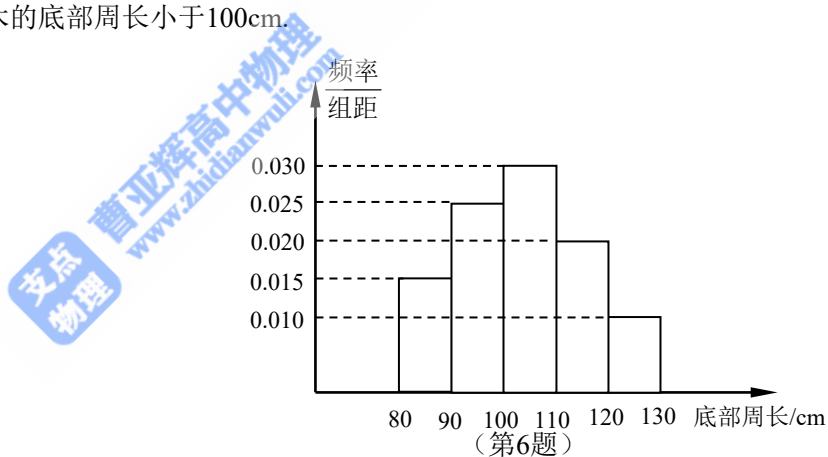
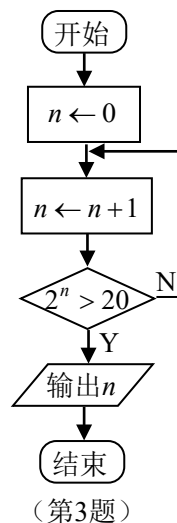


2014年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共计70分。请把答案填写在答题卡相应位置上。

1. 已知集合 $A = \{-2, -1, 3, 4\}$, $B = \{-1, 2, 3\}$, 则 $A \cap B = \underline{\quad}$.
2. 已知复数 $z = (5 + 2i)^2$ (i 为虚数单位), 则 z 的实部为 $\underline{\quad}$.
3. 右图是一个算法流程图, 则输出的 n 的值是 $\underline{\quad}$.
4. 从1, 2, 3, 6这4个数中一次随机地取2个数, 则所取2个数的乘积为6的概率是 $\underline{\quad}$.
5. 已知函数 $y = \cos x$ 与 $y = \sin(2x + \varphi)$ ($0 \leq \varphi < \pi$), 它们的图象有一个横坐标为 $\frac{\pi}{3}$ 的交点, 则 φ 的值是 $\underline{\quad}$.
6. 设抽测的树木的底部周长均在区间[80, 130]上, 其频率分布直方图如图所示, 则在抽测的60株树木中, 有 $\underline{\quad}$ 株树木的底部周长小于100cm.



7. 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 1$, $a_8 = a_6 + 2a_4$, 则 a_6 的值是 $\underline{\quad}$.
8. 设甲、乙两个圆柱的底面分别为 S_1 , S_2 , 体积分别为 V_1 , V_2 , 若它们的侧面积相等, 且 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{4}$, 则 $\frac{V_1}{V_2}$ 的值是 $\underline{\quad}$.
9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $x + 2y - 3 = 0$ 被圆 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ 截得的弦长为 $\underline{\quad}$.

10.

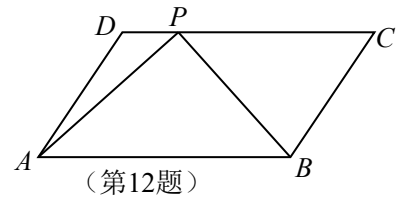
已知函数 $f(x) = x^2 + mx - 1$, 若对于任意 $x \in [m, m + 1]$, 都有 $f(x) < 0$ 成立, 则实数 m 的取值范围是 ▲.

11.

在平面直角坐标系 xOy 中, 若曲线 $y = ax^2 + \frac{b}{x}$ (a, b 为常数) 过点 $P(2, -5)$, 且该曲线在点 P 处的切线与直线 $7x + 2y + 3 = 0$ 平行, 则 $a + b$ 的值是 ▲.

12.

如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB = 8$, $AD = 5$, $\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 2$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ 的值是 ▲.



13.

已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上且周期为 3 的函数, 当 $x \in [0, 3)$

时, $f(x) = |x^2 - 2x + \frac{1}{2}|$. 若函数 $y = f(x) - a$ 在区间 $[-3, 4]$ 上有 10 个零点 (互不相同), 则实数 a 的取值范围是 ▲.

14. 若 $\triangle ABC$ 的内角满足 $\sin A + \sqrt{2} \sin B = 2 \sin C$, 则 $\cos C$ 的最小值是 ▲.

二、解答题: 本大题共 6 小题, 共计 90 分. 请在答题卡指定区域内作答, 学科网解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 14 分)

已知 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求 $\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ 的值;

(2) 求 $\cos(\frac{5\pi}{6} - 2\alpha)$ 的值.

16. (本小题满分 14 分)

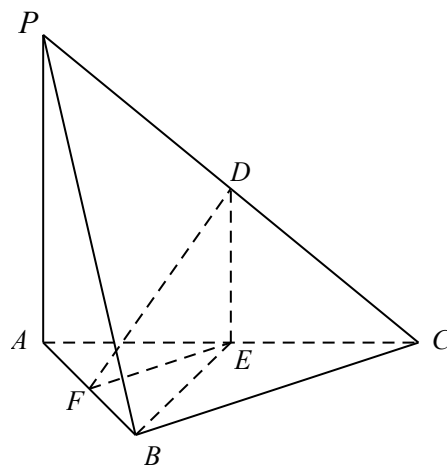
如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, D, E, F 分别为棱 PC, AC, AB 的中点. 已知

$PA \perp AC, PA = 6,$

$BC = 8, DF = 5.$

求证: (1) 直线 $PA \parallel$ 平面 DEF ;

(2) 平面 $BDE \perp$ 平面 ABC .



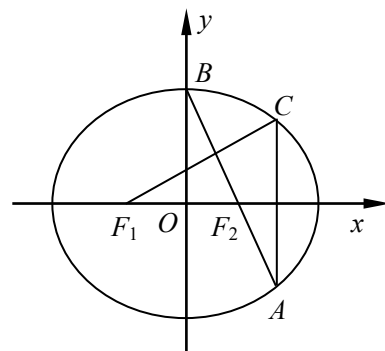
(第16题)

17.(本小题满分14分)

如图,在平面直角坐标系 xOy 中, F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 顶点 B 的坐标为 $(0, b)$, 连结 BF_2 并延长交椭圆于点 A , 过点 A 作 x 轴的垂线交椭圆于另一点 C , 连结 F_1C .

(1) 若点 C 的坐标为 $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$, 且 $BF_2 = \sqrt{2}$, 求椭圆的方程;

(2) 若 $F_1C \perp AB$, 求椭圆离心率 e 的值.



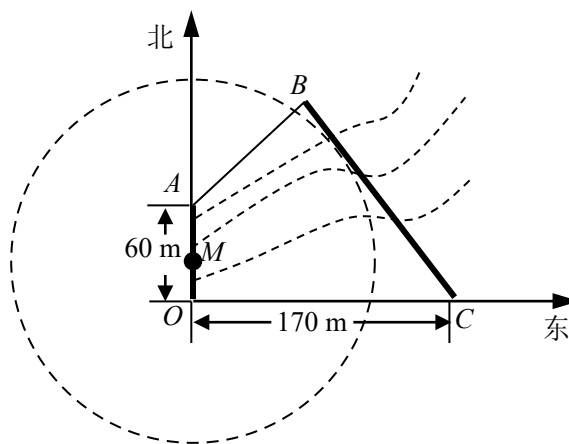
(第17题)

18.(本小题满分16分)

如图,为了保护河上古桥 OA , 规划建一座新桥 BC , 同时设立一个圆形学科网保护区. 规划要求: 新桥 BC 与河岸 AB 垂直; 保护区的边界为圆心 M 在线段 OA 上并与 BC 相切的圆. 且古桥两端 O 和 A 到该圆上任意一点的距离均不少于 80m .

经测量, 点A位于点O正北方向60m处, 点C位于点O正东方向170m处(OC为河岸),
 $\tan \angle BCO = \frac{4}{3}$.

- (1)求新桥BC的长;
- (2)当OM多长时,圆形保护区的面积最大?



(第18题)

19.(本小题满分16分)

已知函数 $f(x) = e^x + e^{-x}$, 其中e是自然对数的底数.

- (1)证明: $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的偶函数;
- (2)若关于 x 的不等式 $mf(x) \leq e^{-x} + m - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 学科网求实数 m 的取值范围;
- (3)已知正数 a 满足: 存在 $x_0 \in [1, +\infty)$, 使得 $f(x_0) < a(-x_0^3 + 3x_0)$ 成立. 试比较 e^{a-1} 与 a^{e-1} 的大小, 并证明你的结论.

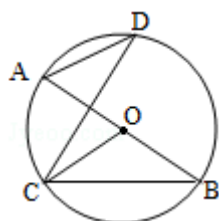
20.(本小题满分16分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若对任意正整数 n , 学科网总存在正整数 m , 使得 $S_n = a_m$, 则称 $\{a_n\}$ 是“H数列”.

- (1)若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 证明: $\{a_n\}$ 是“H数列”;
- (2)设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其首项 $a_1 = 1$, 公差 $d < 0$. 若 $\{a_n\}$ 是“H数列”, 求 d 的值;
- (3)证明: 对任意的等差数列 $\{a_n\}$, 总存在两个“H数列” $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$, 使得 $a_n = b_n + c_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 成立.

三、附加题（本大题包括选做题和必做题两部分）（一）选择题（本题包括21、22、23、24四小题，请选定其中两个小题作答，若多做，则按作答的前两个小题评分）【选修4-1：几何证明选讲】

21. （10分）（2014•江苏）如图，AB是圆O的直径，C，D是圆O上位于AB异侧的两点，证明： $\angle OCB = \angle D$.



【选修4-2：矩阵与变换】

22. （10分）（2014•江苏）已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & x \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, 向量 $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 \\ y \end{bmatrix}$, x, y 为实数, 若 $A\vec{\alpha} = B\vec{\alpha}$, 求 $x+y$ 的值.

【选修4-3：极坐标及参数方程】

23. （2014•江苏）在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$
, 直线 l 与抛物线 $y^2 = 4x$ 相交于 A, B 两点, 求线段 AB 的长.

【选修4-4：不等式选讲】

24. （2014•江苏）已知 $x > 0, y > 0$, 证明 $(1+x+y^2)(1+x^2+y) \geq 9xy$.

（二）必做题（本部分包括25、26两题，每题10分，共计20分）

25. （10分）（2014•江苏）盒中共有9个球，其中有4个红球，3个黄球和2个绿球，这些球除颜色外完全相同.

- (1) 从盒中一次随机取出2个球，求取出的2个球颜色相同的概率P；
- (2) 从盒中一次随机取出4个球，其中红球、黄球、绿球的个数分别记为 x_1, x_2, x_3 ，随机变量X表示 x_1, x_2, x_3 中的最大数，求X的概率分布和数学期望 $E(X)$ 。

26. (10分) (2014•江苏) 已知函数 $f_0(x) = \frac{\sin x}{x}$ ($x > 0$)，设 $f_n(x)$ 为 $f_{n-1}(x)$ 的导数， $n \in \mathbb{N}^*$ 。

(1) 求 $2f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}f_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 的值；

(2) 证明：对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ ，等式 $|nf_{n-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}f_n\left(\frac{\pi}{4}\right)| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 都成立。

2014年江苏省高考数学试卷

参考答案与试题解析

一、填空题（本大题共14小题，每小题5分，共计70分）

1. (5分) (2014•江苏) 已知集合 $A = \{-2, -1, 3, 4\}$ ， $B = \{-1, 2, 3\}$ ，则 $A \cap B = \underline{\{-1, 3\}}$ 。

考点 交集及其运算。

：

专题 集合。

：

分析 根据集合的基本运算即可得到结论。

：

解答 解：∵ $A = \{-2, -1, 3, 4\}$ ， $B = \{-1, 2, 3\}$ ，

∴ $A \cap B = \{-1, 3\}$ ，

故答案为： $\{-1, 3\}$

点评 本题主要考查集合的基本运算，比较基础。

：

2. (5分) (2014•江苏) 已知复数 $z = (5+2i)^2$ (i 为虚数单位), 则 z 的实部为 21.

考点 复数的基本概念; 复数代数形式的乘除运算.

:

专题 数系的扩充和复数.

:

分析 根据复数的有关概念, 即可得到结论.

:

解答 解: $z = (5+2i)^2 = 25 + 20i + 4i^2 = 25 - 4 + 20i = 21 + 20i$,

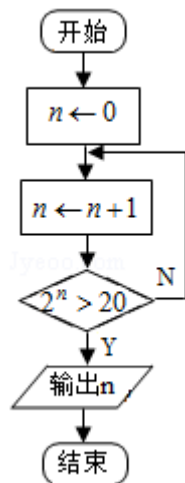
: 故 z 的实部为21,

故答案为: 21

点评 本题主要考查复数的有关概念, 利用复数的基本运算是解决本题的关键, 比较基础

:

3. (5分) (2014•江苏) 如图是一个算法流程图, 则输出的 n 的值是 5.



考点 程序框图.

:

专题 算法和程序框图.

:

分析 算法的功能是求满足 $2^n > 20$ 的最小的正整数 n 的值, 代入正整数 n 验证可得答案.

:

解答 解: 由程序框图知: 算法的功能是求满足 $2^n > 20$ 的最小的正整数 n 的值,

: $\because 2^4 = 16 < 20, 2^5 = 32 > 20$,

\therefore 输出 $n=5$.

故答案为: 5.

点评 本题考查了直到型循环结构的程序框图, 根据框图的流程判断算法的功能是解题的关键.

:

4. (5分) (2014•江苏) 从1, 2, 3, 6这4个数中一次随机抽取2个数, 则所取2个数的乘积为6的概率是 $\frac{1}{3}$.

考点 古典概型及其概率计算公式.

:

专题 概率与统计.

:

分析 首先列举并求出“从1, 2, 3, 6这4个数中一次随机抽取2个数”的基本事件的个数再从中找到满足“所取2个数的乘积为6”的事件的个数, 利用概率公式计算即可.

解答 解: 从1, 2, 3, 6这4个数中一次随机抽取2个数的所有基本事件有 (1, 2), (1, 3), (1, 6), (2, 3), (2, 6), (3, 6) 共6个, 所取2个数的乘积为6的基本事件有 (1, 6), (2, 3) 共2个,

$$\text{故所求概率 } P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{3}.$$

点评 本题主要考查了古典概型的概率公式的应用, 关键是一一列举出所有的基本事件.

:

5. (5分) (2014•江苏) 已知函数 $y = \cos x$ 与 $y = \sin(2x + \phi)$ ($0 \leq \phi < \pi$), 它们的图象有一个横坐标为 $\frac{\pi}{3}$ 的交点, 则 ϕ 的值是 $\frac{\pi}{6}$.

考点 三角方程; 函数的零点.

:

专题 三角函数的求值; 三角函数的图像与性质.

:

分析 由于函数 $y = \cos x$ 与 $y = \sin(2x + \phi)$, 它们的图象有一个横坐标为 $\frac{\pi}{3}$ 的交点, 可得

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \phi\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}. \text{ 根据 } \phi \text{ 的范围和正弦函数的单调性即可得出.}$$

解答 解: \because 函数 $y = \cos x$ 与 $y = \sin(2x + \phi)$, 它们的图象有一个横坐标为 $\frac{\pi}{3}$ 的交点,

:

$$\therefore \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \phi\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

$$\because 0 \leq \phi < \pi, \therefore \frac{2\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3} + \phi \leq \frac{5\pi}{3},$$

$$\therefore \frac{2\pi}{3} + \phi = \frac{5\pi}{6},$$

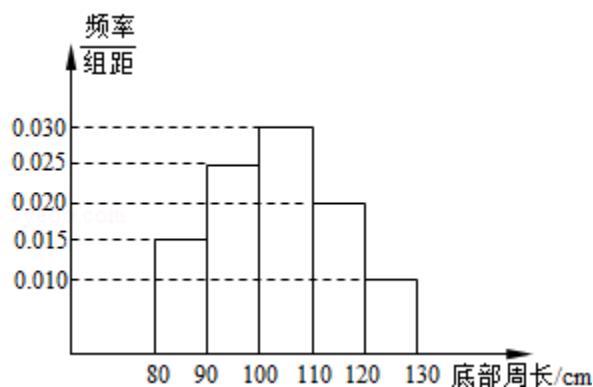
$$\text{解得 } \phi = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\pi}{6}.$$

点评 本题考查了三角函数的图象与性质、三角函数求值，属于基础题.

:

6. (5分) (2014•江苏) 为了了解一片经济林的生长情况，随机抽测了其中60株树木的底部周长(单位: cm)，所得数据均在区间[80, 130]上，其频率分布直方图如图所示，则在抽测的60株树木中，有 24 株树木的底部周长小于100cm.



考点 频率分布直方图.

:

专题 概率与统计.

:

分析 根据频率=小矩形的面积=小矩形的高×组距底部求出周长小于100cm的频率，再根据

频数=样本容量×频率求出底部周长小于100cm的频数.

解答 解：由频率分布直方图知：底部周长小于100cm的频率为 $(0.015+0.025) \times 10=0.4$,

∴底部周长小于100cm的频数为 $60 \times 0.4=24$ (株).

故答案为：24.

点评 本题考查了频率分布直方图，在频率分布直方图中频率=小矩形的面积=小矩形的高×

:

$$\text{组距} = \frac{\text{频数}}{\text{样本容量}}.$$

7. (5分) (2014•江苏) 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_2=1$ ， $a_8=a_6+2a_4$ ，则 a_6 的值是 4.

考点 等比数列的通项公式.

:

专题 等差数列与等比数列.

:

分析 利用等比数列的通项公式即可得出.

:

解答 解：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q > 0$ ， $a_1 > 0$.

$$\because a_8 = a_6 + 2a_4,$$

$$\therefore a_1 q^7 = a_1 q^5 + 2a_1 q^3,$$

$$\text{化为 } q^4 - q^2 - 2 = 0, \text{ 解得 } q^2 = 2.$$

$$\therefore a_6 = a_1 q^5 = a_2 q^4 = 1 \times 2^2 = 4.$$

故答案为：4.

点评 本题考查了等比数列的通项公式，属于基础题.

:

8. (5分) (2014•江苏) 设甲、乙两个圆柱的底面积分别为 S_1 , S_2 , 体积分别为 V_1 , V_2

, 若它们的侧面积相等, 且 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{4}$, 则 $\frac{V_1}{V_2}$ 的值是 $\frac{3}{2}$.

考点 棱柱、棱锥、棱台的体积; 旋转体(圆柱、圆锥、圆台).

:

专题 立体几何.

:

分析 设出两个圆柱的底面半径与高, 通过侧面积相等, 推出高的比, 然后求解体积的比

:

解答 解: 设两个圆柱的底面半径分别为 R , r ; 高分别为 H , h ;

:

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{4}$$

$$\therefore \frac{R}{r} = \frac{3}{2}, \text{ 它们的侧面积相等, } \frac{2\pi RH}{2\pi rh} = 1$$

$$\therefore \frac{H}{h} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi R^2 H}{\pi r^2 h} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$$

故答案为: $\frac{3}{2}$.

点评 本题考查柱体体积公式以及侧面积公式的直接应用, 是基础题目.

:

9. (5分) (2014•江苏) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $x+2y-3=0$ 被圆 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ 截得的弦长为 $\frac{2\sqrt{55}}{5}$.

考点 直线与圆的位置关系.

:

专题 直线与圆.

:

分析 求出已知圆的圆心为 $C(2, -1)$, 半径 $r=2$. 利用点到直线的距离公式, 算出点 C 到

直线 l 的距离 d , 由垂径定理加以计算, 可得直线 $x+2y-3=0$ 被圆截得的弦长.

解答 解: 圆 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ 的圆心为 $C(2, -1)$, 半径 $r=2$,

∴点C到直线直线 $x+2y-3=0$ 的距离 $d=\frac{|2-2-3|}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$,

∴根据垂径定理, 得直线 $x+2y-3=0$ 被圆 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ 截得的弦长为2

$$\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-\frac{9}{5}}=\frac{2\sqrt{55}}{5}$$

故答案为: $\frac{2\sqrt{55}}{5}$.

点评 本题给出直线与圆的方程, 求直线被圆截得的弦长, 着重考查点到直线的距离公式、圆的方程和直线与圆的位置关系等知识, 属于基础题.

10. (5分) (2014•江苏) 已知函数 $f(x)=x^2+mx-1$, 若对于任意 $x\in[m, m+1]$, 都有 $f(x)<0$ 成立, 则实数 m 的取值范围是 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

考点 二次函数的性质.

专题 函数的性质及应用.

分析 由条件利用二次函数的性质可得

$$\begin{cases} f(m)=2m^2-1<0 \\ f(m+1)=(m+1)^2+m(m+1)-1<0 \end{cases}, \text{由此求得}m\text{的范围.}$$

解答 解: ∵二次函数 $f(x)=x^2+mx-1$ 的图象开口向上,

对于任意 $x\in[m, m+1]$, 都有 $f(x)<0$ 成立, ∴

$$\begin{cases} f(m)=2m^2-1<0 \\ f(m+1)=(m+1)^2+m(m+1)-1<0 \end{cases},$$

$$\text{即} \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2}<m<\frac{\sqrt{2}}{2} \\ m(2m+3)<0 \end{cases}, \text{解得} -\frac{\sqrt{2}}{2}<m<0,$$

故答案为: $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

点评 本题主要考查二次函数的性质应用, 体现了转化的数学思想, 属于基础题.

11. (5分) (2014•江苏) 在平面直角坐标系 xOy 中, 若曲线 $y=ax^2+\frac{b}{x}$ (a, b 为常数) 过点 $P(2, -5)$, 且该曲线在点 P 处的切线与直线 $7x+2y+3=0$ 平行, 则 $a+b$ 的值是 -3 .

考点 利用导数研究曲线上某点切线方程.

专题 导数的概念及应用.

分析 由曲线 $y=ax^2+\frac{b}{x}$ (a, b 为常数) 过点 $P(2, -5)$, 且该曲线在点 P 处的切线与直线 $7x+2y+3=0$ 平行, 可得 $y|_{x=2} = -5$, 且 $y'|_{x=2} = -\frac{7}{2}$, 解方程可得答案.

解答 解: \because 直线 $7x+2y+3=0$ 的斜率 $k = -\frac{7}{2}$,

曲线 $y=ax^2+\frac{b}{x}$ (a, b 为常数) 过点 $P(2, -5)$, 且该曲线在点 P 处的切线与直线 $7x+2y+3=0$ 平行,

$$\therefore y' = 2ax - \frac{b}{x^2},$$

$$\therefore \begin{cases} 4a + \frac{b}{2} = -5 \\ 4a - \frac{b}{4} = -\frac{7}{2} \end{cases},$$

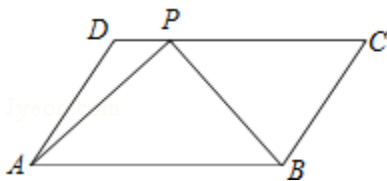
$$\text{解得: } \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases},$$

故 $a+b = -3$,

故答案为: -3

点评 本题考查的知识点是利用导数研究曲线上某点切线方程, 其中根据已知得到 $y|_{x=2} = -5$, 且 $y'|_{x=2} = -\frac{7}{2}$, 是解答的关键.

12. (5分) (2014•江苏) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB=8$, $AD=5$, $\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 2$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ 的值是 22.



考点 向量在几何中的应用; 平面向量数量积的运算.

专题 平面向量及应用.

分析 由 $\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$, 可得 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, 进而由 $AB=8$, $AD=5$, $\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$,

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 2$, 构造方程, 进而可得答案.

解答 解: $\because \overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$,

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB},$$

又 $\because AB=8, AD=5,$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right) = |\overrightarrow{AD}|^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{3}{16}|\overrightarrow{AB}|^2 = 25 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - 1$$

$2=2,$

故 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 22,$

故答案为: 22.

点评 本题考查的知识点是向量在几何中的应用, 平面向量数量积的运算, 其中根据已知

得到 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB},$ 是解答的关键.

13. (5分) (2014•江苏) 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上且周期为 3 的函数, 当 $x \in [0, 3)$ 时, f

$(x) = |x^2 - 2x + \frac{1}{2}|,$ 若函数 $y = f(x) - a$ 在区间 $[-3, 4]$ 上有 10 个零点 (互不相同), 则实

数 a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{2}).$

考点 根的存在性及根的个数判断.

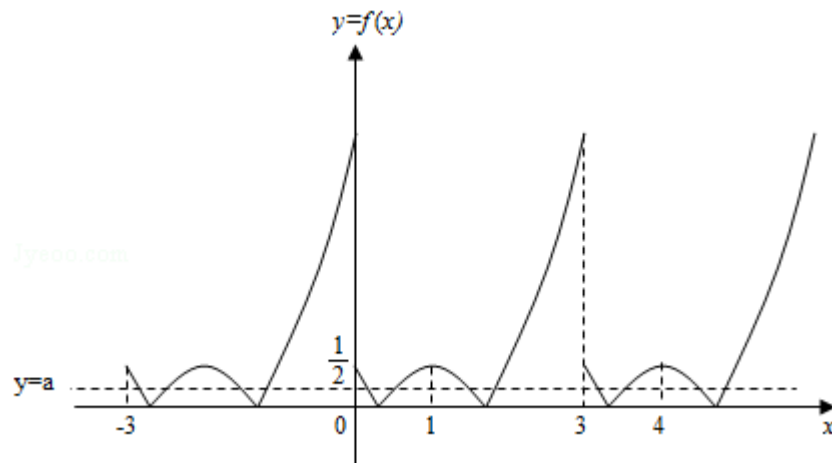
专题 函数的性质及应用.

分析 在同一坐标系中画出函数的图象与直线 $y=a$ 的图象, 利用数形结合判断 a 的范围即可

解答 解: $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上且周期为 3 的函数, 当 $x \in [0, 3)$ 时, $f(x) = |x^2 - 2x + \frac{1}{2}|,$ 若

函数 $y = f(x) - a$ 在区间 $[-3, 4]$ 上有 10 个零点 (互不相同), 在同一坐标系中画出函数 $f(x)$ 与 $y=a$ 的图象如图: 由图象可知 $a \in (0, \frac{1}{2}).$

故答案为: $(0, \frac{1}{2}).$



点评 本题考查函数的图象以函数的零点的求法，数形结合的应用.

:

14. (5分) (2014•江苏) 若 $\triangle ABC$ 的内角满足 $\sin A + \sqrt{2}\sin B = 2\sin C$, 则 $\cos C$ 的最小值是 $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

考点 余弦定理; 正弦定理.

:

专题 三角函数的图像与性质; 解三角形.

:

分析 根据正弦定理和余弦定理, 利用基本不等式即可得到结论.

:

解答 解: 由正弦定理得 $a + \sqrt{2}b = 2c$, 得 $c = \frac{1}{2}(a + \sqrt{2}b)$,

:

$$\text{由余弦定理得 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - \frac{1}{4}(a + \sqrt{2}b)^2}{2ab} = \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}ab}{2ab}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}b^2}{2ab} - \frac{\sqrt{2}}{4} \geq \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}b}{2ab} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4},$$

当且仅当 $\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}b$ 时, 取等号,

故 $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \leq \cos C < 1$, 故 $\cos C$ 的最小值是 $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

故答案为: $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

点评 本题主要考查正弦定理和余弦定理的应用, 利用基本不等式是解决本题的关键.

:

二、解答题 (本大题共6小题, 共计90分)

15. (14分) (2014•江苏) 已知 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求 $\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ 的值;

(2) 求 $\cos(\frac{5\pi}{6} - 2\alpha)$ 的值.

考点 两角和与差的正弦函数; 两角和与差的余弦函数.

:

专题 三角函数的求值; 三角函数的图像与性质.

:

分析 (1) 通过已知条件求出 $\cos \alpha$, 然后利用两角和的正弦函数求 $\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ 的值;

:

(2) 求出 $\cos 2\alpha$ ，然后利用两角差的余弦函数求 $\cos(\frac{5\pi}{6} - 2\alpha)$ 的值.

解答
:

$$\text{解: } \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \therefore \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$(1) \sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (-\frac{2\sqrt{5}}{5}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\therefore \sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) \text{ 的值为: } -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$(2) \because \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \therefore \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = \frac{3}{5}, \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

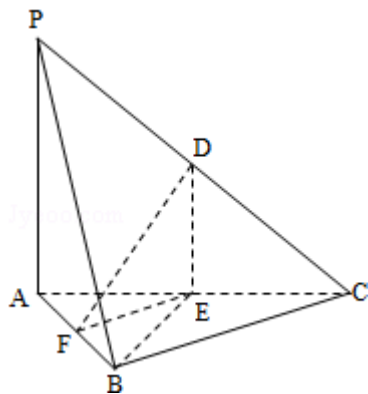
$$\therefore \cos(\frac{5\pi}{6} - 2\alpha) = \cos \frac{5\pi}{6} \cos 2\alpha + \sin \frac{5\pi}{6} \sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times (-\frac{4}{5}) = -\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$$

$$\cos(\frac{5\pi}{6} - 2\alpha) \text{ 的值为: } -\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$$

点评 本题考查两角和与差的三角函数，三角函数的基本关系式的应用，考查计算能力.
:

16. (14分) (2014•江苏) 如图，在三棱锥P-ABC中，D，E，F分别为棱PC，AC，AB的中点，已知PA⊥AC，PA=6，BC=8，DF=5. 求证：

- (1) 直线PA∥平面DEF；
- (2) 平面BDE⊥平面ABC.



考点 平面与平面垂直的判定；直线与平面垂直的判定.

:

专题 空间位置关系与距离；空间角；立体几何.

:

分析 (1) 由D、E为PC、AC的中点，得出DE∥PA，从而得出PA∥平面DEF；

(2) 要证平面BDE⊥平面ABC，只需证DE⊥平面ABC，即证DE⊥EF，且DE⊥AC即可.

解答 证明：(1) ∵D、E为PC、AC的中点，∴DE∥PA，

又∵PA⊄平面DEF，DE⊂平面DEF，

∴PA∥平面DEF；

(2) $\because D、E$ 为 $PC、AC$ 的中点, $\therefore DE = \frac{1}{2}PA = 3$;

又 $\because E、F$ 为 $AC、AB$ 的中点, $\therefore EF = \frac{1}{2}BC = 4$;

$\therefore DE^2 + EF^2 = DF^2$,

$\therefore \angle DEF = 90^\circ$,

$\therefore DE \perp EF$;

$\because DE \parallel PA, PA \perp AC, \therefore DE \perp AC$;

$\because AC \cap EF = E, \therefore DE \perp$ 平面 ABC ;

$\because DE \subset$ 平面 BDE, \therefore 平面 $BDE \perp$ 平面 ABC .

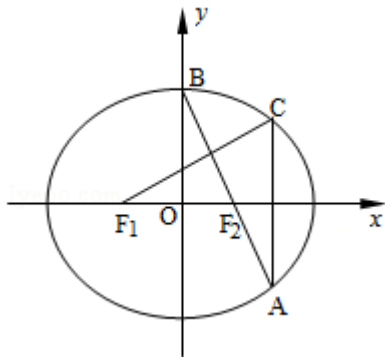
点评 本题考查了空间中的平行与垂直问题, 解题时应明确空间中的线线、线面、面面之间的垂直与平行的互相转化关系, 是基础题目.

17. (14分) (2014•江苏) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, F_1, F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

($a > b > 0$) 的左、右焦点, 顶点 B 的坐标为 $(0, b)$, 连接 BF_2 并延长交椭圆于点 A , 过点 A 作 x 轴的垂线交椭圆于另一点 C , 连接 F_1C .

(1) 若点 C 的坐标为 $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$, 且 $BF_2 = \sqrt{2}$, 求椭圆的方程;

(2) 若 $F_1C \perp AB$, 求椭圆离心率 e 的值.



考点 椭圆的简单性质; 椭圆的标准方程.

:

专题 圆锥曲线的定义、性质与方程.

:

分析 (1) 根据椭圆的定义, 建立方程关系即可求出 a, b 的值.

(2) 求出 C 的坐标, 利用 $F_1C \perp AB$ 建立斜率之间的关系, 解方程即可求出 e 的值.

解答 解: (1) $\because C$ 的坐标为 $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$,

$$\therefore \frac{16}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1, \text{ 即 } \frac{16}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 9,$$

$$\because BF_2^2 = b^2 + c^2 = a^2,$$

$$\therefore a^2 = (\sqrt{2})^2 = 2, \text{ 即 } b^2 = 1,$$

$$\text{则椭圆的方程为 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

$$(2) \text{ 设 } F_1(-c, 0), F_2(c, 0),$$

$$\therefore B(0, b),$$

$$\therefore \text{直线 } BF_2: y = -\frac{b}{c}x + b, \text{ 代入椭圆方程 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (} a > b > 0 \text{)} \text{ 得 } \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)x^2 - \frac{2}{c}x =$$

$$0,$$

$$\text{解得 } x=0, \text{ 或 } x = \frac{2a^2c}{a^2+c^2},$$

$$\therefore A\left(\frac{2a^2c}{a^2+c^2}, \frac{b(c^2-a^2)}{a^2+c^2}\right), \text{ 且 } A, C \text{ 关于 } x \text{ 轴对称},$$

$$\therefore C\left(\frac{2a^2c}{a^2+c^2}, -\frac{b(c^2-a^2)}{a^2+c^2}\right),$$

$$\text{则 } k_{F_1C} = -\frac{\frac{b(c^2-a^2)}{a^2+c^2}}{\frac{2a^2c}{a^2+c^2} + c} = \frac{a^2b - bc^2}{3a^2c + c^3},$$

$$\therefore F_1C \perp AB,$$

$$\therefore \frac{b(a^2-c^2)}{3a^2c+c^3} \cdot \left(-\frac{b}{c}\right) = -1,$$

$$\text{由 } b^2 = a^2 - c^2 \text{ 得 } \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{5},$$

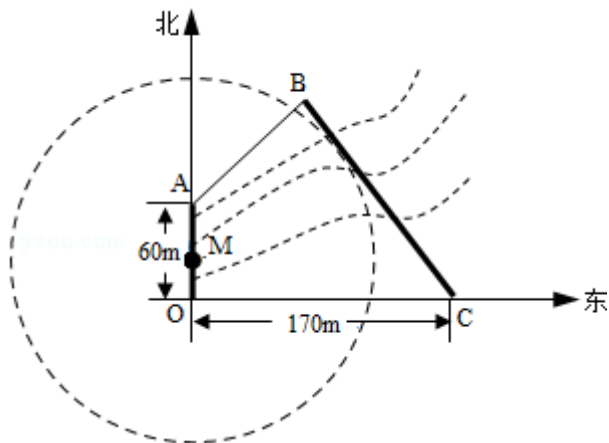
$$\text{即 } e = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

点评 本题主要考查圆锥曲线的综合问题，要求熟练掌握椭圆方程的求法以及直线垂直和斜率之间的关系，运算量较大。

18. (16分) (2014•江苏) 如图，为保护河上古桥OA，规划建一座新桥BC，同时设立一个圆形保护区，规划要求：新桥BC与河岸AB垂直；保护区的边界为圆心M在线段OA上并与BC相切的圆，且古桥两端O和A到该圆上任意一点的距离均不少于80m，经测量，点A位于点O正北方向60m处，点C位于点O正东方向170m处(OC为河岸)， $\tan \angle BCO = \frac{4}{3}$.

(1) 求新桥BC的长；

(2) 当OM多长时，圆形保护区的面积最大？



考点 圆的切线方程；直线与圆的位置关系.

:

专题 直线与圆.

:

分析 (1) 在四边形AOCB中, 过B作 $BE \perp OC$ 于E, 过A作 $AF \perp BE$ 于F, 设出AF, 然后通过

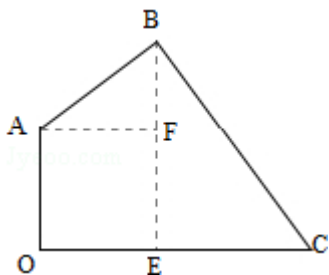
:

解直角三角形列式求解BE, 进一步得到CE, 然后由勾股定理得答案;

(2) 设BC与 $\odot M$ 切于Q, 延长QM、CO交于P, 设 $OM = xm$, 把PC、PQ用含有x的代数式表示, 再结合古桥两端O和A到该圆上任意一点的距离均不少于80m列式求得x的范围, 得到x取最小值时圆的半径最大, 即圆形保护区的面积最大.

解答 解: (1) 如图,

:



过B作 $BE \perp OC$ 于E, 过A作 $AF \perp BE$ 于F,

$$\because \angle ABC = 90^\circ, \angle BEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle BCE,$$

$$\therefore \tan \angle ABF = \tan \angle BCO = \frac{4}{3}.$$

设 $AF = 4x$ (m), 则 $BF = 3x$ (m).

$$\because \angle AOE = \angle AFE = \angle OEF = 90^\circ,$$

$$\therefore OE = AF = 4x$$
 (m), $EF = AO = 60$ (m),

$$\therefore BE = (3x + 60)$$
 m.

$$\because \tan \angle BCO = \frac{4}{3},$$

$$\therefore CE = \frac{3}{4}BE = \left(\frac{9}{4}x + 45\right)$$
 (m).

$$\therefore OC = \left(4x + \frac{9}{4}x + 45\right)$$
 (m).

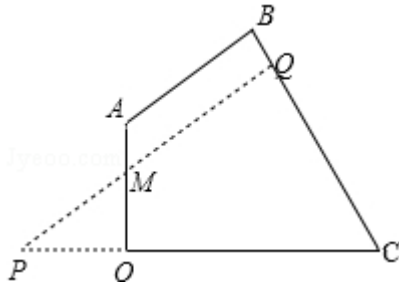
$$\therefore 4x + \frac{9}{4}x + 45 = 170,$$

解得: $x=20$.

$$\therefore BE=120\text{m}, CE=90\text{m},$$

则 $BC=150\text{m}$;

(2) 如图,



设 BC 与 $\odot M$ 切于 Q , 延长 QM 、 CO 交于 P ,

$$\therefore \angle POM = \angle PQC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PMO = \angle BCO.$$

$$\text{设 } OM=x\text{m}, \text{ 则 } OP=\frac{4}{3}x\text{m}, PM=\frac{5}{3}x\text{m}.$$

$$\therefore PC = \left(\frac{4}{3}x + 170\right)\text{m}, PQ = \left(\frac{16}{15}x + 136\right)\text{m}.$$

设 $\odot M$ 半径为 R ,

$$\therefore R = MQ = \left(\frac{16}{15}x + 136 - \frac{5}{3}x\right)\text{m} = \left(136 - \frac{3}{5}x\right)\text{m}.$$

$\therefore A$ 、 O 到 $\odot M$ 上任一点距离不少于 80m ,

$$\text{则 } R - AM \geq 80, R - OM \geq 80,$$

$$\therefore 136 - \frac{3}{5}x - (60 - x) \geq 80, 136 - \frac{3}{5}x - x \geq 80.$$

解得: $10 \leq x \leq 35$.

\therefore 当且仅当 $x=10$ 时 R 取到最大值.

$\therefore OM=10\text{m}$ 时, 保护区面积最大.

点评 本题考查圆的切线, 考查了直线与圆的位置关系, 解答的关键在于对题意的理解, 是中档题.

19. (16分) (2014•江苏) 已知函数 $f(x) = e^x + e^{-x}$, 其中 e 是自然对数的底数.

(1) 证明: $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的偶函数;

(2) 若关于 x 的不等式 $mf(x) \leq e^{-x} + m - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 m 的取值范围;

(3) 已知正数 a 满足: 存在 $x_0 \in [1, +\infty)$, 使得 $f(x_0) < a(-x_0^3 + 3x_0)$ 成立, 试比较 e^{a-1} 与 a^{e-1} 的大小, 并证明你的结论.

考点 利用导数求闭区间上函数的最值.

:

专题 导数的综合应用.

:

分析 (1) 根据函数奇偶性的定义即可证明 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的偶函数;

∴ (2) 利用参数分离法, 将不等式 $mf(x) \leq e^{-x} + m - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 进行转化求最值问题即可求实数 m 的取值范围;

(3) 构造函数, 利用函数的单调性, 最值与单调性之间的关系, 分别进行讨论即可得到结论.

解答 解: (1) $\because f(x) = e^x + e^{-x}$,

$\therefore f(-x) = e^{-x} + e^x = f(x)$, 即函数: $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的偶函数;

(2) 若关于 x 的不等式 $mf(x) \leq e^{-x} + m - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

即 $m(e^x + e^{-x} - 1) \leq e^{-x} - 1$,

$\because x > 0$,

$\therefore e^x + e^{-x} - 1 > 0$,

即 $m \leq \frac{e^{-x} - 1}{e^x + e^{-x} - 1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

设 $t = e^x$, ($t > 1$), 则 $m \leq \frac{1-t}{t^2-t+1}$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

$\therefore \frac{1-t}{t^2-t+1} = -\frac{t-1}{(t-1)^2 + (t-1) + 1} = -\frac{1}{t-1 + \frac{1}{t-1} + 1} \geq -\frac{1}{3}$, 当且仅当 $t=2$

时等号成立,

$\therefore m \leq -\frac{1}{3}$.

(3) 令 $g(x) = e^x + e^{-x} - a(-x^3 + 3x)$,

则 $g'(x) = e^x - e^{-x} + 3a(x^2 - 1)$,

当 $x > 1$, $g'(x) > 0$, 即函数 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

故此时 $g(x)$ 的最小值 $g(1) = e + \frac{1}{e} - 2a$,

由于存在 $x_0 \in [1, +\infty)$, 使得 $f(x_0) < a(-x_0^3 + 3x_0)$ 成立,

故 $e + \frac{1}{e} - 2a < 0$,

即 $a > \frac{1}{2}(e + \frac{1}{e})$,

令 $h(x) = x - (e-1)\ln x - 1$,

则 $h'(x) = 1 - \frac{e-1}{x}$,

由 $h'(x) = 1 - \frac{e-1}{x} = 0$, 解得 $x = e - 1$,

当 $0 < x < e - 1$ 时, $h'(x) < 0$, 此时函数单调递减,

当 $x > e - 1$ 时, $h'(x) > 0$, 此时函数单调递增,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值为 $h(e-1)$,

注意到 $h(1) = h(e) = 0$,

\therefore 当 $x \in (1, e-1) \subseteq (0, e-1)$ 时, $h(e-1) \leq h(x) < h(1) = 0$,

当 $x \in (e-1, e) \subseteq (e-1, +\infty)$ 时, $h(x) < h(e) = 0$,

$\therefore h(x) < 0$, 对任意的 $x \in (1, e)$ 成立.

- ① $a \in (\frac{1}{2}(e+\frac{1}{e}), e) \subseteq (1, e)$ 时, $h(a) < 0$, 即 $a-1 < (e-1)\ln a$, 从而 $e^{a-1} < a^{e-1}$,
- ② 当 $a=e$ 时, $a^{e-1}=e^{e-1}$,
- ③ 当 $a \in (e, +\infty) \subseteq (e-1, +\infty)$ 时, 当 $a > e-1$ 时, $h(a) > h(e)=0$, 即 $a-1 > (e-1)\ln a$, 从而 $e^{a-1} > a^{e-1}$.

点评 本题主要考查函数奇偶性的判定, 函数单调性和最值的应用, 利用导数是解决本题的关键, 综合性较强, 运算量较大.

20. (16分) (2014•江苏) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若对任意的正整数 n , 总存在正整数 m , 使得 $S_n = a_m$, 则称 $\{a_n\}$ 是“H数列”.

- (1) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 2^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 证明: $\{a_n\}$ 是“H数列”;
- (2) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其首项 $a_1 = 1$, 公差 $d < 0$, 若 $\{a_n\}$ 是“H数列”, 求 d 的值;
- (3) 证明: 对任意的等差数列 $\{a_n\}$, 总存在两个“H数列” $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$, 使得 $a_n = b_n + c_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 成立.

考点 数列的应用; 等差数列的性质.

:

专题 等差数列与等比数列.

:

分析 (1) 利用“当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1}$, 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1$ ”即可得到 a_n , 再利用“H”数列的意义即可得出.

(2) 利用等差数列的前 n 项和即可得出 S_n , 对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists m \in \mathbb{N}^*$ 使 $S_n = a_m$, 取 $n=2$ 和根据 $d < 0$ 即可得出;

(3) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 构造数列: $b_n = a_1 - (n-1)d = (2-n)a_1$, $c_n = (n-1)(a_1 + d)$, 可证明 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 是等差数列. 再利用等差数列的前 n 项和公式及其通项公式、“H”的意义即可得出.

解答 解: (1) 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$,

当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 2$.

当 $n=1$ 时, $S_1 = a_1$.

当 $n \geq 2$ 时, $S_n = a_{n+1}$.

\therefore 数列 $\{a_n\}$ 是“H”数列.

$$(2) S_n = n a_1 + \frac{n(n-1)}{2} d = n + \frac{n(n-1)}{2} d,$$

对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists m \in \mathbb{N}^*$ 使 $S_n = a_m$, 即 $n + \frac{n(n-1)}{2} d = 1 + (m-1)d$,

取 $n=2$ 时, 得 $1+d = (m-1)d$, 解得 $m = 2 + \frac{1}{d}$,

$\therefore d < 0$, $\therefore m < 2$,

又 $m \in \mathbb{N}^*$, $\therefore m=1$, $\therefore d = -1$.

(3) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 令 $b_n = a_1 - (n-1)d = (2-n)a_1$,

对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+1} - b_n = -a_1$,

$c_n = (n-1)(a_1 + d)$,

对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $c_{n+1} - c_n = a_1 + d$,

则 $b_n + c_n = a_1 + (n-1)d = a_n$ ，且数列 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 是等差数列.

数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = n a_1 + \frac{n(n-1)}{2} (-a_1)$ ，

令 $T_n = (2-m)a_1$ ，则 $m = \frac{n(n-3)}{2} + 2$.

当 $n=1$ 时， $m=1$ ；当 $n=2$ 时， $m=1$.

当 $n \geq 3$ 时，由于 n 与 $n-3$ 的奇偶性不同，即 $n(n-3)$ 为非负偶数， $m \in \mathbb{N}^*$.

因此对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ，都可找到 $m \in \mathbb{N}^*$ ，使 $T_n = b_m$ 成立，即 $\{b_n\}$ 为 H 数列.

数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 $R_n = \frac{n(n-1)}{2} (a_1 + d)$ ，

令 $c_m = (m-1)(a_1 + d) = R_n$ ，则 $m = \frac{n(n-1)}{2} + 1$.

\therefore 对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ， $n(n-3)$ 为非负偶数， $\therefore m \in \mathbb{N}^*$.

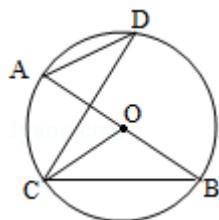
因此对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ，都可找到 $m \in \mathbb{N}^*$ ，使 $R_n = c_m$ 成立，即 $\{c_n\}$ 为 H 数列.

因此命题得证.

点评 本题考查了利用“当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1}$ ，当 $n=1$ 时， $a_1 = S_1$ ”求 a_n 、等差数列的前 n 项和公式及其通项公式、新定义“H”的意义等基础知识与基本技能方法，考查了推理能力和计算能力、构造法，属于难题.

三、附加题（本大题包括选做题和必做题两部分）（一）选择题（本题包括 21、22、23、24 四小题，请选定其中两个小题作答，若多做，则按作答的前两个小题评分）【选修 4-1：几何证明选讲】

21. （10分）（2014•江苏）如图，AB 是圆 O 的直径，C，D 是圆 O 上位于 AB 异侧的两点，证明： $\angle OCB = \angle D$.



考点 弦切角.

:

专题 直线与圆.

:

分析 利用 $OC=OB$ ，可得 $\angle OCB = \angle B$ ，利用同弧所对的圆周角相等，即可得出结论.

:

解答 证明： $\because OC=OB$ ，

$\therefore \angle OCB = \angle B$ ，

$\because \angle B = \angle D$ ，

$\therefore \angle OCB = \angle D$.

点评 本题考查同弧所对的圆周角相等，考查学生分析解决问题的能力，属于基础题.

:

【选修4-2：矩阵与变换】

22. (10分) (2014•江苏) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & x \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, 向量 $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 \\ y \end{bmatrix}$, x, y 为

实数, 若 $A\vec{\alpha} = B\vec{\alpha}$, 求 $x+y$ 的值.

考点 矩阵与向量乘法的意义.

:

专题 矩阵和变换.

:

分析

:

利用矩阵的乘法, 结合 $A\vec{\alpha} = B\vec{\alpha}$, 可得方程组, 即可求 x, y 的值, 从而求得 $x+y$ 的值.

解答

:

解: \because 矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & x \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, 向量 $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 \\ y \end{bmatrix}$, $A\vec{\alpha} = B\vec{\alpha}$,

$$\therefore \begin{cases} 2y - 2 = 2 + y \\ 2 + xy = 4 - y \end{cases},$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2}, y = 4,$$

$$\therefore x + y = \frac{7}{2}$$

点评 本题考查矩阵的乘法, 考查学生的计算能力, 属于基础题.

:

【选修4-3：极坐标及参数方程】

23. (2014•江苏) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为}$$

参数), 直线 l 与抛物线 $y^2 = 4x$ 相交于 A, B 两点, 求线段 AB 的长.

考点 直线的参数方程.

:

专题 计算题; 坐标系和参数方程.

:

分析 直线 l 的参数方程化为普通方程, 与抛物线 $y^2 = 4x$ 联立, 求出 A, B 的坐标, 即可求线段 AB 的长.

解答

:

解: 直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$$
, 化为普通方程为 $x + y = 3$,

与抛物线 $y^2 = 4x$ 联立, 可得 $x^2 - 10x + 9 = 0$,

\therefore 交点 $A(1, 2), B(9, -6)$,

$$\therefore |AB| = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}.$$

点评 本题主要考查了直线与抛物线的位置关系：相交关系的应用，考查学生的计算能力；属于基础题。

【选修4-4：不等式选讲】

24. (2014•江苏) 已知 $x > 0, y > 0$ ，证明 $(1+x+y^2)(1+x^2+y) \geq 9xy$ 。

考点 不等式的证明。

:

专题 证明题；不等式的解法及应用。

:

分析 由均值不等式可得 $1+x+y^2 \geq 3\sqrt[3]{xy^2}$ ， $1+x^2+y \geq 3\sqrt[3]{x^2y}$ ，两式相乘可得结论。

:

解答 证明：由均值不等式可得 $1+x+y^2 \geq 3\sqrt[3]{xy^2}$ ， $1+x^2+y \geq 3\sqrt[3]{x^2y}$

:

分别当且仅当 $x=y^2=1, x^2=y=1$ 时等号成立，

\therefore 两式相乘可得 $(1+x+y^2)(1+x^2+y) \geq 9xy$ 。

点评 本题考查不等式的证明，正确运用均值不等式是关键。

:

(二) 必做题 (本部分包括25、26两题，每题10分，共计20分)

25. (10分) (2014•江苏) 盒中共有9个球，其中有4个红球，3个黄球和2个绿球，这些球除颜色外完全相同。

(1) 从盒中一次随机取出2个球，求取出的2个球颜色相同的概率 P ；

(2) 从盒中一次随机取出4个球，其中红球、黄球、绿球的个数分别记为 x_1, x_2, x_3 ，随机变量 X 表示 x_1, x_2, x_3 中的最大数，求 X 的概率分布和数学期望 $E(X)$ 。

考点 离散型随机变量的期望与方差；古典概型及其概率计算公式。

:

专题 概率与统计。

:

分析 (1) 先求出取2个球的所有可能，再求出颜色相同的所有可能，最后利用概率公式计算即可；

:

(2) 先判断 X 的所有可能值，在分别求出所有可能值的概率，列出分布列，根据数学期望公式计算即可。

解答 解 (1) 一次取2个球共有 $C_9^2=36$ 种可能，2个球颜色相同共有 $C_4^2+C_3^2+C_2^2=10$ 种可能

:

情况

$$\therefore \text{取出的2个球颜色相同的概率 } P = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

$$(2) X \text{ 的所有可能值为 } 4, 3, 2, \text{ 则 } P(X=4) = \frac{C_4^4}{C_9^4} = \frac{1}{126}, P(X=3) =$$

$$\frac{C_4^3 \cdot C_5^1 + C_3^3 \cdot C_6^1}{C_9^4} = \frac{13}{63}$$

于是 $P(X=2) = 1 - P(X=3) - P(X=4) = \frac{11}{14}$,

X的概率分布列为

X	2	3	4
P	$\frac{11}{14}$	$\frac{13}{63}$	$\frac{1}{126}$

故X数学期望 $E(X) = 2 \times \frac{11}{14} + 3 \times \frac{13}{63} + 4 \times \frac{1}{126} = \frac{20}{9}$.

点评 本题考查了排列组合，概率公式以概率的分布列和数学期望，知识点比较多，属基础题。

26. (10分) (2014•江苏) 已知函数 $f_0(x) = \frac{\sin x}{x}$ ($x > 0$)，设 $f_n(x)$ 为 $f_{n-1}(x)$ 的导数， $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求 $2f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}f_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 的值；

(2) 证明：对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ ，等式 $|nf_{n-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}f_n\left(\frac{\pi}{4}\right)| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 都成立.

考点 三角函数中的恒等变换应用；导数的运算.

专题 函数的性质及应用；三角函数的求值.

分析 (1) 由于求两个函数的相除的导数比较麻烦，根据条件和结论先将原函数化为： $xf_0(x) = \sin x$ ，然后两边求导后根据条件两边再求导得： $2f_1(x) + xf_2(x) = -\sin x$ ，把 $x = \frac{\pi}{2}$ 代入式子求值；

(2) 由 (1) 得， $f_0(x) + xf_1(x) = \cos x$ 和 $2f_1(x) + xf_2(x) = -\sin x$ ，利用相同的方法再对所得的式子两边再求导，并利用诱导公式对所得式子进行化简、归纳，再进行猜想得到等式，用数学归纳法进行证明等式成立，主要利用假设的条件、诱导公式、求导公式以及题意进行证明，最后再把 $x = \frac{\pi}{4}$ 代入所给的式子求解验证.

解答 解：(1) $\because f_0(x) = \frac{\sin x}{x}$ ， $\therefore xf_0(x) = \sin x$ ，

则两边求导， $[xf_0(x)]' = (\sin x)'$ ，

$\because f_n(x)$ 为 $f_{n-1}(x)$ 的导数， $n \in \mathbb{N}^*$ ，

$\therefore f_0(x) + xf_1(x) = \cos x$ ，

两边再同时求导得， $2f_1(x) + xf_2(x) = -\sin x$ ，

将 $x = \frac{\pi}{2}$ 代入上式得， $2f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}f_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ ，

$$(2) \text{ 由 (1) 得, } f_0(x) + xf_1(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{恒成立两边再同时求导得, } 2f_1(x) + xf_2(x) = -\sin x = \sin(x + \pi),$$

$$\text{再对上式两边同时求导得, } 3f_2(x) + xf_3(x) = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$\text{同理可得, 两边再同时求导得, } 4f_3(x) + xf_4(x) = \sin x = \sin(x + 2\pi),$$

$$\text{猜想得, } nf_{n-1}(x) + xf_n(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \text{ 对任意 } n \in \mathbb{N}^* \text{ 恒成立,}$$

下面用数学归纳法进行证明等式成立:

$$\textcircled{1} \text{ 当 } n=1 \text{ 时, } f_0(x) + xf_1(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ 成立, 则上式成立;}$$

$\textcircled{2}$ 假设 $n=k$ ($k > 1$ 且 $k \in \mathbb{N}^*$) 时等式成立, 即

$$kf_{k-1}(x) + xf_k(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right),$$

$$\begin{aligned} \therefore [kf_{k-1}(x) + xf_k(x)]' &= kf_{k-1}'(x) + f_k(x) + xf_k'(x) \\ &= (k+1)f_k(x) + xf_{k+1}(x) \end{aligned}$$

$$\text{又 } \left[\sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{k\pi}{2}\right)',$$

$$= \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{k\pi}{2}\right) = \sin\left[x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right],$$

\therefore 那么 $n=k+1$ ($k > 1$ 且 $k \in \mathbb{N}^*$) 时, 等式

$$(k+1)f_k(x) + xf_{k+1}(x) = \sin\left[x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right] \text{ 也成立,}$$

由 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 得, $nf_{n-1}(x) + xf_n(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立,

$$\text{令 } x = \frac{\pi}{4} \text{ 代入上式得, } nf_{n-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}f_n\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right) = \pm \cos \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以, 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 等式 $|nf_{n-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}f_n\left(\frac{\pi}{4}\right)| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 都成立.

点评: 本题考查了三角函数、复合函数的求导数公式和法则、诱导公式, 以及数学归纳法证明命题、转化思想等, 本题设计巧妙, 题型新颖, 立意深刻, 是一道不可多得的好题, 难度很大, 考查了学生观察问题、分析问题、解决问题的能力, 以及逻辑思维能力.