

2009年普通高等学校招生全国统一考试(湖南卷)

理科数学

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $\log_2 a < 0$, $(\frac{1}{2})^b > 1$, 则【 】

- A. $a > 1, b > 0$ B. $a > 1, b < 0$
C. $0 < a < 1, b > 0$ D. $0 < a < 1, b < 0$

2. 对于非零向量 \vec{a}, \vec{b} , “ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ ” 是 “ $\vec{a} // \vec{b}$ ” 的【 】

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 将函数 $y = \sin x$ 的图象向左平移 $\varphi (0 \leq \varphi < 2\pi)$ 个单位后, 得到函数 $y = \sin(x - \frac{\pi}{6})$ 的图象

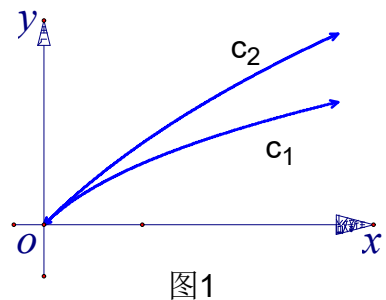
, 则 φ 等于【 】

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{5\pi}{6}$ C. $\frac{7\pi}{6}$ D. $\frac{11\pi}{6}$

4. 如图1, 当参数 $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ 时, 连续函数 $y = \frac{x}{\sqrt{1+\lambda x}}$ ($x \geq 0$)

的图像分别对应曲线 C_1 和 C_2 , 则【 】

- A. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ B. $0 < \lambda_2 < \lambda_1$
C. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ D. $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$



5. 从10名大学生毕业生中选3个人担任村长助理, 则甲、乙至少有1人入选, 而丙没有入选的不同选法的种数为【 】

- A. 85 B. 56 C. 49 D. 28

6. 已知D是由不等式组 $\begin{cases} x - 2y \geq 0, \\ x + 3y \geq 0 \end{cases}$ 所确定的平面区域, 则圆 $x^2 + y^2 = 4$ 在区域D内的弧长为【 】

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. $\frac{3\pi}{2}$

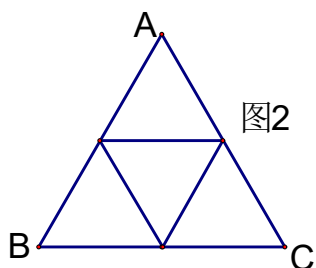


图2

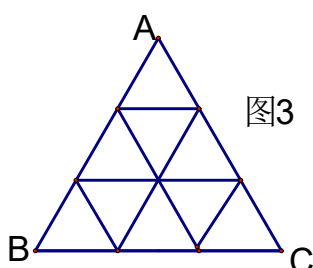


图3

三. 解答题：本大题共6小题，共75分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (本小题满分12分)

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \sqrt{3}|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = 3BC^2$ ，求角 A, B, C 的大小

17. (本小题满分12分)

为拉动经济增长，某市决定新建一批重点工程，分别为基础设施工程、民生工程和产业建设工程三类. 这三类工程所含项目的个数分别占总数的 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$. 现在3名工人独立地从中任选一个项目参与建设。

(I) 求他们选择的项目所属类别互不相同的概率；

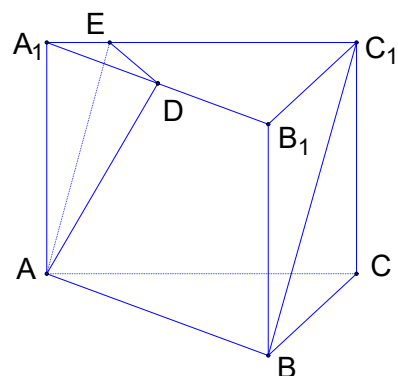
(II) 记 ξ 为3人中选择的项目属于基础设施工程或产业建设工程的人数，求 ξ 的分布列及数学期望。

18. (本小题满分12分)

如图4，在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB = \sqrt{2}AA_1$ ，点D是 A_1B_1 的中点，点E在 A_1C_1 上，且 $DE \perp AE$

(I) 证明：平面 $ADE \perp$ 平面 ACC_1A_1 ；

(II) 求直线 AD 和平面 ABC 所成角的正弦值。



19. (本小题满分13分)

某地建一座桥，两端的桥墩已建好，这两墩相距 m 米，余下工程只需建两端桥墩之间的桥面和桥墩. 经测算，一个桥墩的工程费用为256万元，距离为 x 米的相邻两墩之间的桥面工程费用为 $(2 + \sqrt{x})x$ 万元。假设桥墩等距离分布，所有桥墩都视为点，且不考虑其它因素. 记余下工程的费用为 y 万元。

(I) 试写出 y 关于 x 的函数关系式;

(II) 当 $m=640$ 米时, 需新建多少个桥墩才能使 y 最小?

20. (本小题满分13分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 点 P 到点 $F(3, 0)$ 的距离的4倍与它到直线 $x=2$ 的距离的3倍之和记为 d . 当点 P 运动时, d 恒等于点 P 的横坐标与18之和

(I) 求点 P 的轨迹 C ;

(II) 设过点 F 的直线 l 与轨迹 C 相交于 M, N 两点, 求线段 MN 长度的最大值。

21. (本小题满分13分)

对于数列 $\{u_n\}$, 若存在常数 $M > 0$, 对任意的 $n \in N^*$, 恒有

$$|u_{n+1} - u_n| + |u_n - u_{n-1}| + \cdots + |u_2 - u_1| \leq M,$$

则称数列 $\{u_n\}$ 为 B -数列.

(I) 首项为1, 公比为 $q(|q| < 1)$ 的等比数列是否为 B -数列? 请说明理由;

请以其中一组的一个论断条件, 另一组中的一个论断为结论组成一个命题

判断所给命题的真假, 并证明你的结论;

(II) 设 S_n 是数列 $\{x_n\}$ 的前 n 项和, 给出下列两组论断:

A组: ①数列 $\{x_n\}$ 是 B -数列, ②数列 $\{x_n\}$ 不是 B -数列;

B组: ③数列 $\{S_n\}$ 是 B -数列, ④数列 $\{S_n\}$ 不是 B -数列.

请以其中一组中的一个论断为条件, 另一组中的一个论断为结论

组成一个命题. 判断所给命题的真假, 并证明你的结论;

(III) 若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是 B -数列, 证明: 数列 $\{a_n b_n\}$ 也是 B -数列。

解：除开丙，由间接法得 $C_9^3 - C_7^3 = 84 - 35 = 49$ ，故选C.

6. (09湖南理) 已知D是由不等式组 $\begin{cases} x-2y \geq 0, \\ x+3y \geq 0 \end{cases}$ 所确定的平面区域，则圆 $x^2 + y^2 = 4$ 在区域D

内的弧长为【 B 】 A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. $\frac{3\pi}{2}$

解：作图，由 $k_1 = \frac{1}{2}, k_2 = -\frac{1}{3}, \Rightarrow \tan \theta = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 1 \therefore \theta = \frac{\pi}{4}$,

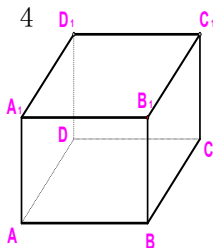
故弧长为 $l = R\theta = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ ，选B.

7. (09湖南理) 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱上到异面直线 AB, CC_1 的距离相等的点的个数为【 C 】

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

解：如图，用列举法知合要求的点的个数为：

BC 的点E、 A_1D_1 的点F、 B_1, D_1 ，
共4个，故选C.



8. (09湖南理) 设函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义. 对于给定的正数K, 定义函数

$f_K(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq K, \\ K, & f(x) > K. \end{cases}$ 取函数 $f(x) = 2 - x - e^{-x}$. 若对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$ ，恒有

$f_K(x) = f(x)$ ，则【 D 】

A. K的最大值为2 B. K的最小值为2
C. K的最大值为1 D. K的最小值为1

解：

由 $K \geq f(x)$ 恒成立知 $K \geq f(x)_{\min}$ ，故K有最小值，可排除A, C, 又由直觉思维得在 $x = 0$ 时，

$f(x) = 2 - x - e^{-x} = 2 - 0 - 1 = 1$ ，排除B, 因此选D.

二、填空题：本大题共7小题，每小题5分，共35分，把答案填在答题卡中对应题号后的横线上

9. (09湖南理) 某班共30人，其中15人喜爱篮球运动，10人喜爱乒乓球运动，8人对这两项运

动都不喜爱，则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为 12。

解：设所求人数为 x ，则只喜爱乒乓球运动的人数为 $10 - (15 - x) = x - 5$ ，

故 $15 + x - 5 = 30 - 8 \Rightarrow x = 12$ 。

注：最好作出韦恩图！ 或由 $15 + 10 - (30 - 8) = 3 \Rightarrow 15 - 3 = 12$ 人。

10. (09湖南理) 在 $(1+x)^3 + (1+\sqrt{x})^3 + (1+\sqrt[3]{x})^3$ 的展开式中， x 的系数为 7 (用数字作答)。

解： $\Rightarrow T_{r+1} = C_3^r b^r$ ，故有： $C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3 - C_3^0 = 7$ ，得 x 的系数为 7。

11. (09湖南理) 若 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，则 $2 \tan x + \tan(\frac{\pi}{2} - x)$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$ 。

解： $\because x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow 2 \tan x + \tan(\frac{\pi}{2} - x) = 2 \tan x + \frac{1}{\tan x} \geq 2\sqrt{2}$ ，

当且仅当 $2 \tan x = \frac{1}{\tan x} \Rightarrow \tan x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号。

12. (09湖南理) 已知以双曲线 C 的两个焦点及虚轴的两个端点为顶点的四边形中，有一个内角为 60° ，则双曲线 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 。

解：设双曲线 C 的左右焦点为 F_1, F_2 ，虚轴的上下两个端点为 B_1, B_2 ，由于 $c > b$ ，

故 $\angle F_1 B_1 F_2 \neq 60^\circ$ ，则有 $\angle B_1 F_2 B_2 = 60^\circ \Rightarrow \angle B_1 F_2 O = 30^\circ \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{b}{c}$ ，

$\Rightarrow 2c^2 = 3a^2$ ， $\therefore e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{3}{2}$ ， $\Rightarrow e = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 。

13. (09湖南理) 一个总体分为 A, B 两层，其个体数之比为 4: 1，用分层抽样方法从总体中抽取一个容量为 10 的样本。已知 B 层中甲、乙都被抽到的概率为 $\frac{1}{28}$ ，则总体中的个体数为 40。

解：设 B 层中的个体数为 n ，则 $\frac{1}{28} = \frac{1}{C_n^2} \Rightarrow n = 8$ ，则总体中的个体数为 $8 \times 5 = 40$ 。

14. (09湖南理) 在半径为 13 的球面上有 A, B, C 三点， $AB=6$ ， $BC=8$ ， $CA=10$ ，则

(1) 球心到平面 ABC 的距离为 12；

(2) 过 A, B 两点的大圆面与平面 ABC 所成二面角 (锐角) 的正切值为 3。

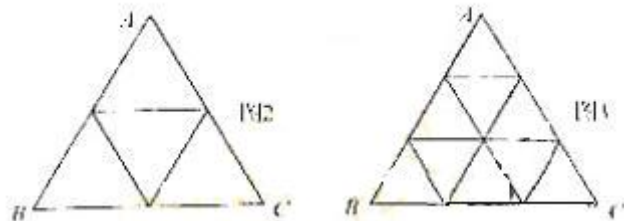
解：由 $AB=6$ ， $BC=8$ ， $CA=10$ 得 $\triangle ABC$ 是以 B 为直角顶点的直角三角形，

(1) 设斜边 AC 的中点为 O' ，则 $r = BO' = 5$ ，故 $d = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ ；

(2) 作 $O'H \perp AB$ ，则 $O'H = 4$ ，故 $\tan \angle HO'O' = \frac{d}{O'H} = \frac{12}{4} = 3$.

15. (09湖南理) 将正 $\triangle ABC$ 分割成 $n^2 (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$ 个全等的小正三角形(图2, 图3分别给出了 $n=2$,

3的情形), 在每个三角形的顶点各放置一个数, 使位于 $\triangle ABC$ 的三边及平行于某边的任一直线上的数(当数的个数不少于3时)都分别依次成等差数列. 若顶点 A , B , C 处的三个数互不相同且和为1, 记所有顶点上的数之和为 $f(n)$, 则有 $f(2) = 2$, $f(3) = \frac{10}{3}$ _____, \dots , $f(n) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)$ _____.



解：若依题意顶点 A , B , C 处的三个数互不相同且和为1, 按等差数列的性质进行计算则显然运算量较大, 故常规思维不可取! 可偏偏特取 A, B, C 处的数均为 $\frac{1}{3}$ (极限法) 来思考:

则图2中有 $a_2 = 6$ 个 $\frac{1}{3}$, 得 $f(2) = 6 \times \frac{1}{3} = 2$; 故图3中有 $a_3 = 10$ 个 $\frac{1}{3}$, 得

$f(3) = 10 \times \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$; 易知 $n = 4$ 时有 $a_4 = 15$ 个 $\frac{1}{3}$, \dots

探讨数列 $a_2 = 6, a_3 = 10, a_4 = 15, \dots a_n - a_{n-1} = 3 + (n-2) = n+1$,

(可参考2006湖南卷: 逆序数) 由叠加法推知:

$$a_n = 6 + [4 + 5 + 6 + \dots + (n+1)] = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \text{ 个 } \frac{1}{3}, \therefore f(n) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2).$$

三. 解答题: 本大题共6小题, 共75分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (09湖南理) (本小题满分12分)

在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $2\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \sqrt{3} |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| = 3\overline{BC}^2$, 求角 A, B, C 的大小.

解: 设 $BC = a, AC = b, AB = c$.

由 $2\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \sqrt{3}|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|$ 得 $2bc \cos A = \sqrt{3}bc$, 所以 $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $A \in (0, \pi)$, 因此 $A = \frac{\pi}{6}$.

由 $\sqrt{3}|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| = 3\overline{BC}^2$ 得 $bc = \sqrt{3}a^2$, 于是 $\sin C \cdot \sin B = \sqrt{3} \sin^2 A = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

所以 $\sin C \cdot \sin(\frac{5\pi}{6} - C) = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $\sin C \cdot (\frac{1}{2} \cos C + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin C) = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 因此

$2 \sin C \cdot \cos C + 2\sqrt{3} \sin^2 C = \sqrt{3}$, $\sin 2C - \sqrt{3} \cos 2C = 0$, 既 $\sin(2C - \frac{\pi}{3}) = 0$.

由 $A = \frac{\pi}{6}$ 知 $0 < C < \frac{5\pi}{6}$, 所以 $-\frac{\pi}{3} < 2C - \frac{\pi}{3} < \frac{4\pi}{3}$, 从而

$2C - \frac{\pi}{3} = 0$, 或 $2C - \frac{\pi}{3} = \pi$, 既 $C = \frac{\pi}{6}$, 或 $C = \frac{2\pi}{3}$, 故

$A = \frac{\pi}{6}, B = \frac{2\pi}{3}, C = \frac{\pi}{6}$, 或 $A = \frac{\pi}{6}, B = \frac{\pi}{6}, C = \frac{2\pi}{3}$.

17. (09湖南理) (本小题满分12分)

为拉动经济增长, 某市决定新建一批重点工程, 分别为基础设施工程、民生工程和产业建设工程三类. 这三类工程所含项目的个数分别占总数的 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$. 现在3名工人独立地从中任选一个项目参与建设。

(I) 求他们选择的项目所属类别互不相同的概率;

(II) 记 ξ 为3人中选择的项目属于基础设施工程或产业建设工程的人数,

求 ξ 的分布列及数学期望。

解: 记第 i 名工人选择的项目属于基础设施工程、民生工程和产业建设工程分别为事件

$A_i, B_i, C_i, i=1, 2, 3$. 由题意知 A_1, A_2, A_3 相互独立, B_1, B_2, B_3 相互独立, C_1, C_2, C_3

相互独立, A_i, B_j, C_k ($i, j, k=1, 2, 3$, 且 i, j, k 互不相同) 相互独立,

且 $P(A_i) = \frac{1}{2}, P(B_i) = \frac{1}{3}, P(C_i) = \frac{1}{6}$.

(I) 他们选择的项目所属类别互不相同的概率

$$P = 3!P(A_1B_2C_3) = 6P(A_1)P(B_2)P(C_3) = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

(II) 解法1: 设3名工人中选择的项目属于民生工程的人数为 η ,

由已知, $\eta \sim B(3, \frac{1}{3})$, 且 $\xi = 3 - \eta$.

$$\text{所以 } P(\xi=0) = P(\eta=3) = C_3^3 (\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27},$$

$$P(\xi=1) = P(\eta=2) = C_3^2 (\frac{1}{3})^2 (\frac{2}{3}) = \frac{2}{9},$$

$$P(\xi=2) = P(\eta=1) = C_3^1 (\frac{1}{3}) (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9},$$

$$P(\xi=3) = P(\eta=0) = C_3^0 (\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}.$$

故 ξ 的分布列是

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

$$\xi \text{ 的数学期望 } E\xi = 0 \times \frac{1}{27} + 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{4}{9} + 3 \times \frac{8}{27} = 2.$$

解法2: 记第*i*名工人选择的项目属于基础工程或产业建设工程分别为事件 D_i ,

$i=1, 2, 3$. 由已知, D_1, D_2, D_3 相互独立, 且

$$P(D_i) = (A_i + C_i) = P(A_i) + P(C_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3},$$

所以 $\xi \sim B(3, \frac{2}{3})$, 即 $P(\xi=k) = C_3^k (\frac{2}{3})^k (\frac{1}{3})^{3-k}, k=0, 1, 2, 3$.

故 ξ 的分布列是

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

18. (09湖南理) (本小题满分12分)

如图4, 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = \sqrt{2}AA_1$,

点D是 A_1B_1 的中点, 点E在 A_1C_1 上, 且 $DE \perp AE$.

(I) 证明: 平面 $ADE \perp$ 平面 ACC_1A_1 ;

(II) 求直线 AD 和平面 ABC 所成角的正弦值.

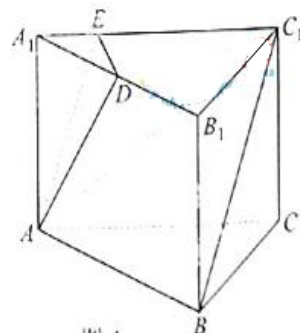


图4

解：（1）如图所示，由正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的性质知 $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$ 。

又 $DE \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$ ，所以 $DE \perp AA_1$ 。而 $DE \perp AE$ ， $AA_1 \cap AE = A$ ，

所以 $DE \perp$ 平面 ACC_1A_1 。又 $DE \subset$ 平面 ADE ，故平面 $ADE \perp$ 平面 ACC_1A_1 。

（2）解法1： 如图所示，设 F 是 AB 的中点，连接 DF ， DC_1 ， C_1F 。

由正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的性质及 D 是 A_1B_1 的中点知，

$A_1B_1 \perp C_1D$ ， $A_1B_1 \perp DF$ 。又 $C_1D \cap DF = D$ ，

所以 $A_1B_1 \perp$ 平面 C_1DF 。而 $AB \parallel A_1B_1$ ，

所以 $AB \perp$ 平面 C_1DF 。又 $AB \subset$ 平面 ABC_1 ，

故平面 $ABC_1 \perp$ 平面 C_1DF 。

过点 D 做 DH 垂直 C_1F 于点 H ，则 $DH \perp$ 平面 ABC_1 。

连接 AH ，则 $\angle HAD$ 是 AD 和平面 ABC_1 所成的角。

由已知 $AB = \sqrt{2} AA_1$ ，不妨设 $AA_1 = \sqrt{2}$ ，则 $AB = 2$ ， $DF = \sqrt{2}$ ， $DC_1 = \sqrt{3}$ ，

$$C_1F = \sqrt{5}, AD = \sqrt{AA_1^2 + A_1D^2} = \sqrt{3}, DH = \frac{DF \cdot DC_1}{C_1F} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

所以 $\sin \angle HAD = \frac{DH}{AD} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ 。即直线 AD 和平面 ABC_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$ 。

解法2： 如图所示，设 O 是 AC 的中点，以 O 为原点建立空间直角坐标系，

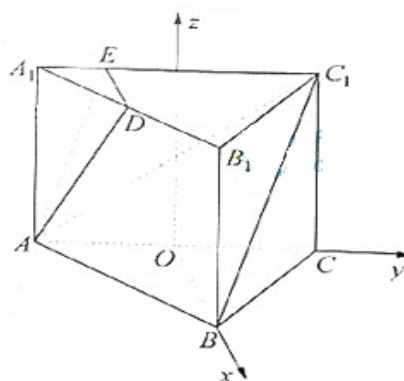
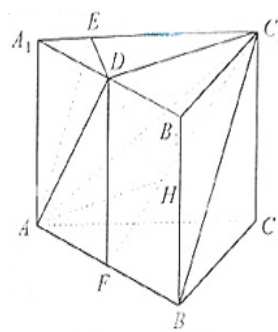
不妨设 $AA_1 = \sqrt{2}$ ，则 $AB = 2$ ，相关各点的坐标分别是

$$A(0, -1, 0), B(\sqrt{3}, 0, 0), C_1(0, 1, \sqrt{2}), D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right).$$

$$\text{易知 } \vec{AB} = (\sqrt{3}, 1, 0), \vec{AC}_1 = (0, 2, \sqrt{2}), \vec{AD} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right).$$

设平面 ABC_1 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，则有

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = \sqrt{3}x + y = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{AC}_1 = 2y + \sqrt{2}z = 0. \end{cases}$$



$$\text{解得 } x = -\frac{\sqrt{3}}{3}y, z = -\sqrt{2}y.$$

$$\text{故可取 } \vec{n} = (1, -\sqrt{3}, \sqrt{6}).$$

$$\text{所以, } \cos \langle \vec{n}, \vec{AD} \rangle = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{AD}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{AD}|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

由此即知, 直线AD和平面AB₁C₁所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$ 。

19. (09湖南理) (本小题满分13分)

某地建一座桥，两端的桥墩已建好，这两墩相距 m 米，余下工程只需建两端桥墩之间的桥面和桥墩. 经测算，一个桥墩的工程费用为256万元，距离为 x 米的相邻两墩之间的桥面工程费用为 $(2 + \sqrt{x})x$ 万元. 假设桥墩等距离分布，所有桥墩都视为点，且不考虑其它因素. 记余下工程的费用为 y 万元.

(I) 试写出 y 关于 x 的函数关系式;

(II) 当 $m=640$ 米时，需新建多少个桥墩才能使 y 最小?

解: (I) 设需新建 n 个桥墩，则 $(n+1)x = m$ ，即 $n = \frac{m}{x} - 1$ ，

$$\begin{aligned} \text{所以 } y = f(x) &= 256n + (n+1)(2 + \sqrt{x})x = 256\left(\frac{m}{x} - 1\right) + \frac{m}{x}(2 + \sqrt{x})x \\ &= \frac{256m}{x} + m\sqrt{x} + 2m - 256. \end{aligned}$$

(II) 由 (I) 知， $f'(x) = -\frac{256m}{x^2} + \frac{1}{2}mx^{-\frac{1}{2}} = \frac{m}{2x^2}(x^{\frac{3}{2}} - 512)$.

令 $f'(x) = 0$ ，得 $x^{\frac{3}{2}} = 512$ ，所以 $x = 64$.

当 $0 < x < 64$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 在区间 $(0, 64)$ 内为减函数;

当 $64 < x < 640$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 在区间 $(64, 640)$ 内为增函数.

所以 $f(x)$ 在 $x = 64$ 处取得最小值，此时 $n = \frac{m}{x} - 1 = \frac{640}{64} - 1 = 9$.

故需新建9个桥墩才能使 y 最小.

20. (09湖南理) (本小题满分13分)

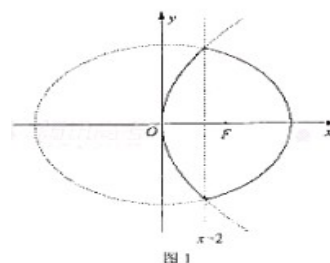
在平面直角坐标系 xOy 中，点 P 到点 $F(3, 0)$ 的距离的4倍与它到直线 $x=2$ 的距离的3倍之和记为 d . 当点 P 运动时， d 恒等于点 P 的横坐标与18之和.

(I) 求点 P 的轨迹 C ;

(II) 设过点 F 的直线 l 与轨迹 C 相交于 M, N 两点，求线段 MN 长度的最大值.

解: (I) 设点 P 的坐标为 (x, y) ,

则 $d = 4\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + 3|x-2|$. 由题设， $d = 18 + x$,



即 $4\sqrt{(x-3)^2 - y^2} + 3|x-2| = 18+x$. ……①

当 $x > 2$ 时, 由①得 $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 6 - \frac{1}{2}x$, ……②

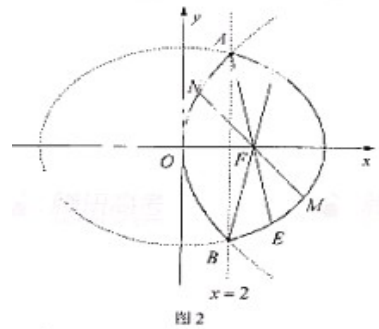
化简得 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$.

当 $x \leq 2$ 时, 由①得 $\sqrt{(3+x)^2 + y^2} = 3+x$, ……③

化简得 $y^2 = 12x$.

故点P的轨迹C是椭圆 $C_1: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ 在直线 $x=2$ 的右侧部分

与抛物线 $C_2: y^2 = 12x$ 在直线 $x=2$ 的左侧部分 (包括它与直线 $x=2$ 的交点) 所组成的曲线, 参见图1.



(II) 如图2所示, 易知直线 $x=2$

与 C_1, C_2 的交点都是 $A(2, 2\sqrt{6}), B(2, -2\sqrt{6})$,

直线AF, BF的斜率分别为 $k_{AF} = -2\sqrt{6}, k_{BF} = 2\sqrt{6}$.

当点P在 C_1 上时, 由②知 $|PF| = 6 - \frac{1}{2}x$. ……④

当点P在 C_2 上时, 由③知 $|PF| = 3+x$. ……⑤

若直线 l 的斜率 k 存在, 则直线 l 的方程为 $y = k(x-3)$.

(i) 当 $k \leq k_{AF}$, 或 $k \geq k_{BF}$, 即 $k \leq -2\sqrt{6}$ 或 $k \geq 2\sqrt{6}$ 时, 直线 l 与轨迹C

的两个交点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 都在 C_1 上, 此时由④知

$$|MF| = 6 - \frac{1}{2}x_1, |NF| = 6 - \frac{1}{2}x_2,$$

$$\text{从而 } |MN| = |MF| + |NF| = (6 - \frac{1}{2}x_1) + (6 - \frac{1}{2}x_2) = 12 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x-3), \\ \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1 \end{cases} \text{ 得 } (3+4k^2)x^2 - 24k^2x + 36k^2 - 108 = 0.$$

$$\text{则 } x_1, y_1 \text{ 是这个方程的两根, 所以 } x_1 + x_2 = \frac{24k^2}{3+4k^2}, |MN| = 12 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 12 - \frac{1}{2} \cdot \frac{24k^2}{3+4k^2} = 12 - \frac{12k^2}{3+4k^2}$$

$$\frac{12k^2}{3+4k^2}.$$

因为当 $k \leq -2\sqrt{6}$, 或 $k \geq 2\sqrt{6}$ 时, $k^2 \geq 24$, 所以

$$|MN| = 12 - \frac{12k^2}{3+4k^2} = 12 - \frac{12}{\frac{3}{k^2} + 4} \leq 12 - \frac{12}{\frac{3}{24} + 4} = \frac{100}{11}.$$

当且仅当 $k = \pm 2\sqrt{6}$ 时, 等号成立。

(ii) 当 $k_{AF} < k < k_{AF}$, $-2\sqrt{6} < k < 2\sqrt{6}$ 时, 直线 l 与轨迹 C 的两个交点

$M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 分别在 C_1, C_2 上, 不妨设点 M 在 C_1 上, 点 N 在 C_2 上,

则由④⑤知, $|MF| = 6 - \frac{1}{2}x_1, |NF| = 3 + x_2$.

设直线 AF 与椭圆 C_1 的另一交点为 $E(x_0, y_0)$, 则 $x_0 < x_1, x_2 < 2$.

$$|MF| = 6 - \frac{1}{2}x_1 < 6 - \frac{1}{2}x_0 = |EF|, |NF| = 3 + x_2 < 3 + 2 = |AF|,$$

所以 $|MN| = |MF| + |NF| < |EF| + |AF| = |AE|$ 。而点 A, E 都在 C_1 上,

且 $k_{AE} = -2\sqrt{6}$, 由 (i) 知 $|AE| = \frac{100}{11}$, 所以 $|MN| < \frac{100}{11}$ 。

若直线 l 的斜率不存在, 则 $x_1 = x_2 = 3$, 此时

$$|MN| = 12 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 9 < \frac{100}{11}.$$

综上所述, 线段 MN 长度的最大值为 $\frac{100}{11}$ 。

21. (09湖南理) (本小题满分13分)

对于数列 $\{u_n\}$, 若存在常数 $M > 0$, 对任意的 $n \in N^*$, 恒有

$$|u_{n+1} - u_n| + |u_n - u_{n-1}| + \cdots + |u_2 - u_1| \leq M, \text{ 则称数列 } \{u_n\} \text{ 为 } B\text{-数列}.$$

(I) 首项为1, 公比为 q ($|q| < 1$) 的等比数列是否为 B -数列? 请说明理由;

请以其中一组的一个论断条件, 另一组中的一个论断为结论组成一个命题

判断所给命题的真假, 并证明你的结论;

(II) 设 S_n 是数列 $\{x_n\}$ 的前 n 项和, 给出下列两组论断:

A组：①数列 $\{x_n\}$ 是B-数列， ②数列 $\{x_n\}$ 不是B-数列；

B组：③数列 $\{S_n\}$ 是B-数列， ④数列 $\{S_n\}$ 不是B-数列。

请以其中一组中的一个论断为条件，另一组中的一个论断为结论组成一个命题。判断所给命题的真假，并证明你的结论；

(III) 若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是B-数列，证明：数列 $\{a_n b_n\}$ 也是B-数列。

解：(I) 设满足题设的等比数列为 $\{a_n\}$ ，则 $a_n = q^{n-1}$ ，于是

$$|a_n - a_{n-1}| = |q^{n-1} - q^{n-2}| = |q|^{n-2} |q-1|, n \geq 2.$$

$$\text{因此 } |a_{n+1} - a_n| + |a_n - a_{n-1}| + \cdots + |a_2 - a_1| = |q-1|(1 + |q| + |q|^2 + \cdots + |q|^{n-1}).$$

$$\text{因为 } |q| < 1, \text{ 所以 } 1 + |q| + |q|^2 + \cdots + |q|^{n-1} = \frac{1 - |q|^n}{1 - |q|} < \frac{1}{1 - |q|}, \text{ 即}$$

$$|a_{n+1} - a_n| + |a_n - a_{n-1}| + \cdots + |a_2 - a_1| < \frac{|q-1|}{1 - |q|}.$$

故首项为1，公比为 q ($|q| < 1$) 的等比数列是B-数列。

(II) **命题1**：若数列 $\{x_n\}$ 是B-数列，则数列 $\{S_n\}$ 是B-数列。

此命题为假命题。

事实上，设 $x_n = 1, n \in N^*$ ，易知数列 $\{x_n\}$ 是B-数列，但 $S_n = n$ ，

$$|S_{n+1} - S_n| + |S_n - S_{n-1}| + \cdots + |S_2 - S_1| = n.$$

由 n 的任意性知，数列 $\{S_n\}$ 不是B-数列。

命题2：若数列 $\{S_n\}$ 是B-数列，则数列 $\{x_n\}$ 是B-数列。

此命题为真命题。

事实上，因为数列 $\{S_n\}$ 是B-数列，所以存在正数 M ，对任意的 $n \in N^*$ ，有

$$|S_{n+1} - S_n| + |S_n - S_{n-1}| + \cdots + |S_2 - S_1| \leq M, \quad ,$$

即 $|x_{n+1}| + |x_n| + \cdots + |x_2| \leq M$ 。于是

$$|x_{n+1} - x_n| + |x_n - x_{n-1}| + \cdots + |x_2 - x_1|$$

$$\leq |x_{n+1}| + 2|x_n| + 2|x_{n-1}| + \dots + 2|x_2| + |x_1| \leq 2M + |x_1|,$$

所以数列 $\{x_n\}$ 是B-数列。

(注：按题中要求组成其它命题解答时，仿上述解法)

(III) 若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是B-数列，则存在正数 M_1, M_2 ，对任意的 $n \in N^\bullet$ ，有

$$|a_{n+1} - a_n| + |a_n - a_{n-1}| + \dots + |a_2 - a_1| \leq M_1;$$

$$|b_{n+1} - b_n| + |b_n - a_{n-1}| + \dots + |b_2 - b_1| \leq M_2,$$

$$\text{注意到 } |a_n| = |a_n - a_{n-1} + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 - a_1 + a_1|$$

$$\leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \dots + |a_2 - a_1| + |a_1| \leq M_1 + |a_1|.$$

$$\text{同理, } |b_n| \leq M_2 + |b_1| \quad . \quad \text{记 } K_1 = M_1 + |a_1|, \quad K_2 = M_2 + |b_2|,$$

$$\text{则有 } |a_{n+1}b_{n+1} - a_nb_n| = |a_{n+1}b_{n+1} - a_nb_{n+1} + a_nb_{n+1} - a_nb_n|$$

$$\leq |b_{n+1}| |a_{n+1} - a_n| + |a_n| |b_{n+1} - b_n| \leq K_2 |a_{n+1} - a_n| + K_1 |b_{n+1} - b_n|.$$

$$\text{因此 } |a_{n+1}b_{n+1} - a_nb_n| + |a_nb_n - a_{n-1}b_{n-1}| + \dots + |a_2b_2 - a_1b_1|$$

$$\leq K_2 (|a_{n+1} - a_n| + |a_n - a_{n-1}| + \dots + |a_2 - a_1|)$$

$$+ K_1 (|b_{n+1} - b_n| + |b_n - b_{n-1}| + \dots + |b_2 - b_1|) \leq k_2 M_1 + k_1 M_2.$$

故数列 $\{a_nb_n\}$ 是B-数列。