $2x^2 + 1 - \cos x = 0$

因为 $x \in (-1, 1)$ ，则 $2x^2 \geq 0, 1 - \cos x \geq 0$ ，当且仅当 $x = 0$ 时，等号成立，

可得 $2x^2 + 1 - \cos x \geq 0$ ，当且仅当 $x = 0$ 时，等号成立，

则方程 $2x^2 + 1 - \cos x = 0$ 有且仅有一个实根 0，即曲线 $y = F(x)$ 与 $y = G(x)$ 恰有一个交点，

所以 $a = 2$ 符合题意；

综上所述： $a = 2$ 。

解法二：令 $h(x) = f(x) - g(x) = ax^2 + a - 1 - \cos x, x \in (-1, 1)$ ，

原题意等价于 $h(x)$ 有且仅有一个零点，

因为 $h(-x) = a(-x)^2 + a - 1 - \cos(-x) = ax^2 + a - 1 - \cos x = h(x)$ ，

则 $h(x)$ 为偶函数，

根据偶函数的对称性可知 $h(x)$ 的零点只能为 0，

即 $h(0) = a - 2 = 0$ ，解得 $a = 2$ ，

若 $a=2$ ，则 $h(x) = 2x^2 + 1 - \cos x, x \in (-1, 1)$ ，

又因为 $2x^2 \geq 0, 1 - \cos x \geq 0$ 当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

可得 $h(x) \geq 0$ ，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

即 $h(x)$ 有且仅有一个零点 0，所以 $a=2$ 符合题意；

故选：D.

7. 已知正三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{52}{3}$ ， $AB=6$ ， $A_1B_1=2$ ，则 A_1A 与平面 ABC 所成角的正切值为
()

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】解法一：根据台体的体积公式可得三棱台的高 $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，做辅助线，结合正三棱台的结构特征求

得 $AM = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，进而根据线面夹角的定义分析求解；解法二：将正三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 补成正三棱锥

$P-ABC$ ， A_1A 与平面 ABC 所成角即为 PA 与平面 ABC 所成角，根据比例关系可得 $V_{P-ABC} = 18$ ，进而可求正三棱锥 $P-ABC$ 的高，即可得结果.

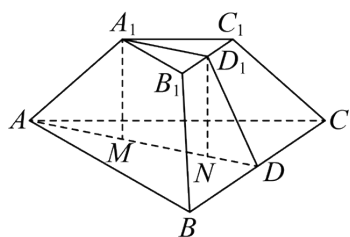
【详解】解法一：分别取 BC, B_1C_1 的中点 D, D_1 ，则 $AD = 3\sqrt{3}, A_1D_1 = \sqrt{3}$ ，

可知 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ ， $S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$ ，

设正三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 的为 h ，

则 $V_{ABC-A_1B_1C_1} = \frac{1}{3} \left(9\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{9\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \right) h = \frac{52}{3}$ ，解得 $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，

如图，分别过 A_1, D_1 作底面垂线，垂足为 M, N ，设 $AM = x$ ，



$$\text{则 } AA_1 = \sqrt{AM^2 + A_1M^2} = \sqrt{x^2 + \frac{16}{3}}, \quad DN = AD - AM - MN = 2\sqrt{3} - x,$$

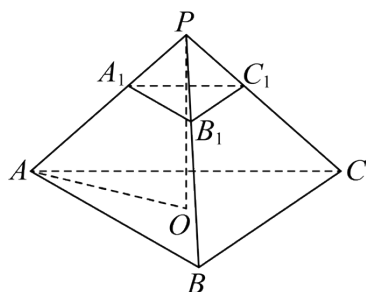
$$\text{可得 } DD_1 = \sqrt{DN^2 + D_1N^2} = \sqrt{(2\sqrt{3} - x)^2 + \frac{16}{3}},$$

$$\text{结合等腰梯形 } BCC_1B_1 \text{ 可得 } BB_1^2 = \left(\frac{6-2}{2}\right)^2 + DD_1^2,$$

$$\text{即 } x^2 + \frac{16}{3} = (2\sqrt{3} - x)^2 + \frac{16}{3} + 4, \quad \text{解得 } x = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{所以 } A_1A \text{ 与平面 } ABC \text{ 所成角的正切值为 } \tan \angle A_1AD = \frac{A_1M}{AM} = 1;$$

解法二：将正三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 补成正三棱锥 $P - ABC$ ，



则 A_1A 与平面 ABC 所成角即为 PA 与平面 ABC 所成角，

$$\text{因为 } \frac{PA_1}{PA} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{1}{3}, \quad \text{则 } \frac{V_{P-A_1B_1C_1}}{V_{P-ABC}} = \frac{1}{27},$$

$$\text{可知 } V_{ABC-A_1B_1C_1} = \frac{26}{27} V_{P-ABC} = \frac{52}{3}, \quad \text{则 } V_{P-ABC} = 18,$$

$$\text{设正三棱锥 } P - ABC \text{ 的高为 } d, \quad \text{则 } V_{P-ABC} = \frac{1}{3} d \times \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18, \quad \text{解得 } d = 2\sqrt{3},$$

取底面 ABC 的中心为 O ，则 $PO \perp$ 底面 ABC ，且 $AO = 2\sqrt{3}$ ，

$$\text{所以 } PA \text{ 与平面 } ABC \text{ 所成角的正切值 } \tan \angle PAO = \frac{PO}{AO} = 1.$$

故选：B.

8. 设函数 $f(x) = (x+a)\ln(x+b)$ ，若 $f(x) \geq 0$ ，则 $a^2 + b^2$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

【答案】C

【解析】

【分析】解法一：由题意可知： $f(x)$ 的定义域为 $(-b, +\infty)$ ，分类讨论 $-a$ 与 $-b, 1-b$ 的大小关系，结合符号分析判断，即可得 $b = a + 1$ ，代入可得最值；解法二：根据对数函数的性质分析 $\ln(x+b)$ 的符号，进而可得 $x+a$ 的符号，即可得 $b = a + 1$ ，代入可得最值。

【详解】解法一：由题意可知： $f(x)$ 的定义域为 $(-b, +\infty)$ ，

令 $x+a=0$ 解得 $x=-a$ ；令 $\ln(x+b)=0$ 解得 $x=1-b$ ；

若 $-a \leq -b$ ，当 $x \in (-b, 1-b)$ 时，可知 $x+a > 0, \ln(x+b) < 0$ ，

此时 $f(x) < 0$ ，不合题意；

若 $-b < -a < 1-b$ ，当 $x \in (-a, 1-b)$ 时，可知 $x+a > 0, \ln(x+b) < 0$ ，

此时 $f(x) < 0$ ，不合题意；

若 $-a = 1-b$ ，当 $x \in (-b, 1-b)$ 时，可知 $x+a < 0, \ln(x+b) < 0$ ，此时 $f(x) > 0$ ；

当 $x \in [1-b, +\infty)$ 时，可知 $x+a \geq 0, \ln(x+b) \geq 0$ ，此时 $f(x) \geq 0$ ；

可知若 $-a = 1-b$ ，符合题意；

若 $-a > 1-b$ ，当 $x \in (1-b, -a)$ 时，可知 $x+a < 0, \ln(x+b) > 0$ ，

此时 $f(x) < 0$ ，不合题意；

综上所述： $-a = 1-b$ ，即 $b = a + 1$ ，

则 $a^2 + b^2 = a^2 + (a+1)^2 = 2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ ，当且仅当 $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ 时，等号成立，

所以 $a^2 + b^2$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$ ；

解法二：由题意可知： $f(x)$ 的定义域为 $(-b, +\infty)$ ，

令 $x+a=0$ 解得 $x=-a$ ；令 $\ln(x+b)=0$ 解得 $x=1-b$ ；

则当 $x \in (-b, 1-b)$ 时， $\ln(x+b) < 0$ ，故 $x+a \leq 0$ ，所以 $1-b+a \leq 0$ ；

$x \in (1-b, +\infty)$ 时， $\ln(x+b) > 0$ ，故 $x+a \geq 0$ ，所以 $1-b+a \geq 0$ ；

故 $1-b+a=0$ ，则 $a^2 + b^2 = a^2 + (a+1)^2 = 2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ ，

当且仅当 $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立,

所以 $a^2 + b^2$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

故选: C.

【点睛】关键点点睛: 分别求 $x+a=0$ 、 $\ln(x+b)=0$ 的根, 以根和函数定义域为临界, 比较大小分类讨论, 结合符号性分析判断.

二、多项选择题: 本大题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分, 选对但不全的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 对于函数 $f(x) = \sin 2x$ 和 $g(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$, 下列正确的有 ()

- A. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同零点
B. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同最大值
C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最小正周期
D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有相同的对称轴

【答案】BC

【解析】

【分析】根据正弦函数的零点, 最值, 周期公式, 对称轴方程逐一分析每个选项即可.

【详解】A 选项, 令 $f(x) = \sin 2x = 0$, 解得 $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 即为 $f(x)$ 零点,

令 $g(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$, 解得 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}$, 即为 $g(x)$ 零点,

显然 $f(x), g(x)$ 零点不同, A 选项错误;

B 选项, 显然 $f(x)_{\max} = g(x)_{\max} = 1$, B 选项正确;

C 选项, 根据周期公式, $f(x), g(x)$ 的周期均为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, C 选项正确;

D 选项, 根据正弦函数的性质 $f(x)$ 的对称轴满足 $2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$,

$g(x)$ 的对称轴满足 $2x - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}$,

显然 $f(x), g(x)$ 图像的对称轴不同, D 选项错误.

故选: BC

10. 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的准线为 l , P 为 C 上的动点, 过 P 作 $\odot A: x^2 + (y-4)^2 = 1$ 的一条切线, Q 为切点, 过 P 作 l 的垂线, 垂足为 B , 则 ()

A. l 与 $\odot A$ 相切

B. 当 P, A, B 三点共线时, $|PQ| = \sqrt{15}$

C. 当 $|PB| = 2$ 时, $PA \perp AB$

D. 满足 $|PA| = |PB|$ 的点 P 有且仅有 2 个

【答案】ABD

【解析】

【分析】A 选项, 抛物线准线为 $x = -1$, 根据圆心到准线的距离来判断; B 选项, P, A, B 三点共线时, 先求出 P 的坐标, 进而得出切线长; C 选项, 根据 $|PB| = 2$ 先算出 P 的坐标, 然后验证 $k_{PA}k_{AB} = -1$ 是否成立; D 选项, 根据抛物线的定义, $|PB| = |PF|$, 于是问题转化成 $|PA| = |PF|$ 的 P 点的存在性问题, 此时考察 AF 的中垂线和抛物线的交点个数即可, 亦可直接设 P 点坐标进行求解.

【详解】A 选项, 抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线为 $x = -1$,

$\odot A$ 的圆心 $(0, 4)$ 到直线 $x = -1$ 的距离显然是 1, 等于圆的半径,

故准线 l 和 $\odot A$ 相切, A 选项正确;

B 选项, P, A, B 三点共线时, 即 $PA \perp l$, 则 P 的纵坐标 $y_P = 4$,

由 $y_P^2 = 4x_P$, 得到 $x_P = 4$, 故 $P(4, 4)$,

此时切线长 $|PQ| = \sqrt{|PA|^2 - r^2} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$, B 选项正确;

C 选项, 当 $|PB| = 2$ 时, $x_P = 1$, 此时 $y_P^2 = 4x_P = 4$, 故 $P(1, 2)$ 或 $P(1, -2)$,

当 $P(1, 2)$ 时, $A(0, 4), B(-1, 2)$, $k_{PA} = \frac{4-2}{0-1} = -2$, $k_{AB} = \frac{4-2}{0-(-1)} = 2$,

不满足 $k_{PA}k_{AB} = -1$;

当 $P(1, -2)$ 时, $A(0, 4), B(-1, 2)$, $k_{PA} = \frac{4-(-2)}{0-1} = -6$, $k_{AB} = \frac{4-(-2)}{0-(-1)} = 6$,

不满足 $k_{PA}k_{AB} = -1$;

于是 $PA \perp AB$ 不成立, C 选项错误;

D 选项, 方法一: 利用抛物线定义转化

根据抛物线的定义, $|PB| = |PF|$, 这里 $F(1, 0)$,

于是 $|PA| = |PB|$ 时 P 点的存在性问题转化成 $|PA| = |PF|$ 时 P 点的存在性问题,

$A(0,4), F(1,0)$, AF 中点 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, AF 中垂线的斜率为 $-\frac{1}{k_{AF}} = \frac{1}{4}$,

于是 AF 的中垂线方程为: $y = \frac{2x+15}{8}$, 与抛物线 $y^2 = 4x$ 联立可得 $y^2 - 16y + 30 = 0$,

$\Delta = 16^2 - 4 \times 30 = 136 > 0$, 即 AF 的中垂线和抛物线有两个交点,

即存在两个 P 点, 使得 $|PA| = |PF|$, D 选项正确.

方法二: (设点直接求解)

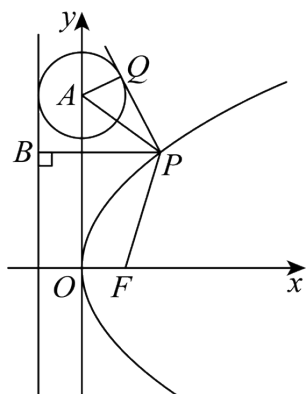
设 $P\left(\frac{t^2}{4}, t\right)$, 由 $PB \perp l$ 可得 $B(-1, t)$, 又 $A(0, 4)$, 又 $|PA| = |PB|$,

根据两点间的距离公式, $\sqrt{\frac{t^4}{16} + (t-4)^2} = \frac{t^2}{4} + 1$, 整理得 $t^2 - 16t + 30 = 0$,

$\Delta = 16^2 - 4 \times 30 = 136 > 0$, 则关于 t 的方程有两个解,

即存在两个这样的 P 点, D 选项正确.

故选: ABD



11. 设函数 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1$, 则 ()

- A. 当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 有三个零点
- B. 当 $a < 0$ 时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点
- C. 存在 a, b , 使得 $x = b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称轴
- D. 存在 a , 使得点 $(1, f(1))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称中心

【答案】AD

【解析】

【分析】A 选项, 先分析出函数的极值点为 $x = 0, x = a$, 根据零点存在定理和极值的符号判断出 $f(x)$ 在 $(-1, 0), (0, a), (a, 2a)$ 上各有一个零点; B 选项, 根据极值和导函数符号的关系进行分析; C 选项, 假设存

在这样的 a, b , 使得 $x = b$ 为 $f(x)$ 的对称轴, 则 $f(x) = f(2b - x)$ 为恒等式, 据此计算判断; D 选项, 若存在这样的 a , 使得 $(1, 3 - 3a)$ 为 $f(x)$ 的对称中心, 则 $f(x) + f(2 - x) = 6 - 6a$, 据此进行计算判断, 亦可利用拐点结论直接求解.

【详解】A 选项, $f'(x) = 6x^2 - 6ax = 6x(x - a)$, 由于 $a > 1$,
故 $x \in (-\infty, 0) \cup (a, +\infty)$ 时 $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0), (a, +\infty)$ 上单调递增,
 $x \in (0, a)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,
则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取到极大值, 在 $x = a$ 处取到极小值,
由 $f(0) = 1 > 0$, $f(a) = 1 - a^3 < 0$, 则 $f(0)f(a) < 0$,
根据零点存在定理 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上有一个零点,
又 $f(-1) = -1 - 3a < 0$, $f(2a) = 4a^3 + 1 > 0$, 则 $f(-1)f(0) < 0, f(a)f(2a) < 0$,
则 $f(x)$ 在 $(-1, 0), (a, 2a)$ 上各有一个零点, 于是 $a > 1$ 时, $f(x)$ 有三个零点, A 选项正确;

B 选项, $f'(x) = 6x(x - a)$, $a < 0$ 时, $x \in (a, 0), f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

$x \in (0, +\infty)$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

此时 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取到极小值, B 选项错误;

C 选项, 假设存在这样的 a, b , 使得 $x = b$ 为 $f(x)$ 的对称轴,

即存在这样的 a, b 使得 $f(x) = f(2b - x)$,

即 $2x^3 - 3ax^2 + 1 = 2(2b - x)^3 - 3a(2b - x)^2 + 1$,

根据二项式定理, 等式右边 $(2b - x)^3$ 展开式含有 x^3 的项为 $2C_3^3(2b)^0(-x)^3 = -2x^3$,

于是等式左右两边 x^3 的系数都不相等, 原等式不可能恒成立,

于是不存在这样的 a, b , 使得 $x = b$ 为 $f(x)$ 的对称轴, C 选项错误;

D 选项,

方法一: 利用对称中心的表达式化简

$f(1) = 3 - 3a$, 若存在这样的 a , 使得 $(1, 3 - 3a)$ 为 $f(x)$ 的对称中心,

则 $f(x) + f(2 - x) = 6 - 6a$, 事实上,

$f(x) + f(2 - x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1 + 2(2 - x)^3 - 3a(2 - x)^2 + 1 = (12 - 6a)x^2 + (12a - 24)x + 18 - 12a$,

于是 $6-6a=(12-6a)x^2+(12a-24)x+18-12a$

$$\text{即} \begin{cases} 12-6a=0 \\ 12a-24=0 \\ 18-12a=6-6a \end{cases}, \text{解得 } a=2, \text{即存在 } a=2 \text{ 使得 } (1, f(1)) \text{ 是 } f(x) \text{ 的对称中心, D 选项正确.}$$

方法二：直接利用拐点结论

任何三次函数都有对称中心，对称中心的横坐标是二阶导数的零点，

$$f(x)=2x^3-3ax^2+1, f'(x)=6x^2-6ax, f''(x)=12x-6a,$$

$$\text{由 } f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{a}{2}, \text{于是该三次函数的对称中心为 } \left(\frac{a}{2}, f\left(\frac{a}{2}\right)\right),$$

$$\text{由题意 } (1, f(1)) \text{ 也是对称中心, 故 } \frac{a}{2}=1 \Leftrightarrow a=2,$$

即存在 $a=2$ 使得 $(1, f(1))$ 是 $f(x)$ 的对称中心，D 选项正确.

故选：AD

【点睛】结论点睛：（1） $f(x)$ 的对称轴为 $x=b \Leftrightarrow f(x)=f(2b-x)$ ；（2） $f(x)$ 关于 (a, b) 对称

$\Leftrightarrow f(x)+f(2a-x)=2b$ ；（3）任何三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 都有对称中心，对称中心是三次

函数的拐点，对称中心的横坐标是 $f''(x)=0$ 的解，即 $\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$ 是三次函数的对称中心

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_3+a_4=7$ ， $3a_2+a_5=5$ ，则 $S_{10}=\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】95

【解析】

【分析】利用等差数列通项公式得到方程组，解出 a_1, d ，再利用等差数列的求和公式即可得到答案.

$$\text{【详解】因为数列 } a_n \text{ 为等差数列, 则由题意得 } \begin{cases} a_1+2d+a_1+3d=7 \\ 3(a_1+d)+a_1+4d=5 \end{cases}, \text{解得 } \begin{cases} a_1=-4 \\ d=3 \end{cases},$$

$$\text{则 } S_{10}=10a_1+\frac{10 \times 9}{2}d=10 \times (-4)+45 \times 3=95.$$

故答案为：95.

13. 已知 α 为第一象限角， β 为第三象限角， $\tan \alpha + \tan \beta = 4$ ， $\tan \alpha \tan \beta = \sqrt{2} + 1$ ，则 $\sin(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【解析】

【分析】法一：根据两角和与差的正切公式得 $\tan(\alpha + \beta) = -2\sqrt{2}$ ，再缩小 $\alpha + \beta$ 的范围，最后结合同角的平方和关系即可得到答案；法二：利用弦化切的方法即可得到答案.

【详解】法一：由题意得 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{4}{1 - (\sqrt{2} + 1)} = -2\sqrt{2}$,

因为 $\alpha \in \left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right), \beta \in \left(2m\pi + \pi, 2m\pi + \frac{3\pi}{2}\right), k, m \in \mathbb{Z}$,

则 $\alpha + \beta \in ((2m + 2k)\pi + \pi, (2m + 2k)\pi + 2\pi), k, m \in \mathbb{Z}$,

又因为 $\tan(\alpha + \beta) = -2\sqrt{2} < 0$,

则 $\alpha + \beta \in \left((2m + 2k)\pi + \frac{3\pi}{2}, (2m + 2k)\pi + 2\pi\right), k, m \in \mathbb{Z}$, 则 $\sin(\alpha + \beta) < 0$,

则 $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = -2\sqrt{2}$, 联立 $\sin^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) = 1$, 解得 $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

法二：因为 α 为第一象限角， β 为第三象限角，则 $\cos \alpha > 0, \cos \beta < 0$,

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}, \quad \cos \beta = \frac{\cos \beta}{\sqrt{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta}} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}},$$

则 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta (\tan \alpha + \tan \beta)$

$$= 4 \cos \alpha \cos \beta = \frac{-4}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = \frac{-4}{\sqrt{(\tan \alpha + \tan \beta)^2 + (\tan \alpha \tan \beta - 1)^2}} = \frac{-4}{\sqrt{4^2 + 2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

故答案为： $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

14. 在如图的 4×4 方格表中选 4 个方格，要求每行和每列均恰有一个方格被选中，则共有_____种选法，在所有符合上述要求的选法中，选中方格中的 4 个数之和的最大值是_____.

11	21	31	40
12	22	33	42
13	22	33	43
15	24	34	44

【答案】 ①. 24 ②. 112

【解析】

【分析】由题意可知第一、二、三、四列分别有 4、3、2、1 个方格可选；利用列举法写出所有的可能结果，即可求解.

【详解】由题意知，选 4 个方格，每行和每列均恰有一个方格被选中，

则第一列有 4 个方格可选，第二列有 3 个方格可选，

第三列有 2 个方格可选，第四列有 1 个方格可选，

所以共有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 种选法；

每种选法可标记为 (a, b, c, d) ， a, b, c, d 分别表示第一、二、三、四列的数字，

则所有的可能结果为：

$(11, 22, 33, 44), (11, 22, 34, 43), (11, 22, 33, 44), (11, 22, 34, 42), (11, 24, 33, 43), (11, 24, 33, 42)$ ，

$(12, 21, 33, 44), (12, 21, 34, 43), (12, 22, 31, 44), (12, 22, 34, 40), (12, 24, 31, 43), (12, 24, 33, 40)$ ，

$(13, 21, 33, 44), (13, 21, 34, 42), (13, 22, 31, 44), (13, 22, 34, 40), (13, 24, 31, 42), (13, 24, 33, 40)$ ，

$(15, 21, 33, 43), (15, 21, 33, 42), (15, 22, 31, 43), (15, 22, 33, 40), (15, 22, 31, 42), (15, 22, 33, 40)$ ，

所以选中的方格中， $(15, 21, 33, 43)$ 的 4 个数之和最大，为 $15 + 21 + 33 + 43 = 112$.

故答案为：24；112

【点睛】关键点点睛：解决本题的关键是确定第一、二、三、四列分别有 4、3、2、1 个方格可选，利用列举法写出所有的可能结果.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 2$.

(1) 求 A .

(2) 若 $a = 2$ ， $\sqrt{2}b \sin C = c \sin 2B$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长.

【答案】(1) $A = \frac{\pi}{6}$

(2) $2 + \sqrt{6} + 3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】(1) 根据辅助角公式对条件 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 2$ 进行化简处理即可求解，常规方法还可利用同角三角函数的关系解方程组，亦可利用导数，向量数量积公式，万能公式解决；

(2) 先根据正弦定理边角互化算出 B ，然后根据正弦定理算出 b, c 即可得出周长。

【小问 1 详解】

方法一：常规方法（辅助角公式）

由 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 2$ 可得 $\frac{1}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A = 1$ ，即 $\sin(A + \frac{\pi}{3}) = 1$ ，

由于 $A \in (0, \pi) \Rightarrow A + \frac{\pi}{3} \in (\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ ，故 $A + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ ，解得 $A = \frac{\pi}{6}$

方法二：常规方法（同角三角函数的基本关系）

由 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 2$ ，又 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ，消去 $\sin A$ 得到：

$$4\cos^2 A - 4\sqrt{3}\cos A + 3 = 0 \Leftrightarrow (2\cos A - \sqrt{3})^2 = 0, \text{ 解得 } \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

又 $A \in (0, \pi)$ ，故 $A = \frac{\pi}{6}$

方法三：利用极值点求解

设 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x (0 < x < \pi)$ ，则 $f(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) (0 < x < \pi)$ ，

显然 $x = \frac{\pi}{6}$ 时， $f(x)_{\max} = 2$ ，注意到 $f(A) = \sin A + \sqrt{3} \cos A = 2 = 2 \sin(A + \frac{\pi}{3})$ ，

$f(x)_{\max} = f(A)$ ，在开区间 $(0, \pi)$ 上取到最大值，于是 $x = A$ 必定是极值点，

即 $f'(A) = 0 = \cos A - \sqrt{3} \sin A$ ，即 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

又 $A \in (0, \pi)$ ，故 $A = \frac{\pi}{6}$

方法四：利用向量数量积公式（柯西不等式）

设 $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$ ， $\vec{b} = (\sin A, \cos A)$ ，由题意， $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sin A + \sqrt{3} \cos A = 2$ ，

根据向量的数量积公式， $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 2 \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ ，

则 $2 \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 2 \Leftrightarrow \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 1$ ，此时 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ ，即 $\vec{a}, \vec{b}$ 同向共线，

根据向量共线条件, $1 \cdot \cos A = \sqrt{3} \cdot \sin A \Leftrightarrow \tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

又 $A \in (0, \pi)$, 故 $A = \frac{\pi}{6}$

方法五: 利用万能公式求解

设 $t = \tan \frac{A}{2}$, 根据万能公式, $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 2 = \frac{2t}{1+t^2} + \frac{\sqrt{3}(1-t^2)}{1+t^2}$,

整理可得, $t^2 - 2(2-\sqrt{3})t + (2-\sqrt{3})^2 = 0 = (t - (2-\sqrt{3}))^2$,

解得 $\tan \frac{A}{2} = t = 2 - \sqrt{3}$, 根据二倍角公式, $\tan A = \frac{2t}{1-t^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

又 $A \in (0, \pi)$, 故 $A = \frac{\pi}{6}$

【小问 2 详解】

由题设条件和正弦定理

$$\sqrt{2}b \sin C = c \sin 2B \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin B \sin C = 2 \sin C \sin B \cos B,$$

又 $B, C \in (0, \pi)$, 则 $\sin B \sin C \neq 0$, 进而 $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 得到 $B = \frac{\pi}{4}$,

于是 $C = \pi - A - B = \frac{7\pi}{12}$,

$$\sin C = \sin(\pi - A - B) = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4},$$

由正弦定理可得, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 即 $\frac{2}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{b}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{c}{\sin \frac{7\pi}{12}}$,

解得 $b = 2\sqrt{2}, c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$,

故 $\triangle ABC$ 的周长为 $2 + \sqrt{6} + 3\sqrt{2}$

16. 已知函数 $f(x) = e^x - ax - a^3$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x)$ 有极小值, 且极小值小于 0, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $(e-1)x - y - 1 = 0$

(2) $(1, +\infty)$

【解析】

【分析】(1) 求导，结合导数的几何意义求切线方程；

(2) 解法一：求导，分析 $a \leq 0$ 和 $a > 0$ 两种情况，利用导数判断单调性和极值，分析可得 $a^2 + \ln a - 1 > 0$ ，构造函数解不等式即可；解法二：求导，可知 $f'(x) = e^x - a$ 有零点，可得 $a > 0$ ，进而利用导数求 $f(x)$ 的单调性和极值，分析可得 $a^2 + \ln a - 1 > 0$ ，构造函数解不等式即可。

【小问 1 详解】

当 $a = 1$ 时，则 $f(x) = e^x - x - 1$ ， $f'(x) = e^x - 1$ ，

可得 $f(1) = e - 2$ ， $f'(1) = e - 1$ ，

即切点坐标为 $(1, e - 2)$ ，切线斜率 $k = e - 1$ ，

所以切线方程为 $y - (e - 2) = (e - 1)(x - 1)$ ，即 $(e - 1)x - y - 1 = 0$ 。

【小问 2 详解】

解法一：因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且 $f'(x) = e^x - a$ ，

若 $a \leq 0$ ，则 $f'(x) \geq 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，

可知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，无极值，不合题意；

若 $a > 0$ ，令 $f'(x) > 0$ ，解得 $x > \ln a$ ；令 $f'(x) < 0$ ，解得 $x < \ln a$ ；

可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 内单调递减，在 $(\ln a, +\infty)$ 内单调递增，

则 $f(x)$ 有极小值 $f(\ln a) = a - a \ln a - a^3$ ，无极大值，

由题意可得： $f(\ln a) = a - a \ln a - a^3 < 0$ ，即 $a^2 + \ln a - 1 > 0$ ，

构建 $g(a) = a^2 + \ln a - 1, a > 0$ ，则 $g'(a) = 2a + \frac{1}{a} > 0$ ，

可知 $g(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增，且 $g(1) = 0$ ，

不等式 $a^2 + \ln a - 1 > 0$ 等价于 $g(a) > g(1)$ ，解得 $a > 1$ ，

所以 a 的取值范围为 $(1, +\infty)$ ；

解法二：因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且 $f'(x) = e^x - a$ ，

若 $f(x)$ 有极小值，则 $f'(x) = e^x - a$ 有零点，

令 $f'(x) = e^x - a = 0$ ，可得 $e^x = a$ ，

可知 $y = e^x$ 与 $y = a$ 有交点，则 $a > 0$ ，

若 $a > 0$ ，令 $f'(x) > 0$ ，解得 $x > \ln a$ ；令 $f'(x) < 0$ ，解得 $x < \ln a$ ；

可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 内单调递减，在 $(\ln a, +\infty)$ 内单调递增，

则 $f(x)$ 有极小值 $f(\ln a) = a - a \ln a - a^3$ ，无极大值，符合题意，

由题意可得： $f(\ln a) = a - a \ln a - a^3 < 0$ ，即 $a^2 + \ln a - 1 > 0$ ，

构建 $g(a) = a^2 + \ln a - 1, a > 0$ ，

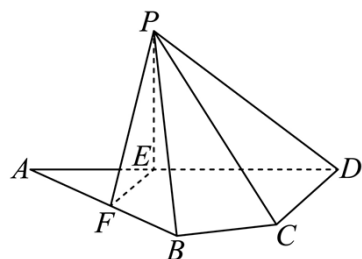
因为则 $y = a^2, y = \ln a - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增，

可知 $g(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增，且 $g(1) = 0$ ，

不等式 $a^2 + \ln a - 1 > 0$ 等价于 $g(a) > g(1)$ ，解得 $a > 1$ ，

所以 a 的取值范围为 $(1, +\infty)$ 。

17. 如图，平面四边形 $ABCD$ 中， $AB = 8$ ， $CD = 3$ ， $AD = 5\sqrt{3}$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ， $\angle BAD = 30^\circ$ ，点 E ， F 满足 $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$ ， $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ，将 $\triangle AEF$ 沿 EF 对折至 $\triangle PEF$ ，使得 $PC = 4\sqrt{3}$ 。



(1) 证明： $EF \perp PD$ ；

(2) 求面 PCD 与面 PBF 所成的二面角的正弦值。

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{8\sqrt{65}}{65}$

【解析】

【分析】(1) 由题意，根据余弦定理求得 $EF = 2$ ，利用勾股定理的逆定理可证得 $EF \perp AD$ ，则 $EF \perp PE, EF \perp DE$ ，结合线面垂直的判定定理与性质即可证明；

(2) 由 (1)，根据线面垂直的判定定理与性质可证明 $PE \perp ED$ ，建立如图空间直角坐标系 $E-xyz$ ，利

用空间向量法求解面面角即可.

【小问 1 详解】

由 $AB=8, AD=5\sqrt{3}, \overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,

得 $AE=2\sqrt{3}, AF=4$, 又 $\angle BAD=30^\circ$, 在 $\triangle AEF$ 中,

由余弦定理得 $EF=\sqrt{AE^2+AF^2-2AE\cdot AF\cos\angle BAD}=\sqrt{16+12-2\cdot 4\cdot 2\sqrt{3}\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}=2$,

所以 $AE^2+EF^2=AF^2$, 则 $AE\perp EF$, 即 $EF\perp AD$,

所以 $EF\perp PE, EF\perp DE$, 又 $PE\cap DE=E, PE, DE\subset$ 平面 PDE ,

所以 $EF\perp$ 平面 PDE , 又 $PD\subset$ 平面 PDE ,

故 $EF\perp PD$;

【小问 2 详解】

连接 CE , 由 $\angle ADC=90^\circ, ED=3\sqrt{3}, CD=3$, 则 $CE^2=ED^2+CD^2=36$,

在 $\triangle PEC$ 中, $PC=4\sqrt{3}, PE=2\sqrt{3}, EC=6$, 得 $EC^2+PE^2=PC^2$,

所以 $PE\perp EC$, 由 (1) 知 $PE\perp EF$, 又 $EC\cap EF=E, EC, EF\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$, 又 $ED\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PE\perp ED$, 则 PE, EF, ED 两两垂直, 建立如图空间直角坐标系 $E-xyz$,

则 $E(0,0,0), P(0,0,2\sqrt{3}), D(0,3\sqrt{3},0), C(3,3\sqrt{3},0), F(2,0,0), A(0,-2\sqrt{3},0)$,

由 F 是 AB 的中点, 得 $B(4,2\sqrt{3},0)$,

所以 $\overrightarrow{PC}=(3,3\sqrt{3},-2\sqrt{3}), \overrightarrow{PD}=(0,3\sqrt{3},-2\sqrt{3}), \overrightarrow{PB}=(4,2\sqrt{3},-2\sqrt{3}), \overrightarrow{PF}=(2,0,-2\sqrt{3})$,

设平面 PCD 和平面 PBF 的一个法向量分别为 $\vec{n}=(x_1, y_1, z_1), \vec{m}=(x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=3x_1+3\sqrt{3}y_1-2\sqrt{3}z_1=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=3\sqrt{3}y_1-2\sqrt{3}z_1=0 \end{cases}, \begin{cases} \vec{m}\cdot\overrightarrow{PB}=4x_2+2\sqrt{3}y_2-2\sqrt{3}z_2=0 \\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PF}=2x_2-2\sqrt{3}z_2=0 \end{cases},$$

令 $y_1=2, x_2=\sqrt{3}$, 得 $x_1=0, z_1=3, y_2=-1, z_2=1$,

所以 $\vec{n}=(0,2,3), \vec{m}=(\sqrt{3},-1,1)$,

$$\text{所以} |\cos\vec{m}, \vec{n}| = \frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{65}}{65},$$

若乙先参加第一阶段比赛，则甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率为 $P_Z = [1 - (1 - q)^3] \cdot p^3$,

$\therefore 0 < p < q$,

$$\begin{aligned}\therefore P_{\text{甲}} - P_Z &= q^3 - (q - pq)^3 - p^3 + (p - pq)^3 \\&= (q - p)(q^2 + pq + p^2) + (p - q) \cdot [(p - pq)^2 + (q - pq)^2 + (p - pq)(q - pq)] \\&= (p - q)(3p^2q^2 - 3p^2q - 3pq^2) \\&= 3pq(p - q)(pq - p - q) = 3pq(p - q)[(1 - p)(1 - q) - 1] > 0,\end{aligned}$$

$\therefore P_{\text{甲}} > P_Z$ ，应该由甲参加第一阶段比赛.

(ii) 若甲先参加第一阶段比赛，数学成绩 X 的所有可能取值为 0, 5, 10, 15,

$$P(X = 0) = (1 - p)^3 + [1 - (1 - p)^3] \cdot (1 - q)^3,$$

$$P(X = 5) = [1 - (1 - p)^3] \cdot C_3^1 q \cdot (1 - q)^2,$$

$$P(X = 10) = [1 - (1 - p)^3] \cdot C_3^2 q^2 (1 - q),$$

$$P(X = 15) = [1 - (1 - p)^3] \cdot q^3,$$

$$\therefore E(X) = 15[1 - (1 - p)^3]q = 15(p^3 - 3p^2 + 3p) \cdot q$$

记乙先参加第一阶段比赛，数学成绩 Y 的所有可能取值为 0, 5, 10, 15,

$$\text{同理 } E(Y) = 15(q^3 - 3q^2 + 3q) \cdot p$$

$$\therefore E(X) - E(Y) = 15[pq(p + q)(p - q) - 3pq(p - q)]$$

$$= 15(p - q)pq(p + q - 3),$$

因为 $0 < p < q$ ，则 $p - q < 0$ ， $p + q - 3 < 1 + 1 - 3 < 0$ ，

则 $(p - q)pq(p + q - 3) > 0$ ，

$\therefore$ 应该由甲参加第一阶段比赛.

【点睛】关键点点睛：本题第二问的关键是计算出相关概率和期望，采用作差法并因式分解从而比较出大小关系，最后得到结论.

19. 已知双曲线 $C: x^2 - y^2 = m (m > 0)$ ，点 $P_1(5, 4)$ 在 C 上， k 为常数， $0 < k < 1$. 按照如下方式依次构造点 $P_n (n = 2, 3, \dots)$ ，过 P_{n-1} 作斜率为 k 的直线与 C 的左支交于点 Q_{n-1} ，令 P_n 为 Q_{n-1} 关于 y 轴的对称点，

记 P_n 的坐标为 (x_n, y_n) .

(1) 若 $k = \frac{1}{2}$, 求 x_2, y_2 ;

(2) 证明: 数列 $\{x_n - y_n\}$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列;

(3) 设 S_n 为 $\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}$ 的面积, 证明: 对任意的正整数 n , $S_n = S_{n+1}$.

【答案】(1) $x_2 = 3, y_2 = 0$

(2) 证明见解析 (3) 证明见解析

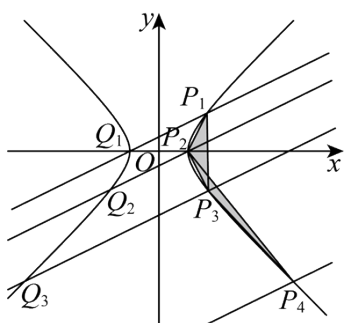
【解析】

【分析】(1) 直接根据题目中的构造方式计算出 P_2 的坐标即可;

(2) 根据等比数列的定义即可验证结论;

(3) 思路一: 使用平面向量数量积和等比数列工具, 证明 S_n 的取值为与 n 无关的定值即可. 思路二: 使用等差数列工具, 证明 S_n 的取值为与 n 无关的定值即可.

【小问 1 详解】



由已知有 $m = 5^2 - 4^2 = 9$, 故 C 的方程为 $x^2 - y^2 = 9$.

当 $k = \frac{1}{2}$ 时, 过 $P_1(5, 4)$ 且斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线为 $y = \frac{x+3}{2}$, 与 $x^2 - y^2 = 9$ 联立得到 $x^2 - \left(\frac{x+3}{2}\right)^2 = 9$.

解得 $x = -3$ 或 $x = 5$, 所以该直线与 C 的不同于 P_1 的交点为 $Q_1(-3, 0)$, 该点显然在 C 的左支上.

故 $P_2(3, 0)$, 从而 $x_2 = 3, y_2 = 0$.

【小问 2 详解】

由于过 $P_n(x_n, y_n)$ 且斜率为 k 的直线为 $y = k(x - x_n) + y_n$, 与 $x^2 - y^2 = 9$ 联立, 得到方程

$$x^2 - (k(x - x_n) + y_n)^2 = 9.$$

展开即得 $(1-k^2)x^2 - 2k(y_n - kx_n)x - (y_n - kx_n)^2 - 9 = 0$ ，由于 $P_n(x_n, y_n)$ 已经是直线

$y = k(x - x_n) + y_n$ 和 $x^2 - y^2 = 9$ 的公共点，故方程必有一根 $x = x_n$ 。

从而根据韦达定理，另一根 $x = \frac{2k(y_n - kx_n)}{1-k^2} - x_n = \frac{2ky_n - x_n - k^2x_n}{1-k^2}$ ，相应的

$$y = k(x - x_n) + y_n = \frac{y_n + k^2y_n - 2kx_n}{1-k^2}.$$

所以该直线与 C 的不同于 P_n 的交点为 $Q_n\left(\frac{2ky_n - x_n - k^2x_n}{1-k^2}, \frac{y_n + k^2y_n - 2kx_n}{1-k^2}\right)$ ，而注意到 Q_n 的横坐标亦

可通过韦达定理表示为 $\frac{-(y_n - kx_n)^2 - 9}{(1-k^2)x_n}$ ，故 Q_n 一定在 C 的左支上。

$$\text{所以 } P_{n+1}\left(\frac{x_n + k^2x_n - 2ky_n}{1-k^2}, \frac{y_n + k^2y_n - 2kx_n}{1-k^2}\right).$$

$$\text{这就得到 } x_{n+1} = \frac{x_n + k^2x_n - 2ky_n}{1-k^2}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n + k^2y_n - 2kx_n}{1-k^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } x_{n+1} - y_{n+1} &= \frac{x_n + k^2x_n - 2ky_n}{1-k^2} - \frac{y_n + k^2y_n - 2kx_n}{1-k^2} \\ &= \frac{x_n + k^2x_n + 2kx_n}{1-k^2} - \frac{y_n + k^2y_n + 2ky_n}{1-k^2} = \frac{1+k^2+2k}{1-k^2}(x_n - y_n) = \frac{1+k}{1-k}(x_n - y_n). \end{aligned}$$

再由 $x_1^2 - y_1^2 = 9$ ，就知道 $x_1 - y_1 \neq 0$ ，所以数列 $\{x_n - y_n\}$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列。

【小问 3 详解】

方法一：先证明一个结论：对平面上三个点 U, V, W ，若 $\overrightarrow{UV} = (a, b)$ ， $\overrightarrow{UW} = (c, d)$ ，则

$$S_{\triangle UVW} = \frac{1}{2}|ad - bc|. \quad (\text{若 } U, V, W \text{ 在同一条直线上，约定 } S_{\triangle UVW} = 0)$$

$$\text{证明： } S_{\triangle UVW} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{UV}| \cdot |\overrightarrow{UW}| \sin \angle UVW = \frac{1}{2}|\overrightarrow{UV}| \cdot |\overrightarrow{UW}| \sqrt{1 - \cos^2 \angle UVW}$$

$$= \frac{1}{2}|\overrightarrow{UV}| \cdot |\overrightarrow{UW}| \sqrt{1 - \left(\frac{\overrightarrow{UV} \cdot \overrightarrow{UW}}{|\overrightarrow{UV}| \cdot |\overrightarrow{UW}|}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{UV}|^2 \cdot |\overrightarrow{UW}|^2 - (\overrightarrow{UV} \cdot \overrightarrow{UW})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 - a^2c^2 - b^2d^2 - 2abcd}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd} = \frac{1}{2} \sqrt{(ad - bc)^2} = \frac{1}{2} |ad - bc|.$$

证毕，回到原题.

$$\text{由于上一小问已经得到 } x_{n+1} = \frac{x_n + k^2 x_n - 2ky_n}{1 - k^2}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n + k^2 y_n - 2kx_n}{1 - k^2},$$

$$\text{故 } x_{n+1} + y_{n+1} = \frac{x_n + k^2 x_n - 2ky_n}{1 - k^2} + \frac{y_n + k^2 y_n - 2kx_n}{1 - k^2} = \frac{1 + k^2 - 2k}{1 - k^2} (x_n + y_n) = \frac{1 - k}{1 + k} (x_n + y_n).$$

再由 $x_1^2 - y_1^2 = 9$ ，就知道 $x_1 + y_1 \neq 0$ ，所以数列 $\{x_n + y_n\}$ 是公比为 $\frac{1-k}{1+k}$ 的等比数列.

所以对任意的正整数 m ，都有

$$\begin{aligned} & x_n y_{n+m} - y_n x_{n+m} \\ &= \frac{1}{2} ((x_n x_{n+m} - y_n y_{n+m}) + (x_n y_{n+m} - y_n x_{n+m})) - \frac{1}{2} ((x_n x_{n+m} - y_n y_{n+m}) - (x_n y_{n+m} - y_n x_{n+m})) \\ &= \frac{1}{2} (x_n - y_n)(x_{n+m} + y_{n+m}) - \frac{1}{2} (x_n + y_n)(x_{n+m} - y_{n+m}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^m (x_n - y_n)(x_n + y_n) - \frac{1}{2} \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^m (x_n + y_n)(x_n - y_n) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1-k}{1+k} \right)^m - \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^m \right) (x_n^2 - y_n^2) \\ &= \frac{9}{2} \left(\left(\frac{1-k}{1+k} \right)^m - \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^m \right). \end{aligned}$$

$$\text{而又有 } \overrightarrow{P_{n+1}P_n} = (-(x_{n+1} - x_n), -(y_{n+1} - y_n)), \quad \overrightarrow{P_{n+1}P_{n+2}} = (x_{n+2} - x_{n+1}, y_{n+2} - y_{n+1}),$$

故利用前面已经证明的结论即得

$$\begin{aligned} S_n &= S_{\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}} = \frac{1}{2} |-(x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1}) + (y_{n+1} - y_n)(x_{n+2} - x_{n+1})| \\ &= \frac{1}{2} |(x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n)(x_{n+2} - x_{n+1})| \\ &= \frac{1}{2} |(x_{n+1} y_{n+2} - y_{n+1} x_{n+2}) + (x_n y_{n+1} - y_n x_{n+1}) - (x_n y_{n+2} - y_n x_{n+2})| \\ &= \frac{1}{2} \left| 9 \left(\frac{1-k}{1+k} - \frac{1+k}{1-k} \right) + \frac{9}{2} \left(\frac{1-k}{1+k} - \frac{1+k}{1-k} \right) - \frac{9}{2} \left(\left(\frac{1-k}{1+k} \right)^2 - \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^2 \right) \right|. \end{aligned}$$

这就表明 S_n 的取值是与 n 无关的定值，所以 $S_n = S_{n+1}$.

$$\text{方法二：由于上一小问已经得到 } x_{n+1} = \frac{x_n + k^2 x_n - 2ky_n}{1 - k^2}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n + k^2 y_n - 2kx_n}{1 - k^2},$$

$$\text{故 } x_{n+1} + y_{n+1} = \frac{x_n + k^2 x_n - 2ky_n}{1-k^2} + \frac{y_n + k^2 y_n - 2kx_n}{1-k^2} = \frac{1+k^2-2k}{1-k^2} (x_n + y_n) = \frac{1-k}{1+k} (x_n + y_n).$$

再由 $x_1^2 - y_1^2 = 9$ ，就知道 $x_1 + y_1 \neq 0$ ，所以数列 $\{x_n + y_n\}$ 是公比为 $\frac{1-k}{1+k}$ 的等比数列。

所以对任意的正整数 m ，都有

$$\begin{aligned} & x_n y_{n+m} - y_n x_{n+m} \\ &= \frac{1}{2} \left((x_n x_{n+m} - y_n y_{n+m}) + (x_n y_{n+m} - y_n x_{n+m}) \right) - \frac{1}{2} \left((x_n x_{n+m} - y_n y_{n+m}) - (x_n y_{n+m} - y_n x_{n+m}) \right) \\ &= \frac{1}{2} (x_n - y_n) (x_{n+m} + y_{n+m}) - \frac{1}{2} (x_n + y_n) (x_{n+m} - y_{n+m}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^m (x_n - y_n) (x_n + y_n) - \frac{1}{2} \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^m (x_n + y_n) (x_n - y_n) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1-k}{1+k} \right)^m - \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^m \right) (x_n^2 - y_n^2) \\ &= \frac{9}{2} \left(\left(\frac{1-k}{1+k} \right)^m - \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^m \right). \end{aligned}$$

$$\text{这就得到 } x_{n+2} y_{n+3} - y_{n+2} x_{n+3} = \frac{9}{2} \left(\frac{1-k}{1+k} - \frac{1+k}{1-k} \right) = x_n y_{n+1} - y_n x_{n+1},$$

$$\text{以及 } x_{n+1} y_{n+3} - y_{n+1} x_{n+3} = \frac{9}{2} \left(\left(\frac{1-k}{1+k} \right)^2 - \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^2 \right) = x_n y_{n+2} - y_n x_{n+2}.$$

$$\text{两式相减，即得 } (x_{n+2} y_{n+3} - y_{n+2} x_{n+3}) - (x_{n+1} y_{n+3} - y_{n+1} x_{n+3}) = (x_n y_{n+1} - y_n x_{n+1}) - (x_n y_{n+2} - y_n x_{n+2}).$$

$$\text{移项得到 } x_{n+2} y_{n+3} - y_n x_{n+2} - x_{n+1} y_{n+3} + y_n x_{n+1} = y_{n+2} x_{n+3} - x_n y_{n+2} - y_{n+1} x_{n+3} + x_n y_{n+1}.$$

$$\text{故 } (y_{n+3} - y_n) (x_{n+2} - x_{n+1}) = (y_{n+2} - y_{n+1}) (x_{n+3} - x_n).$$

$$\text{而 } \overrightarrow{P_n P_{n+3}} = (x_{n+3} - x_n, y_{n+3} - y_n), \quad \overrightarrow{P_{n+1} P_{n+2}} = (x_{n+2} - x_{n+1}, y_{n+2} - y_{n+1}).$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{P_n P_{n+3}} \text{ 和 } \overrightarrow{P_{n+1} P_{n+2}} \text{ 平行，这就得到 } S_{\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}} = S_{\triangle P_{n+1} P_{n+2} P_{n+3}}, \text{ 即 } S_n = S_{n+1}.$$

【点睛】关键点点睛：本题的关键在于将解析几何和数列知识的结合，需要综合运用多方面知识方可得解。