2003年江西高考理科数学真题及答案

注意事项：

1．答第Ⅰ卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上．

2.每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，不能答在试题卷上．

3．考试结束，监考人将本试卷和答题卡一并收回．

参考公式：

三角函数的积化和差公式：

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

正棱台、圆台的侧面积公式

$S_{台侧}=\frac{1}{2}(c'+c)l$　其中 c'、c 分别表示上、下底面周长，l 表示斜高或母线长．

球体的体积公式：$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$，其中R表示球的半径．

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分．

第Ⅰ卷（选择题共60分）

一．选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的

1．已知 $x\in(-\frac{\pi}{2}，0)$，$\cos x=\frac{4}{5}$，则 $tg2x=$（　　）

（A）$\frac{7}{24}$　（B）$-\frac{7}{24}$　（C）$\frac{24}{7}$　（D）$-\frac{24}{7}$

2．圆锥曲线 $\rho=\frac{8\sin\theta}{\cos^2\theta}$ 的准线方程是（　　）

（A）$\rho\cos\theta=-2$　（B）$\rho\cos\theta=2$　（C）$\rho\sin\theta=2$　（D）$\rho\sin\theta=-2$

3．设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1 & x\le 0\\ x^{\frac{1}{2}} & x>0\end{cases}$，若 $f(x_0)>1$，则 x_0 的取值范围是（　　）

（A）（-1，1）　（B）（-1，$+\infty$）

（C）（$-\infty$，-2）∪（0，$+\infty$）　（D）（$-\infty$，-1）∪（1，$+\infty$）

4．函数 $y=2\sin x(\sin x+\cos x)$ 的最大值为（　　）

（A）$1+\sqrt{2}$　　（B）$\sqrt{2}-1$　　（C）$\sqrt{2}$　　（D）2

5．已知圆 C：$(x-a)^2+(y-2)^2=4$（$a>0$）及直线 l：$x-y+3=0$，当直线 l 被 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$ 时，则 a（　　）

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$2-\sqrt{2}$　　（C）$\sqrt{2}-1$　　（D）$\sqrt{2}+1$

6．已知圆锥的底面半径为 R，高为 3R，在它的所有内接圆柱中，全面积的最大值是（　　）

（A）$2\pi R^2$　　（B）$\frac{9}{4}\pi R^2$　　（C）$\frac{8}{3}\pi R^2$　　（D）$\frac{3}{2}\pi R^2$

7．已知方程 $(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$ 的四个根组成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的的等差数列，则 $|m-n|=$（　　）

（A）1　　（B）$\frac{3}{4}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{3}{8}$

8．已知双曲线中心在原点且一个焦点为 F（$\sqrt{7}$，0），直线 $y=x-1$ 与其相交于 M、N 两点，MN 中点的横坐标为 $-\frac{2}{3}$，则此双曲线的方程是（　　）

（A）$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$　　（B）$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$　　（C）$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1$　　（D）$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{5}=1$

9．函数 $f(x)=\sin x$，$x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$（　　）

（A）$-\arcsin x$　$x\in[-1，1]$　　（B）$-\pi-\arcsin x$　$x\in[-1，1]$

（C）$\pi+\arcsin x$　$x\in[-1，1]$　　（D）$\pi-\arcsin x$　$x\in[-1，1]$

10．已知长方形的四个顶点 A（0，0），B（2，0），C（2，1）和 D（0，1），一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后，依次反射到 CD、DA 和 AB 上的点 P_2、P_3 和 P_4（入射角等于反射角），设 P_4 的坐标为（x_4，0），若 $1<x_4<2$，则 tgθ 的取值范围是（　　）

（A）（$\frac{1}{3}$，1）　　（B）（$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$）　　（C）（$\frac{2}{5}$，$\frac{1}{2}$）　　（D）（$\frac{2}{5}$，$\frac{2}{3}$）

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C_2^2+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_n^2}{n(C_2^1+C_3^1+C_4^1+\cdots+C_n^1)}=$ （　　）

（A）3　　（B）$\frac{1}{3}$　　（C）$\frac{1}{6}$　　（D）6

12. 一个四面体的所有棱长都为$\sqrt{2}$，四个顶点在同一球面上，则些球的表面积为（　　）

（A）3π　　（B）4π　　（C）$3\sqrt{3}\pi$　　（D）6π

2003 年普通高等学校招生全国统一考试（全国卷）

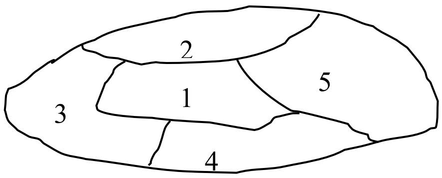
第Ⅱ卷（非选择题共 90 分）

二. 填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分.把答案填在题中横线上.

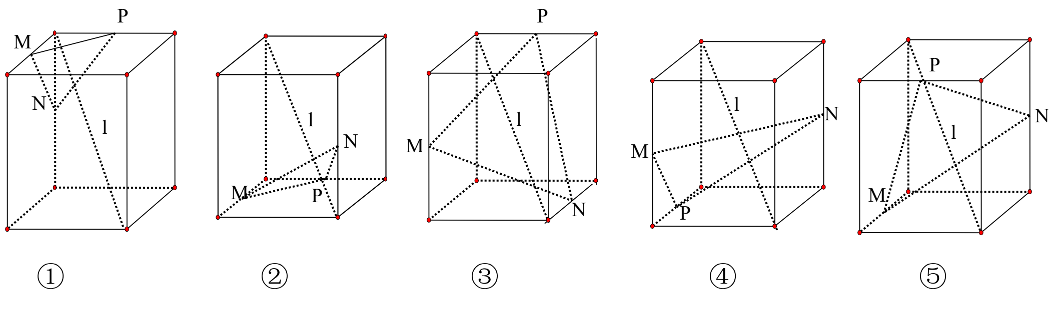
13. $(x^2-\frac{1}{2x})^9$的展开式中x^9系数是____________

14. 使$\log_2(-x)<x+1$成立的x的取值范围是_________________

15. 如图，一个地区分为 5 个行政区域，现给地图着色，要求相邻地区不得使用同一颜色，现有 4 种颜色可供选择，则不同的着色方法共有种.（以数字作答）



16. 下列 5 个正方体图形中，l是正方体的一条对角线，点 M、N、P 分别为其所在棱的中点，能得出$l\perp$面 MNP 的图形的序号是（写出所有符合要求的图形序号）

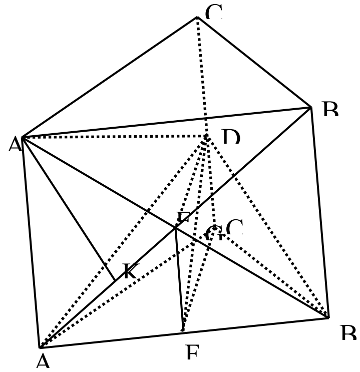


三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分，解答应写出文字说明，证明过程或或演算步骤

17.（本小题满分 12 分）

已知复数z的辐角为$60°$，且$|z-1|$是$|z|$和$|z-2|$的等比中项，求$|z|$

18.（本小题满分 12 分）



如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面是等腰直角三角形，$\angle ACB=90^\circ$，侧棱 $AA_1=2$，D、E 分别是 CC_1 与 A_1B 的中点，点 E 在平面 ABD 上的射影是△ABD 的重心 G

（I）求 A_1B 与平面 ABD 所成角的大小（结果用反三角函数值表示）

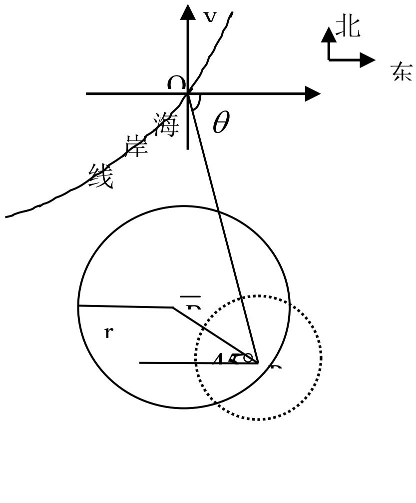
（II）求点 A_1 到平面 AED 的距离

19.（本小题满分 12 分）　　已知 $c>0$，设

P：函数 $y=c^x$ 在 R 上单调递减　　Q：不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 R

如果 P 和 Q 有且仅有一个正确，求 c 的取值范围

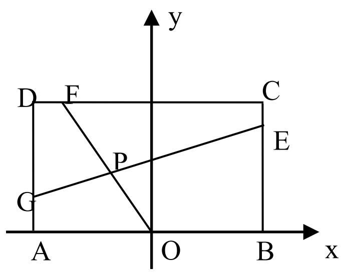
20.（本小题满分 12 分）



在某海滨城市附近海面有一台风，据监测，当前台风中心位于城市 O（如图）的东偏南 $\theta(\theta=\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}$）方向 300km 的海面 P 处，并以 20km/h 的速度向西偏北 45° 方向移动，台风侵袭的范围为圆形区域，当前半径为 60km，并以 10km/h 的速度不断增大，问几小时后该城市开始受到台风的侵袭？

21.（本小题满分 14 分）

已知常数 $a>0$，在矩形 ABCD 中，$AB=4$，



$BC=4a$，O 为 AB 的中点，点 E、F、G 分别在 BC、CD、DA 上移动，且 $\frac{BE}{BC}=\frac{CF}{CD}=\frac{DG}{DA}$，P 为 GE 与 OF 的交点（如图），问是否存在两个定点，使 P 到这两点的距离的和为定值？若存在，求出这两点的坐标及此定值；若不存在，请说明理由.

22.（本小题满分 12 分，附加题 4 分）

（I）设 $\{a_n\}$ 是集合 $\{2^s+2^t\mid\ 0\le s<t$ 且 $s,t\in Z\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列，即 $a_1=3$，$a_2=5$，$a_3=6$，$a_4=9$，$a_5=10$，$a_6=12$，…

将数列 $\{a_n\}$ 各项按照上小下大，左小右大的原则写成如下的三角形数表：

3

5　6

9　10　12

—　—　—　—

…………

⑴写出这个三角形数表的第四行、第五行各数；

⑵求 a_{100}

（II）（本小题为附加题，如果解答正确，加 4 分，但全卷总分不超过 150 分）

设 $\{b_n\}$ 是集合 $\{2^r+2^s+2^t\mid 0\le r<s<t$，且 $r,s,t\in Z\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列，已知 $b_k=1160$，求 k.

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算. 每小题 5 分，满分 60 分.

1．D　2．C　3．D　4．A　5．C　6．B　7．C　8．D　9．D　10．C　11．B　12．A

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算.每小题 4 分,满分 16 分.

13．$-\frac{21}{2}$　　14．(-1，0)　　15．72　　16．①④⑤

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17． 解：设$z=r\cos 60^{\circ}+r\sin 60^{\circ})$，则复数$z$的实部为$\frac{r}{2}$. $z-\bar{z}=r, z\bar{z}=r^{2}$由题设

$|z-1|^{2}=|z|\cdot|z-2|$即$:(z-1)(\bar{z}-1)=|z|\sqrt{(z-2)(\bar{z}-2)}, \therefore r^{2}-r+1=r\sqrt{r^{2}-2r+4}$,

整理得$r^{2}+2r-1=0$.解得$:r=\sqrt{2}-1, r=-\sqrt{2}-1$(舍去).即$|z|=\sqrt{2}-1$.

18.（Ⅰ）解：连结 BG，则 BG 是 BE 在 ABD 的射影，即∠EBG 是 A_1B 与平面 ABD 所成的角.

设 F 为 AB 中点，连结 EF、FC，

$\because D, E$分别是CC_1, A_1B的中点,又$DC\perp$平面ABC,$\therefore CDEF$为矩形

连结DE, G是ΔADB的重心,$\therefore G\in DF$.在直角三角形EFD中

$EF^{2}=FG\cdot FD=\frac{1}{3}FD^{2}, \because EF=1, \therefore FD=\sqrt{3}.\cdots\cdots(4分)$

于是$ED=\sqrt{2}, EG=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

$\because FC=CD=\sqrt{2}, \therefore AB=2\sqrt{2}, A_1B=2\sqrt{3}, EB=\sqrt{3}$.

$\therefore \sin\angle EBG=\frac{EG}{EB}=\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

$\therefore A_1B$与平面ABD所成的角是$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$.

（Ⅱ）解：$\because ED\perp AB, ED\perp EF$, 又$EF\cap AB=F$,

$\therefore ED\perp$面A_1AB, 又$ED\subset$面AED.$\therefore$平面$AED\perp$平面A_1AB, 且面$AED\cap$面$A_1AB=AE$.

作$A_1K\perp AE$, 垂足为K.$\therefore A_1K\perp$平面AED, 即A_1K是A_1到平面AED的距离.

在ΔA_1AB_1中, $A_1K=\frac{A_1A\cdot A_1B_1}{AB_1}=\frac{2\times2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ $\therefore A_1$到平面AED的距离为$\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

19．解：函数$y=c^{x}$在 R 上单调递减$\Leftrightarrow 0<c<1$.

不等式$x+|x-2c|>1$的解集为$R\Leftrightarrow$函数$y=x+|x-2c|$在R上恒大于1.

$\because x+|x-2c|=\begin{cases}2x-2c, x\ge 2c,\\ 2c, \quad x<2c,\end{cases}$

$\therefore$ 函数$y=x+|x-2c|$在R上的最小值为$2c$.

$\therefore$ 不等式$|x+x-2c|>1$的解集为$R\Leftrightarrow 2c>1\Leftrightarrow c>\frac{1}{2}$.

如果P正确,且Q不正确,则$0<c\le\frac{1}{2}$.

如果P不正确,且Q正确,则$c\ge 1$.所以c的取值范围为$(0,\frac{1}{2}]\cup[1,+\infty)$.

（以上方法在新疆考区无一人使用，大都是用解不等式的方法，个别使用的图象法）

20．解：如图建立坐标系以 O 为原点，正东方向为 x 轴正向.

在时刻：(1) 台风中心 P（$\bar{x}$，$\bar{y}$）的坐标为$\begin{cases}\bar{x}=300\times\frac{\sqrt{2}}{10}-20\times\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ \bar{y}=-300\times\frac{7\sqrt{2}}{10}+20\times\frac{\sqrt{2}}{2}t.\end{cases}$

此时台风侵袭的区域是$(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})\le[r(t)]^2$,

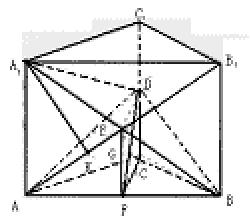
其中$r(t)=10t+60$,若在 t 时刻城市 O 受到台风的侵袭，则有

$(0-\bar{x})^2+(0-\bar{y})^2\le(10t+60)^2$. 即$(300\times\frac{\sqrt{2}}{10}-20\times\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2+(-300\times\frac{7\sqrt{2}}{10}+20\times\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2$

$\le(10t+60)^2$,即$t^2-36t+288\le 0$,解得$12\le t\le 24$

答：12 小时后该城市开始受到台风的侵袭.

21．根据题设条件，首先求出点 P 坐标满足的方程，据此再判断是否存在的两定点，使得点 P 到两点距离的和为定值.



按题意有 A（－2，0），B（2，0），C（2，4a），D（－2，4a）设

$\frac{BE}{BC}=\frac{CF}{CD}=\frac{DG}{DA}=k(0\le k\le 1)$

由此有 E（2，4ak），F（2－4k，4a），G（－2，4a－4ak）

直线 OF 的方程为：$2ax+(2k-1)y=0$①

直线 GE 的方程为：$-a(2k-1)x+y-2a=0$②

从①，②消去参数 k，得点 P（x, y）坐标满足方程$2a^2x^2+y^2-2ay=0$

整理得 $\frac{x^2}{\frac{1}{2}}+\frac{(y-a)^2}{a^2}=1$ 当 $a^2=\frac{1}{2}$ 时，点 P 的轨迹为圆弧，所以不存在符合题意的两点.

当 $a^2\neq\frac{1}{2}$ 时，点 P 轨迹为椭圆的一部分，点 P 到该椭圆焦点的距离的和为定长.

当 $a^2<\frac{1}{2}$ 时，点 P 到椭圆两个焦点（$-\sqrt{\frac{1}{2}-a^2},a),(\sqrt{\frac{1}{2}-a^2},a)$ 的距离之和为定值 $\sqrt{2}$.

当 $a^2>\frac{1}{2}$ 时，点 P到椭圆两个焦点（0，$a-\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}),(0,a+\sqrt{a^2-\frac{1}{2}})$ 的距离之和为定值 $2a$.

22.（本小题满分 12 分，附加题 4 分）

（Ⅰ）解：用 (t, s) 表示 2^t+2^s，下表的规律为

3（(0, 1) $=2^0+2^1$）

5 (0, 2)　6 (1, 2)

9 (0, 3)　10 (1, 3)　12 (2, 3)

—　—　—　—

…………

（i）第四行 17 (0, 4)　18 (1, 4)　20 (2, 4)　24 (3, 4)

第五行 33 (0, 5)　34 (1, 5)　36 (2, 5)　40 (3, 5)　48 (4, 5)

（i i）解法一：因为 100＝（1+2+3+4+……+13）+9，所以 $a_{100}=(8,14)=2^8+2^{14}=16640$

解法二：设 $a_{100}=2^{s_0}+2^{t_0}$，只须确定正整数 s_0,t_0.

数列 $\{a_n\}$ 中小于 2^{t_0} 的项构成的子集为 $\{2^t+2^s\mid 0\le s<t<t_0\}$,

其元素个数为 $C_{t_0}^2=\frac{t_0(t_0-1)}{2}$,依题意 $\frac{t_0(t_0-1)}{2}<100.$

满足等式的最大整数 t_0 为 14，所以取 $t_0=14$.

因为 100－$C_{14}^2=s_0+1$,由此解得 $s_0=8,\therefore a_{100}=2^{14}+2^8=16640.$

（Ⅱ）解：$b_k=1160=2^{10}+2^7+2^3$,

令 $M=\{c\in B\mid C<1160\}$　(其中,$B=\{2^r+2^s+2^t\mid 0\le r<s<t\}$

因 $M=\{c\in B\mid c<2^{10}\}\cup\{c\in B\mid 2^{10}<c<2^{10}+2^{7}\}\cup\{c\in B\mid 2^{10}+2^{7}<c<2^{10}+2^{7}+2^{3}\}$.

现在求 M 的元素个数：$\{c\in B\mid c<2^{10}\}=\{2^{r}\quad+2^{s}+2^{t}\mid 0\le r<s<t<10\}$,

其元素个数为 C_{10}^{3}：　　$\{c\in B\mid 2^{10}<c<2^{10}+2^{7}\}=\{2^{10}\quad+2^{s}+2^{r}\mid 0\le r<s<7\}$.

某元素个数为 $C_{7}^{2}:\{c\in B\mid 2^{10}+2^{7}<c<2^{10}+2^{7}+2^{3}\}=\{2^{10}+2^{7}+2^{r}\mid 0\le r<3\}$

某元素个数为 $C_{10}^{7}:k=C_{10}^{3}+C_{7}^{2}+C_{3}^{2}+1=145.$

另法：规定 $2^{r}+2^{t}+2^{s}$ ＝（r, t, s），$b_{k}=1160=2^{10}+2^{7}+2^{3}$＝（3, 7, 10）

则 $b_{1}=2^{0}+2^{1}+2^{2}$＝　（0, 1, 2）　　C_{2}^{2}

依次为　（0, 1, 3）（0, 2, 3）（1, 2, 3）　　C_{3}^{2}

（0, 1, 4）（0, 2, 4）（1, 2, 4）（0, 3, 4）（1, 3, 4）（2, 3, 4）　　C_{4}^{2}

…………

（0, 1, 9）（0, 2, 9）…………（ 6, 8, 9 ）（7, 8, 9）　　C_{9}^{2}

（0, 1, 10）（0, 2, 10）………（0, 7, 10）（ 1, 7, 10）（2, 7, 10）（3, 7, 10）……　　C_{7}^{2} +4

$k=(C_{2}^{2}+C_{3}^{2}+\cdots+C_{9}^{2})+C_{7}^{2}+4=145.$