2012年普通高等学校招生统一考试数学天津

（理科）

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

（1）i是虚数单位，复数$\dfrac{7-i}{3+i}=$

（A） $2+\mathrm{i}$　　　　（B）$2-\mathrm{i}$

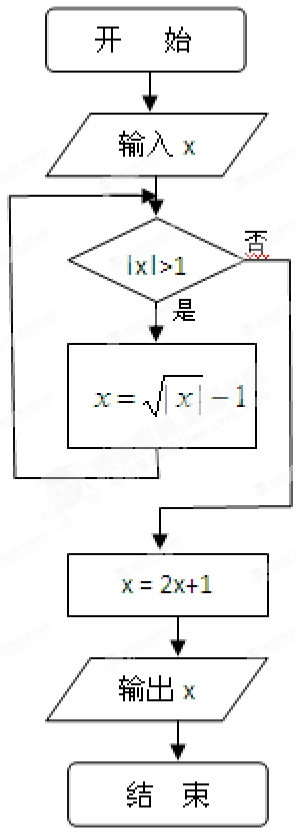
（C）$-2+\mathrm{i}$　　　　（D）$-2-\mathrm{i}$

（2）设$\varphi\in R$，则“$\varphi=0$”是“$f(x)=\cos(x+\varphi)(x\in R)$为偶函数”的

（A）充分而不必要条件　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分与不必要条件

（3）阅读右边的程序框图，运行相应的程序，当输入x的值为-25时，输出x的值为



（A）-1　　　　（B）1

（C）3　　　　（D）9

（4）函数$f(x)=2^x+x^3-2$在区间$(0,1)$内的零点个数是

（A）0　　　　（B）1

（C）2　　　　（D）3

（5）在$(2x^2-\dfrac{1}{x})^5$的二项展开式中，x的系数为

（A）10　　　　（B）-10

（C）40　　　　（D）-40

（6）在ΔABC中，内角A，B，C所对的边分别是a,b,c，已知8b=5c，C=2B，则cosC=

（A）$\dfrac{7}{25}$　　　　（B）$-\dfrac{7}{25}$

（C）$\pm\dfrac{7}{25}$　　　　（D）$\dfrac{24}{25}$

（7）已知ΔABC为等边三角形，AB=2，设点P，Q满足$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=(1-\lambda)\overrightarrow{AC}$

,

$\lambda \in R$，若 $\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CP} = \frac{3}{2}$，则 $\lambda =$

（A）$\frac{1}{2}$　　　　　　（B）$\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$

（C）$\frac{1 \pm \sqrt{10}}{2}$　　　　　（D）$\frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

（8）设 $m, n \in R$，若直线 $(m+1)x + (n+1)y - 2 = 0$ 与圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 相切，则 $m+n$ 的取值范围是

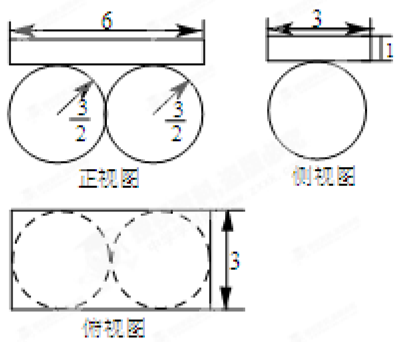
（A）$[1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}]$　　　　（B）$(-\infty, 1-\sqrt{3}] \cup [1+\sqrt{3}, +\infty)$

（C）$[2-2\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2}]$　　　　（D）$(-\infty, 2-2\sqrt{2}] \cup [2+2\sqrt{2}, +\infty)$

第II卷

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分.

（9）某地区有小学150所，中学75所，大学25所. 现采用分层抽样的方法从这些学校中抽取30所学校对学生进行视力调查，应从小学中抽取________所学校，中学中抽取________所学校.



（10）一个几何体的三视图如图所示（单位：m），则该几何体的体积为________ m^3.

（11）已知集合 $A = \{x \in R \| x+2| < 3\}$，集合 $B = \{x \in R \mid (x-m)(x-2) < 0\}$，且 $A \cap B = (-1, n)$，则 $m =$________，$n =$________.

（12）已知抛物线的参数方程为 $\begin{cases} x = 2pt^2, \\ y = 2pt \end{cases}$（t为参数），其中p>0，焦点为F，准线为 l. 过抛物线上一点M作 l 的垂线，垂足为E. 若|EF|=|MF|，点M的横坐标是3，则 $p =$________.

（13）如图，已知AB和AC是圆的两条弦，过点B作圆的切线与AC的延长线相交于点D. 过点C作BD的平行线与圆相交于点E，与AB相交于点F，AF=3，FB=1，EF=$\frac{3}{2}$，则线段CD的长为__________.

（14）已知函数 $y=\dfrac{|x^2-1|}{x-1}$ 的图象与函数 $y=kx-2$ 的图象恰有两个交点，则实数k的取值范围是__________.

三．解答题：本大题共6小题,共80分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（15）（本小题满分13分）

已知函数 $f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})+2\cos^2 x-1, x\in R.$

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}]$ 上的最大值和最小值.

（16）（本小题满分13分）

现有4个人去参加某娱乐活动，该活动有甲、乙两个游戏可供参加者选择.为增加趣味性，约定：每个人通过掷一枚质地均匀的骰子决定自己去参加哪个游戏，掷出点数为1或2的人去参加甲游戏，掷出点数大于2的人去参加乙游戏.

（Ⅰ）求这4个人中恰有2人去参加甲游戏的概率；

（Ⅱ）求这4个人中去参加甲游戏的人数大于去参加乙游戏的人数的概率；

（Ⅲ）用X，Y分别表示这4个人中去参加甲、乙游戏的人数，记 $\xi=|X-Y|$，求随机变量 ξ 的分布列与数学期望 $E\xi$.

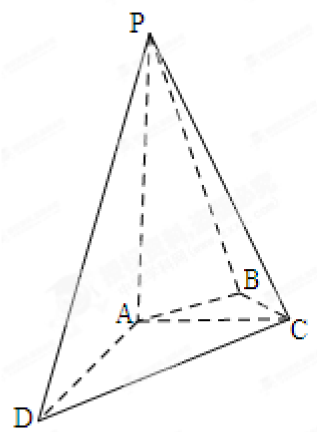
（17）（本小题满分13分）

如图，在四棱锥P-ABCD中，PA⊥平面ABCD，AC⊥AD，AB⊥BC，∠BAC=45°，PA=AD=2，AC=1.

（Ⅰ）证明PC⊥AD;

（Ⅱ）求二面角A-PC-D的正弦值；

（Ⅲ）设E为棱PA上的点，满足异面直线BE与CD所成的角为30°，求AE的长.



（18）（本小题满分13分）

已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，其前n项和为S_n，$\{b_n\}$ 是等比数列，且 $a_1=b_1=2, a_4+b_4=27$，$S_4-b_4=10$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）记$T_n=a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n$，$n\in N^*$，证明$T_n+12=-2a_n+10b_n$（$n\in N^*$
）.

（19）（本小题满分14分）

设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点分别为$A$，$B$，点$P$在椭圆上且异于$A$，$B$两点，$O$为坐标原点.

（Ⅰ）若直线AP与BP的斜率之积为$-\frac{1}{2}$，求椭圆的离心率；

（Ⅱ）若$|AP|=|OA|$，证明直线OP的斜率k满足$|k|>\sqrt{3}$

（20）（本小题满分14分）

已知函数$f(x)=x-\ln(x+a)$的最小值为0，其中$a>0$.

（Ⅰ）求a的值；

（Ⅱ）若对任意的$x\in[0,+\infty)$,有$f(x)\le kx^2$成立，求实数k的最小值；

（Ⅲ）证明$\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{2i-1}-\ln(2n+1)<2$（$n\in N^*$）.

试卷解析

【试卷总评】今年天津市高考理科数学试卷所涉及的考点较去年变化不大，试题难度较去年有一定的下滑，着重考查学生的基础知识的掌握以及推导、运算和数形结合的能力。有如下特点：1.2012年的数学试题考点与去年几乎相同，而仅有的几处不同的考点在2007-2010年也相继考过，明细如下： 零点存在定理（小题）——2009年、2010年 线线垂直——2007年 错位相减法——2007年， 解析几何之斜率问题（大题）。

2.2012年削弱了对数列的考察，小题不再涉及数列。而解答题18题是数列中极为传统的考法——求等差等比数列的通项公式与错位相减法;而在第20题的第三问继续考查数列不等式的内容。

3.三角函数解答题在2011年考查了正切函数的性质和运算，而今年则回归了以往的考查方式，考查了正余弦函数的性质。

4.加大了解析几何的难度，在考查题数不变的情况下，将直线和圆放在了选择压轴题的位置，椭圆大题放在第数第二题(第19题)的位置。

5.函数大题难度与去年基本持平。

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

（1）i是虚数单位，复数$\frac{7-i}{3+i}=$

（A） 2 + i （B）2 – i

（C）-2 + i （D）-2 – i

【答案】B

【解析】$\frac{7-i}{3+i}=\frac{(7-i)(3+i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{20-10i}{10}=2-i.$

【考点定位】本题考查复数运算，考查学生的基础知识和计算能力.

（2）设$\varphi\in R$,则“$\varphi=0$”是“$f(x)=\cos(x+\varphi)(x\in R)$为偶函数”的

（A）充分而不必要条件 （B）必要而不充分条件

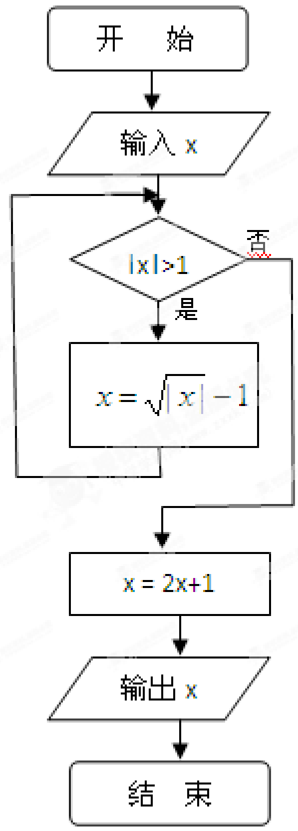
（C）充分必要条件 （D）既不充分与不必要条件

【答案】A

【解析】$\varphi=0, f(x)=\cos x, f(-x)=f(x), \therefore f(x)$ 为偶函数；若 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(0)=\pm1, \therefore \cos\varphi=\pm1, \therefore \varphi=k\pi(k\in Z)$, 故答案为 A.

【考点定位】本题考查函数为偶函数的性质和条件的判断，考查学生的逻辑思维能力.

(3) 阅读右边的程序框图，运行相应的程序，当输入x的值为-25时，输出x的值为



(A) -1　　(B) 1

(C) 3　　(D) 9

【答案】C

【解析】$x=|-25|>1, x=\sqrt{|-25|}-1=4; x=|4|>1, x=\sqrt{|4|}-1=1;$

$x=|1|>1$不成立，$\therefore x=2\times1+1=3.$

【考点定位】本题考查流程图，考查学生的分析问题的能力.

(4) 函数 $f(x)=2^x+x^3-2$ 在区间(0,1)内的零点个数是

(A) 0　　(B) 1

(C) 2　　(D) 3

【答案】B

【解析】$f'(x)=2^x\ln2+3x^2$, 在(0,1)上 $f'(x)>0$ 恒成立，所以 $f(x)$在(0,1)上单调递增;

$\because f(0)=-1<0, f(1)=1>0$, 故函数在区间(0,1)内的零点个数 1 个.

【考点定位】本题考查函数的单调性和函数的零点的判断，考查学生的分析判断能力.

(5) 在 $(2x^2-\frac{1}{x})^5$ 的二项展开式中，x 的系数为

(A) 10　　(B) -10

(C) 40　　(D) -40

【答案】D

【解析】$T_{r+1}=C_5^r(2x)^{5-r}(-\frac{1}{x})^r=(-1)^r2^{5-r}C_5^rx^{10-3r}$，

$\therefore 10-3r=1,\therefore r=3,\therefore(-1)^3 2^{5-3}C_5^3=-40.$

【考点定位】本题考查二项式定理求特殊项，考查学生的计算能力.

（6）在ΔABC中，内角A，B，C所对的边分别是a,b,c，已知8b=5c，C=2B，则cosC=

（A）$\frac{7}{25}$　　（B）$-\frac{7}{25}$

（C）$\pm\frac{7}{25}$　　（D）$\frac{24}{25}$

【答案】A

【解析】在ΔABC中,由正弦定理可知:

$\frac{\sin 2B}{\sin B}=\frac{c}{b}=\frac{8}{5},\therefore \cos B=\frac{4}{5},\therefore \cos C=\cos 2B=2\cos^2 B-1=\frac{7}{25}.$

【考点定位】本题考查解三角形，考查学生灵活应用正弦定理和二倍角公式的解题能力.

（7）已知ΔABC为等边三角形，AB=2，设点P，Q满足$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=(1-\lambda)\overrightarrow{AC}$

，

$\lambda\in R$，若$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=\frac{3}{2}$，则$\lambda=$

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$

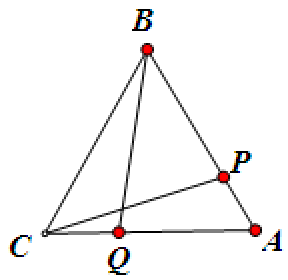
（C）$\frac{1\pm\sqrt{10}}{2}$　　（D）$\frac{-3\pm2\sqrt{2}}{2}$

【答案】A

【解析】设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b},\therefore|\vec{a}|=|\vec{b}|=2,$ 且 $<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\pi}{3},$

$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB}=(1-\lambda)\vec{b}-\vec{a},\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=\lambda\vec{a}-\vec{b},$

$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=[(1-\lambda)\vec{b}-\vec{a}]\cdot(\lambda\vec{a}-\vec{b})=-2\lambda^2+2\lambda-2=-\frac{3}{2},\therefore\lambda=\frac{1}{2}.$



【考点定位】本题考查向量的数量积和向量的减法运算，考查学生灵活应用数形结合思想的解题和字母的运算能力.

（8）设 $m,n\in R$，若直线 $(m+1)x+(n+1)y-2=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 相切，则

m + n的取值范围是

（A）$[1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}]$　　　（B）$(-\infty,1-\sqrt{3}]\cup[1+\sqrt{3},+\infty)$

（C）$[2-2\sqrt{2},2+2\sqrt{2}]$　　　（D）$(-\infty,2-2\sqrt{2}]\cup[2+2\sqrt{2},+\infty)$

【答案】D

【解析】直线与圆相切，则有

$\frac{|m+1+n+1-2|}{\sqrt{(m+1)^2+(n+1)^2}}=1,\therefore mn=m+n+1.$ 设 $m+n=t,\because mn\le(\frac{m+n}{2})^2=\frac{t^2}{4},$

$\therefore t+1\le\frac{t^2}{4},\therefore t^2-4t-4\ge0,\therefore t\in(-\infty,2-2\sqrt{2}]\cup[2+2\sqrt{2},+\infty)$

【考点定位】本题考查直线与圆的位置关系和均值不等式，考查学生的转化能力和换元法的应用.

第II卷

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分.

（9）某地区有小学150所，中学75所，大学25所.

现采用分层抽样的方法从这些学校中抽取30所学校

对学生进行视力调查，应从小学中抽取_________所

学校，中学中抽取________所学校.

【答案】18,9

【解析】学校共有 150+75+25=250，则小学中抽取

$\frac{150}{250}\times 30=18$; 中学中抽取 $\frac{75}{250}\times 30=9$.

【考点定位】本试题主要考查了统计中的分层抽样的概念以及样本获取的方法与计算.

（10）一个几何体的三视图如图所示（单位：m），则该几何体的体积为________m^3.

【答案】$18+9\pi$

【解析】由三视图可知，该几何体的顶部为正方体，其长、宽、高分别为 6,3,1，底部为两个直径为 3 的球，故该几何体的体积为 $6\times 3\times 1+\frac{4}{3}\pi\times(\frac{3}{2})^3=18+9\pi$.

【考点定位】本题考查三视图和几何体的体积，考查学生的空间想象能力和计算能力.

（11）已知集合 $A=\{x\in R\,||x+2|<3\}$，集合 $B=\{x\in R\,|\,(x-m)(x-2)<0\}$，且

$A\cap B=(-1,n)$，则m =__________，n =__________.

【答案】-1,1

【解析】$\because A=\{x\in R\,||x+2|<3\}=\{x|-5<x<1\}$，$B=\{x\in R|(x-m)(x-1)<0,\}$ 且

$A\cap B=(-1,n)$，$\therefore -1$是方程$(x-m)(x-1)=0$的根，故 $n=1, m=-1$.

【考点定位】本题考查绝对值不等式、二次不等式的解法，考查学生利用转化思想的解题能力.

（12）已知抛物线的参数方程为 $\begin{cases}x=2pt^2,\\ y=2pt\end{cases}$（t为参数），其中p>0，焦点为F，准线为$l$.

过抛物线上一点M作l的垂线，垂足为E. 若|EF|=|MF|，点M的横坐标是3，则p =________.

【答案】2

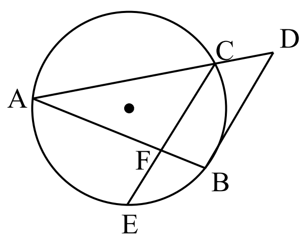
【解析】由抛物线的参数方程可知其普通方程为

$y^2=2px(p>0).\because |EF|=|MF|,|ME|=|MF|,\therefore \Delta MEF$ 为等边三角形，E的横坐标为

$-\frac{p}{2}$，$\therefore M$ 的横坐标为3，$\therefore \frac{3-\frac{p}{2}}{2}=\frac{p}{2}$，$\therefore p=2$.

【考点定位】本题考查抛物线的方程、定义和其几何性质，考查学生的转化能力和计算能力.

（13）如图，已知AB和AC是圆的两条弦，过点B作



圆的切线与AC的延长线相交于点D. 过点C作BD的

平行线与圆相交于点E，与AB相交于点F，AF=3，

FB=1，EF=$\dfrac{3}{2}$，则线段CD的长为____________.

【答案】$\dfrac{4}{3}$

【解析】在圆中，利用相交弦定理可知，

$AF\cdot FB=EF\cdot FC,\therefore FC=\dfrac{AF\cdot FB}{EF}=2,\because \dfrac{FC}{BD}=\dfrac{AF}{AB},\therefore BD=\dfrac{FC\cdot AB}{AF}=\dfrac{8}{3}.$

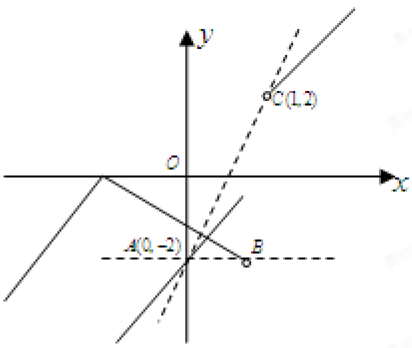
由切割线定理可知：$BD^2=DC\cdot DA,\because DA=4CD,\therefore 4DC^2=DB^2=\dfrac{64}{9},\therefore DC=\dfrac{4}{3}.$

【考点定位】本题考查几何证明问题如相交弦定理、三角形相似、切割线定理等，考查学生的分析转化能力.

（14）已知函数 $y=\dfrac{|x^2-1|}{x-1}$ 的图象与函数 $y=kx-2$ 的图象恰有两个交点，则实数k的取值范围是_________.

【答案】$(0,1)\cup(1,4)$

【解析】$y=\dfrac{|x^2-1|}{x-1}=\dfrac{|x+1||x-1|}{x-1}=\begin{cases}x+1,x>1,\\-|x+1|,x<1,\end{cases}$ 函数 $y=kx-2$ 过定点（0，-2），由数形结合：



$k_{AB}<k<1$或$1<k<k_{AC},\therefore 0<k<1$或$1<k<4.$

【考点定位】本题考查函数的图像和性质，考查学生画图、识图以及利用图像解决问题的能

三．解答题：本大题共6小题,共80分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（15）（本小题满分13分）

已知函数 $f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})+2\cos^2 x-1,x\in R.$

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ 上的最大值和最小值.

解析：（1） $f(x)=\sin 2x\bullet\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2x\bullet\sin\frac{\pi}{3}+\sin 2x\bullet\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{3}+\cos 2x$

$=\sin 2x+\cos 2x$

$=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$

所以， $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$

（2）因为 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{8}]$ 上是增函数，在区间 $[\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4}]$ 上是减函数，

又 $f(-\frac{\pi}{4})=-1$， $f(\frac{\pi}{8})=\sqrt{2}$， $f(\frac{\pi}{4})=1$，

故函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ 上的最大值为 $\sqrt{2}$，最小值为-1.

【考点定位】本小题主要考查两角和与差的正弦公式、二倍角的余弦公式、三角函数的最小正周期、单调性等基础知识，考查基本运算能力.本题考查了两角和差的正弦公式、二倍角公式，三角函数的最小正周期、单调性等基础知识，考查基本运算能力和划归能力. 该试题关键在于将已知的函数表达式化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的数学模型，再根据此三角模型的图像与性质进行解题即可.

（16）（本小题满分13分）

现有4个人去参加某娱乐活动，该活动有甲、乙两个游戏可供参加者选择.为增加趣味性，约定：每个人通过掷一枚质地均匀的骰子决定自己去参加哪个游戏，掷出点数为1或2的人去参加甲游戏，掷出点数大于2的人去参加乙游戏.

（Ⅰ）求这4个人中恰有2人去参加甲游戏的概率；

（Ⅱ）求这4个人中去参加甲游戏的人数大于去参加乙游戏的人数的概率；

（Ⅲ）用X，Y分别表示这4个人中去参加甲、乙游戏的人数，记 $\xi=|X-Y|$，求随机变量 ξ 的分布列与数学期望 $E\xi$.

【解析】依题意，这4个人中，每个人去参加甲游戏的概率为 $\frac{1}{3}$，去参加乙游戏的概率为 $\frac{2}{3}$.

设“这4个人中恰有i人去参加甲游戏”为事件 $A_i\ (i=0,1,2,3,4)$

则 $P(A_i)=C_4^i(\frac{1}{3})^i(\frac{2}{3})^{4-i}$.

（1）这 4 个人中恰有 2 人去参加甲游戏的概率

$P(A_2)=C_4^2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2=\frac{8}{27}$

（2）设“这 4 个人中去参加甲游戏的人数大于去参加乙游戏的人数”为事件 B，则

$B=A_3\cup A_4$.

由于 A_3与A_4互斥，故 P(B) =P(A_3)+P(A_4) $=C_4^3(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})+C_4^4(\frac{1}{3})^4=\frac{1}{9}$

所以，这个人中去参加甲游戏的人数大于去参加乙游戏的人数的概率为$\frac{1}{9}$.

（3）ξ的所有可能取值为 0,2,4.

由于 A_1与A_3互斥，A_0与A_4互斥，故

$P(\xi=0)=P(A_2)=\frac{8}{27}$

$P(\xi=2)=P(A_1)+P(A_3)=\frac{40}{81}$

$P(\xi=4)=P(A_0)+P(A_4)=\frac{17}{81}$

所以ξ的分布列是

ξ	0	2	4
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{17}{81}$

随机变量ξ的数学期望 $E(\xi)=0\times\frac{7}{28}+2\times\frac{40}{81}+4\times\frac{17}{81}=\frac{148}{81}$.

【考点定位】本小题主要考查古典概型及其概率计算公式、互斥事件、事件的相互独立性、离散型随机变量的分布列与数学期望等基础知识，考查运用概率知识解决简单实际问题的能力. 应用性问题是高考命题的一个重要考点，近年来都通过概率问题来考查，且常考常新，对于此类考题，要注意认真审题，从数学与实际生活两个角度来理解问题的实质，将问题成功转化为古典概型，独立事件、互斥事件等概率模型求解，因此对概率型应用性问题，理解是基础，转化是关键.

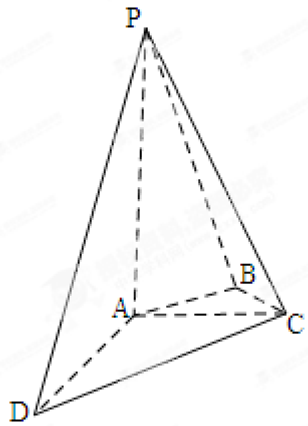
（17）（本小题满分13分）

如图，在四棱锥P-ABCD中，PA⊥平面ABCD，AC⊥AD，AB⊥BC，∠BAC=45°，PA=AD=2，AC=1.

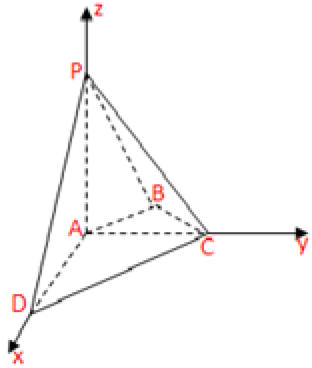
（Ⅰ）证明PC⊥AD;

（Ⅱ）求二面角A-PC-D的正弦值;

（Ⅲ）设E为棱PA上的点，满足异面直线BE与CD所成的角为30°，求AE的长.



【解析】解法一：如图，以点 A 为原点建立空间直角坐标系，依题意得 A(0,0,0)，D(2,0,0),C(0,1,0), $B(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$,P（0,0,2）.



（1）证明：易得 $\overrightarrow{PC}=(0,1,-2)$， $\overrightarrow{AD}=(2,0,0)$

于是 $\overrightarrow{PC}\bullet\overrightarrow{AD}=0$,所以 $PC\perp AD$

(2) $\overrightarrow{PC}=(0,1,-2)$, $\overrightarrow{CD}=(2,-1,0)$

设平面 PCD 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\bullet\overrightarrow{PC}=0\\ \vec{n}\bullet\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}y-2z=0\\ 2x-y=0\end{cases}$,不防设 $z=1$，

可得 $\vec{n}=(1,2,1)$.

可取平面 PAC 的法向量 $\vec{m}=(1,0,0)$

于是 $\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\bullet\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$

从而 $\sin<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\sqrt{30}}{6}$.

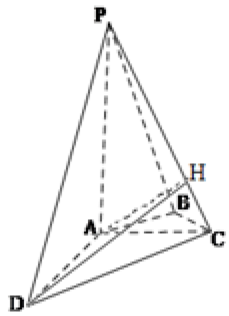
所以二面角 A-PC-D 的正弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{6}$.

（3）设点 E 的坐标为（0,0，h)，其中 $h\in[0,2]$，由此得 $\overrightarrow{BE}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},h)$.

由 $\overrightarrow{CD}=(2,-1,0)$，故 $\cos<\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CD}>=\frac{\overrightarrow{BE}\bullet\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{BE}||\overrightarrow{CD}|}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}+h^2}\times\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{10+20h^2}}$

所以，$\frac{3}{\sqrt{10+20h^2}}=\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $h=\frac{\sqrt{10}}{10}$, 即 $AE=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

解法二：（1）证明：由 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，可得 $PA\perp AD$，



又由 $AD\perp AC$, $PA\cap AC=A$,故 $AD\perp$ 平面 PAC .

又 $PC\subset$ 平面 PAC ,所以 $PC\perp AD$.

(2)如图，作 $AH\perp PC$ 于点 H，连接 DH.

由 $PC \perp AD$，$PC \perp AH$，可得 $PC \perp$ 平面ADH．

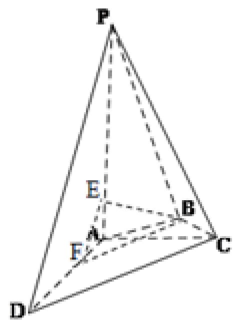
因此 $DH \perp PC$，从而 $\angle AHD$ 为二面角 A-PC-D 的平面角．

在 $Rt\Delta PAC$ 中，$PA=2, AC=1$，由此得 $AH=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

由（1）知 $AD \perp AH$，故在 $Rt\Delta DAH$ 中，$DH=\sqrt{AD^2+AH^2}=\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$

因此 $\sin\angle AHD=\dfrac{AD}{DH}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

所以二面角 $A-PC-D$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$．



（3）如图，因为 $\angle ADC<45^0$，故过点 B 作 CD 的平行线必与线段 AD 相交，设交点为 F，连接 BE，EF．故 $\angle EBF$ 或其补角为异面直线 BE 与 CD 所成的角．

由于 BF∥CD，故 $\angle AFB=\angle ADC$．在 $Rt\Delta DAC$ 中，

$CD=\sqrt{5}, \sin\angle ADC=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，

故 $\sin\angle AFB=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

在 ΔAFB 中，由 $\dfrac{BF}{\sin\angle FAB}=\dfrac{AB}{\sin\angle AFB}$，$AB=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\angle FAB=\sin 135^0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

可得 $BF=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$．

由余弦定理，$BF^2=AB^2+AF^2-2AB\bullet AF\bullet\cos\angle FAB$，

所以 $AE=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$．

【考点定位】本小题主要考查空间两条直线的位置关系、二面角、异面直线所成德角、直线与平面垂直等基础知识.考查用空间向量解决立体几何问题的方法，考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力.试题从命题的角度来看，整体上题目与我们平时练习的试题相似，但底面是非特殊的四边形，一直线垂直于底面的四棱锥问题，那么创新的地方就是第三问中点E的位置是不确定的，需要学生根据已知条件进行确定，如此说来就有难度，因此

最好使用空间直角坐标系解决该问题为好.

（18）（本小题满分13分）

已知$\{a_n\}$是等差数列，其前n项和为S_n，$\{b_n\}$是等比数列，且$a_1=b_1=2, a_4+b_4=27$，$S_4-b_4=10$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）记$T_n=a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n$，$n\in N^*$，证明$T_n+12=-2a_n+10b_n$（$n\in N^*$）.

【解析】(1) 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q.

由$a_1=b_1=2$，得$a_4=2+3d$，$b_4=2q^3$，$S_4=8+6d$.

由条件，得方程组$\begin{cases}2+3d+2q^3=27\\8+6d-2q^3=10\end{cases}$，解得$\begin{cases}d=3\\q=2\end{cases}$

所以$a_n=3n-1$，$b_n=2^n$，$n\in N^*$.

(2) 证明：(方法一)

由 (1) 得

$$T_n=2a_n+2^2a_{n-1}+2^3a_{n-2}+\cdots+2^na_1 \quad ①$$

$$2T_n=2^2a_n+2^3a_{n-1}+\cdots+2^na_2+2^{n+1}a_1 \quad ②$$

由②-①得

$$T_n=-2(3n-1)+3\times2^2+3\times2^3+\cdots+3\times2^n+2^{n+2}$$

$$=\frac{12(1-2^{n-1})}{1-2}+2^{n+2}-6n+2$$

$$=10\times2^n-6n-10$$

而$-2a_n+10b_n-12=-2(3n-1)+10\times2^n-12=10\times2^n-6n-10$

故$T_n+12=-2a_n+10b_n$，$n\in N^*$

(方法二：数学归纳法)

① 当 n=1 时，$T_1+12=a_1b_1+12=16$，$-2a_1+10b_1=16$，故等式成立.

② 假设当 n=k 时等式成立，即$T_k+12=-2a_k+10b_k$，则当 n=k+1 时，有：

$$T_{k+1}=a_{k+1}b_1+a_kb_2+a_{k-1}b_3+\cdots+a_1b_{k+1}$$

$$=a_{k+1}b_1+q(a_kb_1+a_{k-1}b_2+\cdots+a_1b_k)$$

$$=a_{k+1}b_1+qT_k$$

$$=a_{k+1}b_1+q(-2a_k+10b_k-12)$$

$$=2a_{k+1}-4(a_{k+1}-3)+10b$$

$$=-2a_{k+1}+10b_{k+1}-12$$

即$T_{k+1}+12=-2a_{k+1}+10b_{k+1}$，

由①和②，可知对任意$n\in N^*$

【考点定位】本小题主要考查等
求和等基础知识.考查化归与转
较直接，没有什么隐含的条件，
用错位相减法求解证明，也可用
选拔性的原则。

（19）（本小题满分14分）

设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点分别

为 A，B，点 P 在椭圆上且异于 A，B 两点，O 为坐标原点.

（Ⅰ）若直线 AP 与 BP 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$，求椭圆的离心率；

（Ⅱ）若 $|AP|=|OA|$，证明直线 OP 的斜率 k 满足 $|k|>\sqrt{3}$

【解析】(1)解：设点 P 的坐标为 (x_0,y_0).由题意，有 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$ ①

由 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，得 $k_{AP}=\frac{y_0}{x_0+a}$，$k_{BP}=\frac{y_0}{x_0-a}$

由 $k_{AP}k_{BP}=-\frac{1}{2}$，可得 $x_0{}^2=a^2-2y_0{}^2$，代入①并整理得 $(a^2-2b^2)y_0^2=0$

由于 $y_0\neq 0$，故 $a^2=2b^2$.于是 $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$，所以椭圆的离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$

（2）证明：（方法一）

依题意，直线 OP 的方程为 $y=kx$，设点 P 的坐标为 (x_0,y_0).

由条件得 $\begin{cases} y_0=kx_0 \\ \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \end{cases}$ 消去 y_0 并整理得 $x_0=\frac{a^2b^2}{k^2a^2+b^2}$ ②

由 $|AP|=|OA|$，$A(-a,0)$ 及

得 $(x_0+a)^2+k^2x_0^2=a^2$.

整理得 $(1+k^2)x_0{}^2+2ax_0=0$

整理得 $(1+k^2)^2=4k^2(\frac{a}{b})^2+$

由 $a>b>0$，故 $(1+k^2)^2>$

所以 $|k|>\sqrt{3}$.

(方法二)

依题意，直线 OP 的方程为 y

由 P 在椭圆上，有 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{k^2x_0^2}{b^2}$

因为 $a>b>0$，$kx_0\neq 0$，所

由 $|AP|=|OA|$，$A(-a,0)$，

于是 $x_0=\frac{-2a}{1+k^2}$，代入③，

整理得 $(1+k^2)\frac{4a^2}{(1+k^2)}<a^2$

解得 $k^2>3$，

所以 $|k|>\sqrt{3}$.

【考点定位】本小题主要考查

离公式等基础知识.考查用代

考查运算求解能力、综合分析

（20）（本小题满分14分）

已知函数 $f(x)=x-\ln(x+a)$ 的最小值为0，其中 $a>0$.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）若对任意的 $x\in[0,+\infty)$, 有 $f(x)\le kx^2$ 成立，求实数 k 的最小值；

（Ⅲ）证明 $\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{2i-1}-\ln(2n+1)<2$（$n\in N^*$）.

【解析】(1)解： $f(x)$ 的定义域为 $(-a,+\infty)$

$f'(x)=1-\frac{1}{x+a}=\frac{x+a-1}{x+a}$

由 $f'(x)=0$，得 $x=1-a>-a$

当 x 变化时， $f'(x)$， $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-a,1-a)$	$1-a$	$(1-a,+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↓	极小值	↑

因此， $f(x)$ 在 $x=1-a$ 处取得最小值，故由题意 $f(1-a)=1-a=0$，所以 $a=1$

（2）解：当 $k\le 0$ 时，取 $x=1$，有 $f(1)=1-\ln 2>0$，故 $k\le 0$ 时不合题意.当 $k>0$ 时，

令 $g(x)=f(x)-kx^2$，即 $g(x)=x-\ln(x+1)-kx^2$

$g'(x)=\dfrac{x}{x+1}-2kx=\dfrac{-x[2kx-(1-2k)]}{x+1}$

令 $g'(x)=0$，得 $x_1=0, x_2=\dfrac{1-2k}{2k}>-1$

①当 $k\ge\dfrac{1}{2}$ 时，$\dfrac{1-2k}{2k}\le 0$，$g'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立。因此 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减.从而对于任意的 $x\in[0,+\infty)$，总有 $g(x)\le g(0)=0$，即 $f(x)\le kx^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，故 $k\ge\dfrac{1}{2}$ 符合题意.

②当 $0<k<\dfrac{1}{2}$ 时，$\dfrac{1-2k}{2k}>0$，对于 $x\in(0,\dfrac{1-2k}{2k})$，$g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $(0,\dfrac{1-2k}{2k})$ 上单调递增.因此当取 $x\in(0,\dfrac{1-2k}{2k})$ 时，$g(x_0)>g(0)=0$，即 $f(x)\le kx_0^{\ 2}$ 不成立.

故 $0<k<\dfrac{1}{2}$ 不合题意.

综上，k 的最小值为 $\dfrac{1}{2}$.

（3）证明：当 n=1 时，不等式左边=$2-\ln 3<2$=右边，所以不等式成立.

当 $n\ge 2$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\dfrac{2}{2i-1})=\sum\limits_{i=1}^{n}[\dfrac{2}{2i-1}-\ln(1+\dfrac{2}{2i-1})]$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{2i-1}-\sum_{i=1}^{n}[\ln(2i+1)-\ln(2i-1)]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{2i-1}-\ln(2n+1)$$

在（2）中取 $k=\frac{1}{2}$，得 $f(x)\le\frac{x^2}{2}\quad(x\ge 0)$，

从而 $f(\frac{2}{2i-1})\le\frac{2}{(2i-1)^2}<\frac{2}{(2i-3)(2i-1)}\ (i\in N^*,i\ge 2)$

所以有 $\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{2i-1}-\ln(2n+1)$

$$=\sum_{i=1}^{n}f(\frac{2}{2i-1})$$

$$=f(2)+\sum_{i=2}^{n}f(\frac{2}{2i-1})$$

$$<2-\ln 3+\sum_{i=2}^{n}\frac{2}{(2i-3)(2i-1)}$$

$$=2-\ln 3+\sum_{i=2}^{n}(\frac{1}{2i-3}-\frac{1}{2i-1})$$

$$=2-\ln 3+1-\frac{1}{2n-1}<2$$

综上，$\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{2i-1}-\ln(2n+1)<2$，$n\in N^*$

【考点定位】本小题主要考查导数的运算，利用导数研究函数的单调性，不等式基础知识．考查函数思想、分类讨论思想．考查综合分析和解决问题的能力．试题分为三问，题面比较简单，给出的函数比较常规，因此入手对于同学们来说没有难度，第二问中，解含参数的不等式时，要注意题中参数的讨论所有的限制条件，从而做到不重不漏；第三问中，证明不等式，应借助于导数证不等式的方法进行．