2005 年湖北高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分.满分 150 分.考试时间 120 分钟.

第 I 部分（选择题 共 60 分）

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2．每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。答在试题卷上无效。

3．考试结束，监考人员将本试题卷和答题卡一并收回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个备选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．设 P、Q 为两个非空实数集合，定义集合 P+Q=$\{a+b\mid a\in P,b\in Q\}$,若$P=\{0,2,5\}$,

$Q=\{1,2,6\}$，则 P+Q 中元素的个数是（　　）

A．9　　B．8　　C．7　　D．6

2．对任意实数 a，b，c，给出下列命题：

①“$a=b$”是“$ac=bc$”充要条件；　②“$a+5$是无理数”是“a 是无理数”的充要条件③“a>b”是“$a^2>b^2$”的充分条件；④“a<5”是“a<3”的必要条件.

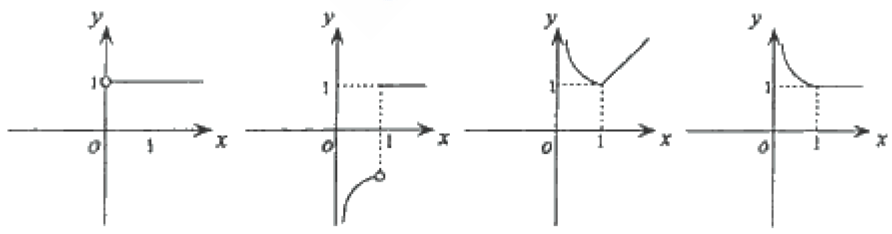
其中真命题的个数是（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

3．$\dfrac{(1-i)(1+2i)}{1+i}=$（　　）

A．$-2-i$　　B．$-2+i$　　C．$2-i$　　D．$2+i$

4．函数$y=e^{|\ln x|}-|x-1|$的图象大致是（　　）



A　　B　　C　　D

5．双曲线$\dfrac{x^2}{m}-\dfrac{y^2}{n}=1(mn\neq 0)$离心率为 2，有一个焦点与抛物线$y^2=4x$的焦点重合，

则 mn 的值为（　　）

A．$\dfrac{3}{16}$　　B．$\dfrac{3}{8}$　　C．$\dfrac{16}{3}$　　D．$\dfrac{8}{3}$

6．在$y=2^x,y=\log_2 x,y=x^2,y=\cos 2x$这四个函数中，当$0<x_1<x_2<1$时，使

$f(\dfrac{x_1+x_2}{2})>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$恒成立的函数的个数是（　　）

A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3

7．若$\sin\alpha+\cos\alpha=\tan\alpha(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$,则$\alpha\in$　　　　（　　）

A．$(0,\frac{\pi}{6})$　　B．$(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$　　C．$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$　　D．$(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$

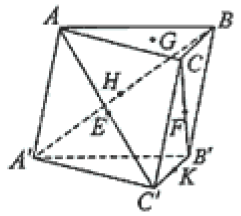
8．若$\lim\limits_{x\to1}(\frac{a}{1-x}-\frac{b}{1-x^2})=1$，则常数$a,b$的值为　　　　（　　）

A．$a=-2,b=4$　　B．$a=2,b=-4$　　C．$a=-2,b=-4$　　D．$a=2,b=4$

9．若$0<x<\frac{\pi}{2}$,则$2x$与$3\sin x$的大小关系　　　　（　　）

A．$2x>3\sin x$　　B．$2x<3\sin x$　　C．$2x=3\sin x$　　D．与 x 的取值有关

10．如图，在三棱柱 ABC—A′B′C′中，点 E、F、H、 K 分别为 AC′、CB′、A′B、B′C′的中点，G 为△ABC 的重心．从 K、H、G、B′中取一点作为 P， 使得该棱柱恰有 2 条棱与平面 PEF 平行，则 P 为　　　　（　　）



A．K　　　　B．H

C．G　　　　D．B′

11．某初级中学有学生 270 人，其中一年级 108 人，二、三年级各 81 人，现要利用抽样方法抽取 10 人参加某项调查，考虑选用简单随机抽样、分层抽样和系统抽样三种方案，使用简单随机抽样和分层抽样时，将学生按一、二、三年级依次统一编号为 1，2，…，270；使用系统抽样时，将学生统一随机编号 1，2，…，270，并将整个编号依次分为 10 段。如果抽得号码有下列四种情况：

①7，34，61，88，115，142，169，196，223，250；

②5，9，100，107，111，121，180，195，200，265；

③11，38，65，92，119，146，173，200，227，254；

④30，57，84，111，138，165，192，219，246，270；

关于上述样本的下列结论中，正确的是　　　　（　　）

A．②、③都不能为系统抽样　　B．②、④都不能为分层抽样

C．①、④都可能为系统抽样　　D．①、③都可能为分层抽样

12．以平行六面体 ABCD—A′B′C′D′的任意三个顶点为顶点作三角形，从中随机取出两个三角形，则这两个三角形不共面的概率 p 为　　　　（　　）

A．$\frac{367}{385}$　　B．$\frac{376}{385}$　　C．$\frac{192}{385}$　　D．$\frac{18}{385}$

第Ⅱ卷（非选择题 共 90 分）

注意事项：

第Ⅱ卷用 0.5 毫米黑色的签字或黑色墨水钢笔直接答在答题卡上。答在试题卷上无效。

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分．把答案填在答题卡相应位置上．

13．已知向量$\vec{a}=(-2,2),\vec{b}=(5,k)$.若$|\vec{a}+\vec{b}|$不超过 5，则 k 的取值范围是__________.

14．$(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}+\sqrt{2})^5$的展开式中整理后的常数项为________.

15．设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，前 n 项和为 S_n，若 S_{n+1}, S_n，S_{n+2}成等差数列，则 q 的值为

______________.

16．某实验室需购某种化工原料 106 千克，现在市场上该原料有两种包装，一种是每袋 35 千克，价格为 140 元；另一种是每袋 24 千克，价格为 120 元．在满足需要的条件下，最少要花费__________元.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 12 分）

已知向量 $\vec{a}=(x^2,x+1),\vec{b}=(1-x,t)$，若函数 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$ 在区间（－1，1）上是增函数，

求 t 的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，已知 $AB=\dfrac{4\sqrt{6}}{3},\cos B=\dfrac{\sqrt{6}}{6},AC$ 边上的中线 BD=$\sqrt{5}$，求 sinA 的值.

19.（本小题满分 12 分）

某地最近出台一项机动车驾照考试规定;每位考试者一年之内最多有 4 次参加考试的机会，一旦某次考试通过，使可领取驾照，不再参加以后的考试，否则就一直考到第 4 次为止。如果李明决定参加驾照考试，设他每次参加考试通过的概率依次为 0.6，0.7，0.8，0.9，求在

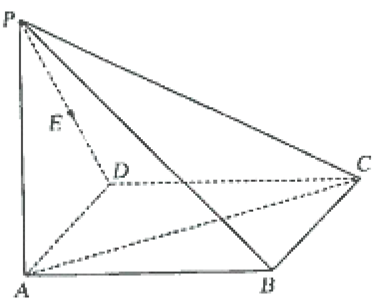
一年内李明参加驾照考试次数 ξ 的分布列和 ξ 的期望，并求李明在一年内领到驾照的概率.

20.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 P—ABCD 中，底面 ABCD 为矩形，侧棱 PA⊥底面 ABCD，AB=$\sqrt{3}$，BC=1，PA=2，E 为 PD 的中点.

（Ⅰ）求直线 AC 与 PB 所成角的余弦值；

（Ⅱ）在侧面 PAB 内找一点 N，使 NE⊥面 PAC，并求出 N 点到 AB 和 AP 的距离.



21.（本小题满分 12 分）

设A、B是椭圆$3x^2+y^2=\lambda$上的两点，点N（1，3）是线段AB的中点，线段AB的垂直平分线与椭圆相交于C、D两点.

（Ⅰ）确定λ的取值范围，并求直线AB的方程；

（Ⅱ）试判断是否存在这样的λ，使得A、B、C、D四点在同一个圆上？并说明理由.

（此题不要求在答题卡上画图）

22.（本小题满分14分）

已知不等式$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}[\log_2 n]$,其中$n$为大于2的整数，$[\log_2 n]$表示不超过$\log_2 n$的最大整数．设数列$\{a_n\}$的各项为正，且满足

$a_1=b(b>0), a_n\le\frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}}, n=2,3,4,\cdots$

（Ⅰ）证明$a_n<\frac{2b}{2+b[\log_2 n]}, n=3,4,5,\cdots$

（Ⅱ）猜测数列$\{a_n\}$是否有极限？如果有，写出极限的值（不必证明）；

（Ⅲ）试确定一个正整数N，使得当$n>N$时，对任意b>0，都有$a_n<\frac{1}{5}$.

参考答案

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算. 每小题5分，满分60分.

1．B　2．B　3．C　4．D　5．A　6．B　7．C　8．C　9．D　10．C　11．D　12．A

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算. 每小题4分，满分16分.

13．[－6，2]　　14．$\frac{63\sqrt{2}}{2}$　　15．－2　　16．500

三、解答题

17．本小题主要考查平面向量数量积的计算方法、利用导数研究函数的单调性，以及运用基本函数的性质分析和解决问题的能力。

解法1：依定义$f(x)=x^2(1-x)+t(x+1)=-x^3+x^2+tx+t,$

则$f'(x)=-3x^2+2x+t.$

若$f(x)$在$(-1,1)$上是增函数,则在$(-1,1)$上可设$f'(x)\ge 0.$

$\therefore f'(x)\geq 0\Leftrightarrow t\geq 3x^2-2x,$在区间$(-1,1)$上恒成立,考虑函数$g(x)=3x^2-2x,$

由于$g(x)$的图象是对称轴为$x=\dfrac{1}{3},$

开口向上的抛物线，故要使 $t\geq 3x^2-2x$ 在区间（－1，1）上恒成立

$\Leftrightarrow t\geq g(-1),$即$t\geq 5.$

而当$t\geq 5$时,$f'(x)$在$(-1,1)$上满足$f'(x)>0,$即$f(x)$在$(-1,1)$上是增函数.

故t的取值范围是$t\geq 5$.

解法 2：依定义 $f(x)=x^2(1-x)+t(x+1)=-x^3+x^2+tx+t,$

$f'(x)=-3x^2+2x+t.$

若$f(x)$在$(-1,1)$上是增函数,则在$(-1,1)$上可设$f'(x)\geq 0.$

$\because f'(x)$ 的图象是开口向下的抛物线，

$\therefore$当且仅当$f'(1)=t-1\geq 0,$且$f'(-1)=t-5\geq 0$时

$f'(x)$在$(-1,1)$上满足$f'(x)>0,$即$f(x)$在$(-1,1)$上是增函数.

故t的取值范围是$t\geq 5.$

18．本小题主要考查正弦定理、余弦定理等基础知识，同时考查利用三角公式进行恒等变形的技能和运算能力.

解法 1：设 E 为 BC 的中点，连接 DE，则 DE//AB，且 DE=$\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{2\sqrt{6}}{3},$设$BE=x,$

在△BDE 中利用余弦定理可得：

$BD^2=BE^2+ED^2-2BE\cdot ED\cos BED$，

$$5=x^2+\frac{8}{3}+2\times\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{6}x,$$

解得$x=1,x=-\dfrac{7}{3}$(舍去),

故$BC=2,$从而$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B=\dfrac{28}{3},$

即$AC=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$,

又$\sin B=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$,故$\dfrac{2}{\sin A}=\dfrac{\frac{2\sqrt{21}}{3}}{\frac{\sqrt{30}}{6}}$,$\sin A=\dfrac{\sqrt{70}}{14}$.

解法 2:

以 B 为坐标原点，$\overrightarrow{BC}$为x轴正向建立直角坐标系，且不妨设点 A 位于第一象限.

由$\sin B=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$,则$\overrightarrow{BA}=(\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\cos B,\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\sin B)=(\dfrac{4}{3},\dfrac{4\sqrt{5}}{3})$,

设$\overrightarrow{BC}=(x,0)$,则$\overrightarrow{BD}=(\dfrac{4+3x}{6},\dfrac{2\sqrt{5}}{3})$.

由条件得$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{(\dfrac{4+3x}{6})^2+(\dfrac{2\sqrt{5}}{3})^2}=\sqrt{5}$.

从而$x=2,x=-\dfrac{14}{3}$(舍去).

故$\overrightarrow{CA}=(-\dfrac{2}{3},\dfrac{4\sqrt{5}}{3})$,

于是$\cos A=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{CA}|}=\dfrac{-\frac{8}{9}+\frac{80}{9}}{\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{80}{9}}\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{80}{9}}}=\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$,

$\therefore\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{\sqrt{70}}{14}$.

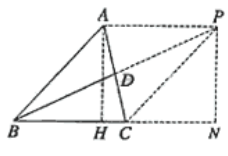
解法 3：过 A 作 AH⊥BC 交 BC 于 H，延长 BD 到 P 使 BD=DP，连接 AP、PC，

过 P 作 PN⊥BC 交 BC 的延长线于 N，则 HB=ABcosB=$\dfrac{4}{3}$,$AH=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$,

$BN=\sqrt{BP^2-PN^2}=\sqrt{BP^2-AH^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(\dfrac{4\sqrt{5}}{3})^2}=\dfrac{10}{3}$,而$CN=HB=\dfrac{4}{3}$,

$\therefore BC=BN-CN=2,HC=\dfrac{2}{3},AC=\sqrt{AH^2+HC^2}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$.

故由正弦定理得$\dfrac{2}{\sin A}=\dfrac{\frac{2\sqrt{21}}{3}}{\frac{\sqrt{30}}{6}}$,



$\therefore\sin A=\dfrac{\sqrt{70}}{14}$.

19．本小题主要考查随机变量的分布列和数学期望的概念和运算，以及运用概率统计的知识解决实际问题的能力.

解：ξ的取值分别为 1，2，3，4.

$\xi=1$，表明李明第一次参加驾照考试就通过了，故 P（$\xi=1$）=0.6.

$\xi=2$，表明李明在第一次考试未通过，第二次通过了，故

$$P(\xi=2)=(1-0.6)\times 0.7=0.28.$$

ξ=3，表明李明在第一、二次考试未通过，第三次通过了，故

$$P(\xi=3)=(1-0.6)\times(1-0.7)\times 0.8=0.096.$$

ξ=4，表明李明第一、二、三次考试都未通过，故

$$P(\xi=4)=(1-0.6)\times(1-0.7)\times(1-0.8)=0.024.$$

∴李明实际参加考试次数ξ的分布列为

ξ	1	2	3	4
P	0.6	0.28	0.096	0.024

∴ξ的期望 Eξ=1×0.6+2×0.28+3×0.096+4×0.024=1.544.

李明在一年内领到驾照的概率为

1－(1－0.6)(1－0.7)(1-0.8)(1－0.9)=0.9976.

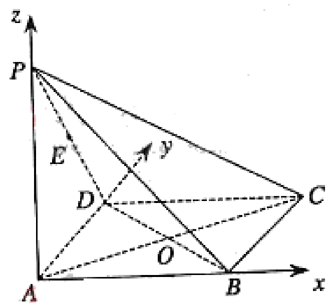
20.本小题主要考查线面关系和四棱锥等基础知识，同时考查空间想象能力和推理运算能力.

解法 1：（Ⅰ）建立如图所示的空间直角坐标系，

则 A、B、C、D、P、E 的坐标为 A（0，0，0）、

B（$\sqrt{3}$，0，0）、C（$\sqrt{3}$，1，0）、D（0，1，0）、

P（0，0，2）、E（0，$\frac{1}{2}$，1），



从而 $\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},1,0),\overrightarrow{PB}=(\sqrt{3},0,-2).$

设 $\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{PB}$ 的夹角为θ，则

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{PB}|}=\frac{3}{2\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{14},$$

∴AC 与 PB 所成角的余弦值为$\frac{3\sqrt{7}}{14}$.

（Ⅱ）由于 N 点在侧面 PAB 内，故可设 N 点坐标为（x，0，z），则

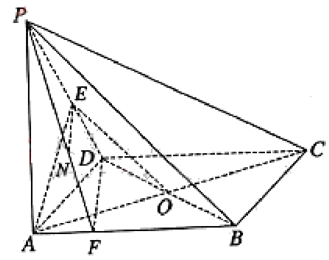
$\overrightarrow{NE}=(-x,\frac{1}{2},1-z)$，由 NE⊥面 PAC 可得，

$\begin{cases}\overrightarrow{NE}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\\ \overrightarrow{NE}\cdot\overrightarrow{AC}=0.\end{cases}$ 即$\begin{cases}(-x,\frac{1}{2},1-z)\cdot(0,0,2)=0,\\ (-x,\frac{1}{2},1-z)\cdot(\sqrt{3},1,0)=0.\end{cases}$化简得$\begin{cases}z-1=0,\\ -\sqrt{3}x+\frac{1}{2}=0.\end{cases}$ ∴$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{6}\\ z=1\end{cases}$

即 N 点的坐标为$(\dfrac{\sqrt{3}}{6},0,1)$，从而 N 点到 AB、AP 的距离分别为 1，$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

解法 2：（Ⅰ）设 AC∩BD=O，连 OE，则 OE//PB，

∴∠EOA 即为 AC 与 PB 所成的角或其补角.



在△AOE 中，AO=1，OE=$\dfrac{1}{2}PB=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$,

$$AE=\frac{1}{2}PD=\frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore \cos EOA=\frac{1+\frac{7}{4}-\frac{5}{4}}{2\times\frac{\sqrt{7}}{2}\times 1}=\frac{3\sqrt{7}}{14}.$$

即 AC 与 PB 所成角的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{7}}{14}$.

（Ⅱ）在面 ABCD 内过 D 作 AC 的垂线交 AB 于 F，则$\angle ADF=\dfrac{\pi}{6}$.

连 PF，则在 Rt△ADF 中$DF=\dfrac{AD}{\cos ADF}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, AF=AD\tan ADF=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

设 N 为 PF 的中点，连 NE，则 NE//DF，

∵DF⊥AC，DF⊥PA，∴DF⊥面 PAC，从而 NE⊥面 PAC.

∴N 点到 AB 的距离$=\dfrac{1}{2}AP=1$，N 点到 AP 的距离$=\dfrac{1}{2}AF=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

21．本小题主要考查直线、圆和椭圆等平面解析几何的基础知识以及推理运算能力和综合解决问题的能力.

（Ⅰ）解法 1：依题意，可设直线 AB 的方程为$y=k(x-1)+3$,代入$3x^2+y^2=\lambda$，整理得 $(k^2+3)x^2-2k(k-3)x+(k-3)^2-\lambda=0.$ ①

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则x_1,x_2是方程①的两个不同的根，

$\therefore \Delta=4[\lambda(k^2+3)-3(k-3)^2]>0,$ ②

且$x_1+x_2=\dfrac{2k(k-3)}{k^2+3}$,由 N（1，3）是线段 AB 的中点，得

$\dfrac{x_1+x_2}{2}=1,\qquad \therefore k(k-3)=k^2+3.$

解得 k=－1，代入②得，$\lambda > 12$,即λ的取值范围是（12，+∞）.

于是，直线 AB 的方程为$y-3=-(x-1)$,即$x+y-4=0$.

解法 2：设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则有

$$\begin{cases}3x_1^2+y_1^2=\lambda\\3x_2^2+y_2^2=\lambda\end{cases}\Rightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2)+(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0.$$

依题意，$x_1\neq x_2,\therefore k_{AB}=-\dfrac{3(x_1+x_2)}{y_1+y_2}$.

∵N（1，3）是 AB 的中点，　$\therefore x_1+x_2=2,y_1+y_2=6$,从而$k_{AB}=-1$.

又由 N（1，3）在椭圆内，$\therefore \lambda>3\times1^2+3^2=12$,

$\therefore\lambda$的取值范围是（12，+∞）.

直线 AB 的方程为 y－3=－（x－1），即 x+y－4=0.

（Ⅱ）解法 1：∵CD 垂直平分 AB，∴直线 CD 的方程为 y－3=x－1，即 x－y+2=0，

代入椭圆方程，整理得　$4x^2+4x+4-\lambda=0$.

又设$C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$,CD 的中点为$C(x_0,y_0)$,则x_3,x_4是方程③的两根，

$\therefore x_3+x_4=-1$,且$x_0=\dfrac{1}{2}(x_3+x_4)=-\dfrac{1}{2},y_0=x_0+2=\dfrac{3}{2}$,即$M(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2})$.

于是由弦长公式可得　$|CD|=\sqrt{1+(-\dfrac{1}{k})^2}\cdot|x_3-x_4|=\sqrt{2(\lambda-3)}$.　④

将直线 AB 的方程 x+y－4=0，代入椭圆方程得$4x^2-8x+16-\lambda=0$　⑤

同理可得　$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{2(\lambda-12)}$.　⑥

∵当$\lambda>12$时，$\sqrt{2(\lambda-3)}>\sqrt{2(\lambda-12)},\therefore|AB|<|CD|$

假设存在λ>12，使得 A、B、C、D 四点共圆，则 CD 必为圆的直径，点 M 为圆心.

点 M 到直线 AB 的距离为 $d=\dfrac{|x_0+y_0-4|}{\sqrt2}=\dfrac{|-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-4|}{\sqrt2}=\dfrac{3\sqrt2}{2}$.　⑦

于是，由④、⑥、⑦式和勾股定理可得

$|MA|^2=|MB|^2=d^2+|\dfrac{AB}{2}|^2=\dfrac{9}{2}+\dfrac{\lambda-12}{2}=\dfrac{\lambda-3}{2}=|\dfrac{CD}{2}|^2$.

故当λ>12 时，A、B、C、D 四点匀在以 M 为圆心，$\dfrac{|CD|}{2}$为半径的圆上.

（注：上述解法中最后一步可按如下解法获得：）

A、B、C、D 共圆$\Leftrightarrow$△ACD 为直角三角形，A 为直角$\Leftrightarrow$ $|AN|^2=|CN|\cdot|DN|$，

即 $(\frac{|AB|}{2})^2=(\frac{|CD|}{2}+d)(\frac{|CD|}{2}-d)$.　　⑧

由⑥式知，⑧式左边$=\frac{\lambda-12}{2}$,

由④和⑦知，⑧式右边$=(\frac{\sqrt{2(\lambda-3)}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2(\lambda-3)}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2})=\frac{\lambda-3}{2}-\frac{9}{2}=\frac{\lambda-12}{2}$,

∴⑧式成立，即 A、B、C、D 四点共圆.

解法 2：由（Ⅱ）解法 1 及 $\lambda>12$,

∵CD 垂直平分 AB，　∴直线 CD 方程为 $y-3=x-1$，代入椭圆方程，整理得

$4x^2+4x+4-\lambda=0.$　　③

将直线 AB 的方程 $x+y-4=0$，代入椭圆方程，整理得

$4x^2-8x+16-\lambda=0.$　　⑤

解③和⑤式可得　　$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{\lambda-12}}{2},x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{\lambda-3}}{2}.$

不妨设 $A(1+\frac{1}{2}\sqrt{\lambda-12},3-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda-12}),C(\frac{-1-\sqrt{\lambda-3}}{2},\frac{3-\sqrt{\lambda-3}}{2}),D(\frac{-1+\sqrt{\lambda-3}}{2},\frac{3+\sqrt{\lambda-3}}{2})$

$\therefore\overrightarrow{CA}=(\frac{3+\sqrt{\lambda-12}+\sqrt{\lambda-3}}{2},\frac{3+\sqrt{\lambda-3}-\sqrt{\lambda-12}}{2})$

$\overrightarrow{DA}=(\frac{3+\sqrt{\lambda-12}-\sqrt{\lambda-3}}{2},\frac{3-\sqrt{\lambda-3}-\sqrt{\lambda-12}}{2})$

计算可得 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DA}=0$，∴A 在以 CD 为直径的圆上.

又 B 为 A 关于 CD 的对称点，∴A、B、C、D 四点共圆.

（注：也可用勾股定理证明 AC⊥AD）

22．本小题主要考查数列、极限及不等式的综合应用以及归纳递推的思想.

（Ⅰ）证法 1：∵当 $n\geq 2$ 时，$0<a_n\leq\frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}},\therefore\frac{1}{a_n}\geq\frac{n+a_{n-1}}{na_{n-1}}=\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{n}$,

即 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\geq\frac{1}{n}$,

于是有　$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\geq\frac{1}{2},\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}\geq\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\geq\frac{1}{n}.$

所有不等式两边相加可得 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}\geq\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$

由已知不等式知，当 n≥3 时有，$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}>\frac{1}{2}[\log_2 n].$

$\because a_1=b,\therefore\frac{1}{a_n}>\frac{1}{b}+\frac{1}{2}[\log_2 n]=\frac{2+b[\log_2 n]}{2b}.\qquad a_n<\frac{2b}{2+b[\log_2 n]}.$

证法 2：设 $f(n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，首先利用数学归纳法证不等式

$a_n\leq\frac{b}{1+f(n)b},n=3,4,5,\cdots.$

（i）当 n=3 时， 由 $a_3\leq\frac{3a_2}{3+a_2}=\frac{3}{\frac{3}{a_2}+1}\leq\frac{3}{3\cdot\frac{2+a_1}{2a_1}+1}=\frac{b}{1+f(3)b}.$

知不等式成立.

（ii）假设当 n=k（k≥3）时，不等式成立，即 $a_k\leq\frac{b}{1+f(k)b},$

则 $a_{k+1}\leq\frac{(k+1)a_k}{(k+1)+a_k}=\frac{k+1}{\frac{(k+1)}{a_k}+1}\leq\frac{k+1}{(k+1)\cdot\frac{1+f(k)b}{b}+1}$

$$=\frac{(k+1)b}{(k+1)+(k+1)f(k)b+b}=\frac{b}{1+(f(k)+\frac{1}{k+1})b}=\frac{b}{1+f(k+1)b},$$

即当 n=k+1 时，不等式也成立.

由（i)、(ii）知，$a_n\leq\frac{b}{1+f(n)b},n=3,4,5,\cdots.$

又由已知不等式得 $a_n<\frac{b}{1+\frac{1}{2}[\log_2 n]b}=\frac{2b}{2+b[\log_2 n]},n=3,4,5,\cdots.$

（II）有极限，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.$

（III）$\because\frac{2b}{2+b[\log_2 n]}<\frac{2}{[\log_2 n]}$，令 $\frac{2}{[\log_2 n]}<\frac{1}{5},$

则有 $\log_2 n\geq[\log_2 n]>10,\Rightarrow n>2^{10}=1024,$

故取 N=1024，可使当 n>N 时，都有 $a_n < \frac{1}{5}$.