

2010 年辽宁高考理科数学真题及答案

第 I 卷

一、选择墨：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，

- (1) 已知 A, B 均为集合 $U=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 的子集，且 $A \cap B = \{3\}$, $(\complement_U B) \cap A = \{9\}$, 则 A =
 (A) $\{1, 3\}$ (B) $\{3, 7, 9\}$ (C) $\{3, 5, 9\}$ (D) $\{3, 9\}$

- (2) 设 a, b 为实数，若复数 $\frac{1+2i}{a+bi} = 1+i$, 则

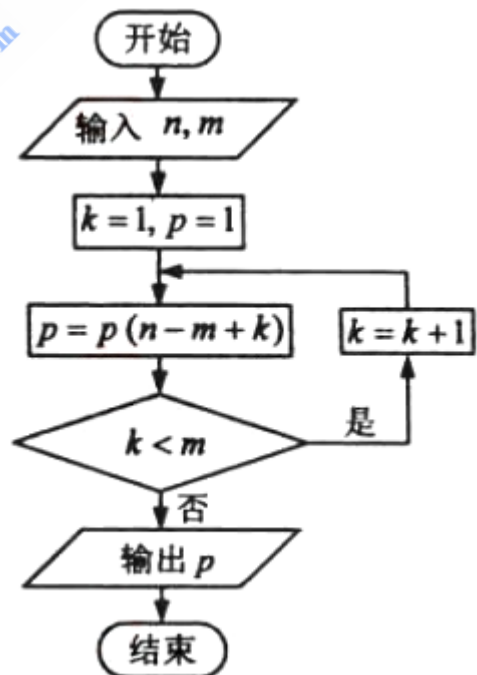
- (A) $a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$ (B) $a = 3, b = 1$
 (C) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$ (D) $a = 1, b = 3$

- (3) 两个实习生每人加工一个零件. 加工为一等品的概率分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{4}$, 两个零件是否加工为一等品相互独立, 则这两个零件中恰有一个一等品的概率为

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{6}$

- (4) 如果执行右面的程序框图, 输入正整数 n, m, 满足 $n \geq m$, 那么输出的 P 等于

- (A) C_n^{m-1}
 (B) A_n^{m-1}
 (C) C_n^m
 (D) A_n^m



- (5) 设 $\omega > 0$, 函数 $y = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3}) + 2$ 的图像向右平移 $\frac{4\pi}{3}$ 个单位后与原图像重合, 则 ω 的最小值是

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) 3

- (6) 设 $\{a_n\}$ 是有正数组成的等比数列, S_n 为其前 n 项和. 已知 $a_2 a_4 = 1$, $S_3 = 7$, 则 $S_5 =$

- (A) $\frac{15}{2}$ (B) $\frac{31}{4}$ (C) $\frac{33}{4}$ (D) $\frac{17}{2}$

(7) 设抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 F, 准线为 l, P 为抛物线上一点, $PA \perp l$, A 为垂足. 如

果直线 AF 的斜率为 $-\sqrt{3}$, 那么 $|PF| =$

- (A) $4\sqrt{3}$ (B) 8 (C) $8\sqrt{3}$ (D) 16

(8) 平面上 O, A, B 三点不共线, 设 $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b$, 则 $\triangle OAB$ 的面积等于

- (A) $\sqrt{|a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2}$ (B) $\sqrt{|a|^2|b|^2 + (a \cdot b)^2}$
 (C) $\frac{1}{2}\sqrt{|a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2}$ (D) $\frac{1}{2}\sqrt{|a|^2|b|^2 + (a \cdot b)^2}$

(9) 设双曲线的一个焦点为 F; 虚轴的一个端点为 B, 如果直线 FB 与该双曲线的一条渐近线垂直, 那么此双曲线的离心率为

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

(10) 已知点 P 在曲线 $y = \frac{4}{e^x + 1}$ 上, a 为曲线在点 P 处的切线的倾斜角, 则 a 的取值范围是

- (A) $[0, \frac{\pi}{4})$ (B) $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ (C) $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$ (D) $[\frac{3\pi}{4}, \pi)$

(11) 已知 $a > 0$, 则 x_0 满足关于 x 的方程 $ax=6$ 的充要条件是

- (A) $\exists x \in R, \frac{1}{2}ax^2 - bx \geq \frac{1}{2}ax_0^2 - bx_0$ (B) $\exists x \in R, \frac{1}{2}ax^2 - bx \leq \frac{1}{2}ax_0^2 - bx_0$
 (C) $\forall x \in R, \frac{1}{2}ax^2 - bx \geq \frac{1}{2}ax_0^2 - bx_0$ (D) $\forall x \in R, \frac{1}{2}ax^2 - bx \leq \frac{1}{2}ax_0^2 - bx_0$

(12) (12) 有四根长都为 2 的直铁条, 若再选两根长都为 a 的直铁条, 使这六根铁条端点处相连能够焊接成一个三棱锥形的铁架, 则 a 的取值范围是

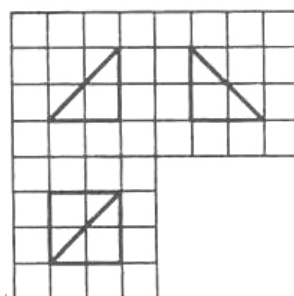
- (A) $(0, \sqrt{6} + \sqrt{2})$ (B) $(1, 2\sqrt{2})$
 (C) $(\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{2})$ (D) $(0, 2\sqrt{2})$

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分。

(13) $(1+x+x^2)(x-\frac{1}{x})^6$ 的展开式中的常数项为_____.

(14) 已知 $-1 < x+y < 4$ 且 $2 < x-y < 3$, 则 $z = 2x-3y$ 的取值范围是_____ (答案用区间表示)

(15) 如图, 网格纸的小正方形的边长是 1, 在其上用粗线画出了某多面体的三视图, 则这个多面体最长的一条棱的长为_____.



(16) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 33, a_{n+1} - a_n = 2n$, 则 $\frac{a_n}{n}$ 的最小值为_____.

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

(17) (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边, 且

$$2a \sin A = (2a + c) \sin B + (2c + b) \sin C.$$

- (I) 求 A 的大小;
- (II) 求 $\sin B + \sin C$ 的最大值.

(18) (本小题满分 12 分)

为了比较注射 A, B 两种药物后产生的皮肤疱疹的面积, 选 200 只家兔做试验, 将这 200 只家兔随机地分成两组, 每组 100 只, 其中一组注射药物 A, 另一组注射药物 B.

- (I) 甲、乙是 200 只家兔中的 2 只, 求甲、乙分在不同组的概率;
- (II) 下表 1 和表 2 分别是注射药物 A 和 B 后的试验结果. (疱疹面积单位: mm^2)

表 1: 注射药物 A 后皮肤疱疹面积的频数分布表

疱疹面积	[60,65)	[65,70)	[70,75)	[75,80)
频数	30	40	20	10

表 2: 注射药物 B 后皮肤疱疹面积的频数分布表

疱疹面积	[60,65)	[65,70)	[70,75)	[75,80)	[80,85)
频数	10	25	20	30	15

(i) 完成下面频率分布直方图, 并比较注射两种药物后疱疹面积的中位数大小;

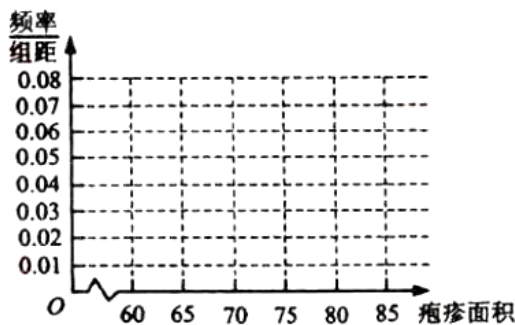


图 I 注射药物 A 后皮肤疱疹面积的频率分布直方图

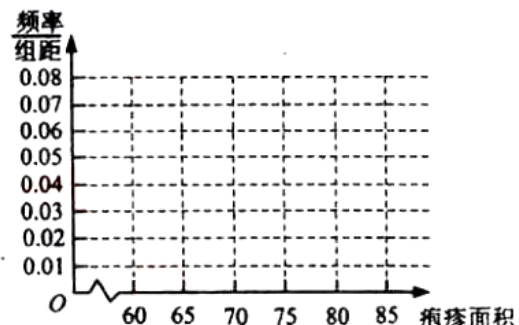


图 II 注射药物 B 后皮肤疱疹面积的频率分布直方图

(ii) 完成下面 2×2 列联表, 并回答能否有 99.9% 的把握认为“注射药物 A 后的疱疹面积与注射药物 B 后的疱疹面积有差异”.

表 3:

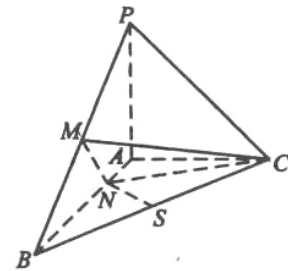
	疱疹面积小于 70mm^2	疱疹面积不小于 70mm^2	合计
注射药物 A	$a =$	$b =$	
注射药物 B	$c =$	$d =$	
合计			$n =$

附:
$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

(19) (本小题满分 12 分)

已知三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp ABC$, $AB \perp AC$, $PA=AC=\frac{1}{2}AB$, N 为 AB 上一点, $AB=4AN$, M, S 分别为 PB, BC 的中点.

- (I) 证明: $CM \perp SN$;
 (II) 求 SN 与平面 CMN 所成角的大小.



(20) (本小题满分 12 分)

设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 过点 F 的直线与椭圆 C 相交于 A, B

两点, 直线 l 的倾斜角为 60° , $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$.

- (I) 求椭圆 C 的离心率;
 (II) 如果 $|AB| = \frac{15}{4}$, 求椭圆 C 的方程.

(21) (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (a+1)\ln x + ax^2 + 1$

- (I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(II) 设 $a < -1$. 如果对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $|f(x_1) - f(x_2)| \geq 4|x_1 - x_2|$, 求 a 的取值范围。

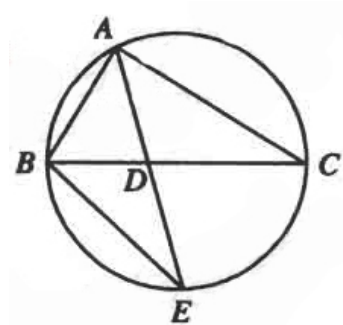
请考生在第 (22)、(23)、(24) 三题中任选一题作答, 如果多做, 则按所作的最后一题记分。作答时用 2B 铅笔在答题卡上吧所选题目对应题号下方的方框涂黑。

(22) (本小题满分 10 分) 选修 4-1: 几何证明选讲

如图, $\triangle ABC$ 的角平分线 AD 的延长线交它的外接圆于点 E

(I) 证明: $\triangle ABE \sim \triangle ADC$

(II) 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} AD \cdot AE$, 求 $\angle BAC$ 的大小。



(23) (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

已知 P 为半圆 $C: \begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数, $0 \leq \theta \leq \pi$) 上的点, 点 A 的坐标为 $(1, 0)$,

O 为坐标原点, 点 M 在射线 OP 上, 线段 OM 与 C 的弧 \widehat{AP} 的长度均为 $\frac{\pi}{3}$ 。

(I) 以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 求点 M 的极坐标;

(II) 求直线 AM 的参数方程。

(24) (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知 a, b, c 均为正数, 证明: $a^2 + b^2 + c^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \geq 6\sqrt{3}$, 并确定 a, b, c 为何值时, 等号成立。

参考答案

一、选择题

- (1) D (2) A (3) B (4) D (5) C (6) B
 (7) B (8) C (9) D (10) D (11) C (12) A

二、填空题

- (13) -5 (14) (3, 8) (15) $2\sqrt{3}$ (16) $\frac{21}{2}$

(17) 解:

(I) 由已知, 根据正弦定理得 $2a^2 = (2b+c)b + (2c+b)c$

即 $a^2 = b^2 + c^2 + bc$

由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

故 $\cos A = -\frac{1}{2}$, $A=120^\circ$ 6分

(II) 由 (I) 得:

$$\sin B + \sin C = \sin B + \sin(60^\circ - B)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B \\ &= \sin(60^\circ + B) \end{aligned}$$

故当 $B=30^\circ$ 时, $\sin B + \sin C$ 取得最大值 1。12分

(18) 解:

(I) 甲、乙两只家兔分在不同组的概率为

$$P = \frac{2C_{198}^{99}}{C_{200}^{100}} = \frac{100}{199}$$
4分

(II) (i)

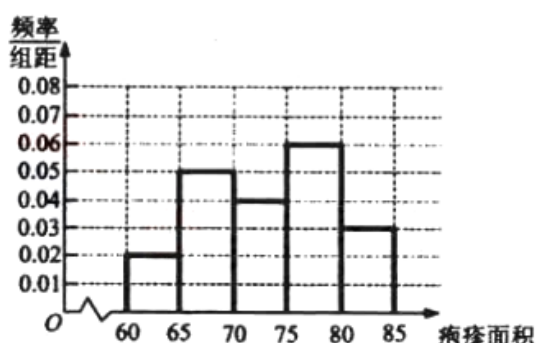
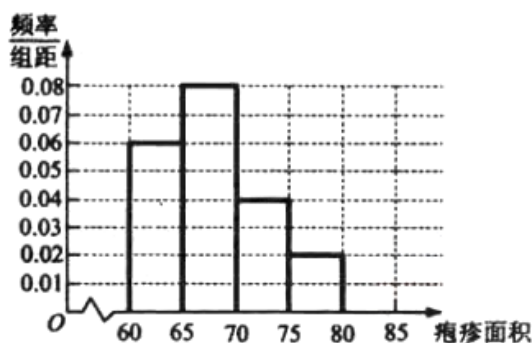


图 I 注射药物 A 后皮肤疱疹面积的频率分布直方图

图 II 注射药物 B 后皮肤疱疹面积的频率分布直方图

可以看出注射药物 A 后的疱疹面积的中位数在 65 至 70 之间, 而注射药物 B 后的疱疹面积的中位数在 70 至 75 之间, 所以注射药物 A 后疱疹面积的中位数小于注射药物 B 后疱疹面积的中位数。8分

(ii) 表 3:

	疱疹面积小于 70mm^2	疱疹面积不小于 70mm^2	合计
注射药物 A	$a = 70$	$b = 30$	100
注射药物 B	$c = 35$	$d = 65$	100
合计	105	95	$n = 200$

$$K^2 = \frac{200 \times (70 \times 65 - 35 \times 30)^2}{100 \times 100 \times 105 \times 95} \approx 24.56$$

由于 $K^2 > 10.828$, 所以有 99.9% 的把握认为“注射药物 A 后的疱疹面积于注射药物 B 后的疱疹面积有差异”。

(19) 证明:

设 $PA=1$, 以 A 为原点, 射线 AB, AC, AP 分别为 x, y, z 轴正向建立空间直角坐标系如图.

则 $P(0, 0, 1), C(0, 1, 0), B(2, 0, 0), M(1, 0, \frac{1}{2}), N(\frac{1}{2}, 0, 0), S(1, \frac{1}{2}, 0)$. ……4 分

(I) $\overrightarrow{CM} = (1, -1, \frac{1}{2}), \overrightarrow{SN} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$,

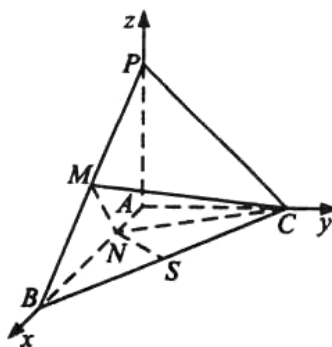
因为 $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{SN} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 0$,

所以 $CM \perp SN$. ……6 分

(II) $\overrightarrow{NC} = (-\frac{1}{2}, 1, 0)$,

设 $\alpha = (x, y, z)$ 为平面 CMN 的一个法向量,

$$\text{则 } \begin{cases} x - y + \frac{1}{2}z = 0, \\ -\frac{1}{2}x + y = 0. \end{cases} \text{ 令 } x = 2, \text{ 得 } \alpha = (2, 1, -2).$$



……9 分

因为 $|\cos \langle \alpha, \overrightarrow{SN} \rangle| = \frac{\left| -1 - \frac{1}{2} \right|}{\left| 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 SN 与平面 CMN 所成角为 45° .

……12 分

(20) 解:

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由题意知 $y_1 < 0$, $y_2 > 0$.

(I) 直线 l 的方程为 $y = \sqrt{3}(x-c)$, 其中 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

$$\text{联立} \begin{cases} y = \sqrt{3}(x-c), \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \text{得 } (3a^2 + b^2)y^2 + 2\sqrt{3}b^2cy - 3b^4 = 0.$$

$$\text{解得 } y_1 = \frac{-\sqrt{3}b^2(c+2a)}{3a^2+b^2}, \quad y_2 = \frac{-\sqrt{3}b^2(c-2a)}{3a^2+b^2}.$$

因为 $\overline{AF} = 2\overline{FB}$, 所以 $-y_1 = 2y_2$.

$$\text{即 } \frac{\sqrt{3}b^2(c+2a)}{3a^2+b^2} = 2 \cdot \frac{-\sqrt{3}b^2(c-2a)}{3a^2+b^2}.$$

$$\text{得离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}.$$

……6分

(II) 因为 $|AB| = \sqrt{1 + \frac{1}{3}}|y_2 - y_1|$, 所以 $\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4\sqrt{3}ab^2}{3a^2+b^2} = \frac{15}{4}$.

由 $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$ 得 $b = \frac{\sqrt{5}}{3}a$. 所以 $\frac{5}{4}a = \frac{15}{4}$, 得 $a = 3$, $b = \sqrt{5}$.

椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

……12分

(21) 解:

(I) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$. $f'(x) = \frac{a+1}{x} + 2ax = \frac{2ax^2 + a+1}{x}$.

当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调增加;

当 $a \leq -1$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调减少;

当 $-1 < a < 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \sqrt{-\frac{a+1}{2a}}$. 则当 $x \in (0, \sqrt{-\frac{a+1}{2a}})$ 时, $f'(x) > 0$;
 $x \in (\sqrt{-\frac{a+1}{2a}}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$. 故 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{-\frac{a+1}{2a}})$ 单调增加, 在 $(\sqrt{-\frac{a+1}{2a}}, +\infty)$ 单

调减少.

……5分

(II) 不妨假设 $x_1 \geq x_2$. 而 $a < -1$, 由 (I) 知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调减少, 从而

$$\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty), |f(x_1) - f(x_2)| \geq 4|x_1 - x_2|$$

等价于

$$\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty), f(x_2) + 4x_2 \geq f(x_1) + 4x_1. \quad \textcircled{1}$$

令 $g(x) = f(x) + 4x$, 则 $g'(x) = \frac{a+1}{x} + 2ax + 4$.

①等价于 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调减少, 即

$$\frac{a+1}{x} + 2ax + 4 \leq 0.$$

从而 $a \leq \frac{-4x-1}{2x^2+1} = \frac{(2x-1)^2 - 4x^2 - 2}{2x^2+1} = \frac{(2x-1)^2}{2x^2+1} - 2$.

故 a 的取值范围为 $(-\infty, -2]$.

……12分

(22) 证明:

(I) 由已知条件, 可得 $\angle BAE = \angle CAD$.

因为 $\angle AEB$ 与 $\angle ACB$ 是同弧上的圆周角, 所以 $\angle AEB = \angle ACD$.

故 $\triangle ABE \sim \triangle ADC$.

……5分

(II) 因为 $\triangle ABE \sim \triangle ADC$, 所以 $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$, 即 $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

又 $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle BAC$, 且 $S = \frac{1}{2} AD \cdot AE$, 故 $AB \cdot AC \sin \angle BAC = AD \cdot AE$.

则 $\sin \angle BAC = 1$, 又 $\angle BAC$ 为三角形内角, 所以 $\angle BAC = 90^\circ$.

……10分

(23) 解:

(I) 由已知, M 点的极角为 $\frac{\pi}{3}$, 且 M 点的极径等于 $\frac{\pi}{3}$,

故点 M 的极坐标为 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$.

……5分

(II) M 点的直角坐标为 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}\pi}{6})$, $A(1, 0)$, 故直线 AM 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + (\frac{\pi}{6} - 1)t, \\ y = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}t, \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$

……10分

(24) 证明:

(证法一)

因为 a, b, c 均为正数, 由平均值不等式得

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(abc)^{\frac{2}{3}}, \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3(abc)^{-\frac{1}{3}},$$

所以 $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})^2 \geq 9(abc)^{-\frac{2}{3}}$. ②6分

$$\text{故 } a^2 + b^2 + c^2 + (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})^2 \geq 3(abc)^{\frac{2}{3}} + 9(abc)^{-\frac{2}{3}}.$$

$$\text{又 } 3(abc)^{\frac{2}{3}} + 9(abc)^{-\frac{2}{3}} \geq 2\sqrt{27} = 6\sqrt{3}, \quad \textcircled{3}$$

所以原不等式成立.8分

当且仅当 $a = b = c$ 时, ①式和②式等号成立. 当且仅当 $3(abc)^{\frac{2}{3}} = 9(abc)^{-\frac{2}{3}}$ 时, ③式等号成立.

即当且仅当 $a = b = c = 3^{\frac{1}{4}}$ 时, 原式等号成立.10分

(证法二)

因为 a, b, c 均为正数, 由基本不等式得

$$a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

$$b^2 + c^2 \geq 2bc,$$

$$c^2 + a^2 \geq 2ac.$$

所以 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ ①

同理 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}$ ②6分

$$\begin{aligned} \text{故 } a^2 + b^2 + c^2 + (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})^2 &\geq ab + bc + ac + 3\frac{1}{ab} + 3\frac{1}{bc} + 3\frac{1}{ac} \\ &\geq 6\sqrt{3}. \end{aligned} \quad \textcircled{3}$$

所以原不等式成立.8分

当且仅当 $a = b = c$ 时, ①式和②式等号成立, 当且仅当 $a = b = c, (ab)^2 = (bc)^2 = (ac)^2 = 3$ 时, ③式等号成立.

即当且仅当 $a = b = c = 3^{\frac{1}{4}}$ 时, 原式等号成立.10分