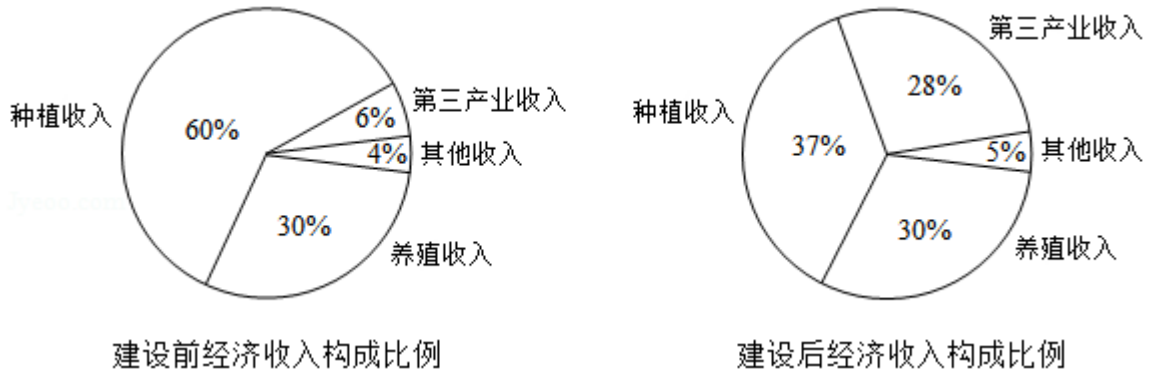


力.

3. (5分) 某地区经过一年的新农村建设, 农村的经济收入增加了一倍, 实现翻番. 为更好地了解该地区农村的经济收入变化情况, 统计了该地区新农村建设前后农村的经济收入构成比例, 得到如下饼图:



则下面结论中不正确的是 ()

- A. 新农村建设后, 种植收入减少
- B. 新农村建设后, 其他收入增加了一倍以上
- C. 新农村建设后, 养殖收入增加了一倍
- D. 新农村建设后, 养殖收入与第三产业收入的总和超过了经济收入的一半

【考点】 2K: 命题的真假判断与应用; CS: 概率的应用.

【专题】 11: 计算题; 35: 转化思想; 49: 综合法; 51: 概率与统计; 5L: 简易逻辑.

【分析】 设建设前经济收入为 a , 建设后经济收入为 $2a$. 通过选项逐一分析新农村建设前后, 经济收入情况, 利用数据推出结果.

【解答】 解: 设建设前经济收入为 a , 建设后经济收入为 $2a$.

A项, 种植收入 $37\% \times 2a - 60\%a = 14\%a > 0$,

故建设后, 种植收入增加, 故A项错误.

B项, 建设后, 其他收入为 $5\% \times 2a = 10\%a$,

建设前, 其他收入为 $4\%a$,

故 $10\%a \div 4\%a = 2.5 > 2$,

故B项正确.

C项, 建设后, 养殖收入为 $30\% \times 2a = 60\%a$,

建设前, 养殖收入为 $30\%a$,

故 $60\%a \div 30\%a = 2$,

故C项正确.

D项, 建设后, 养殖收入与第三产业收入总和为

$$(30\% + 28\%) \times 2a = 58\% \times 2a,$$

经济收入为 $2a$,

故 $(58\% \times 2a) \div 2a = 58\% > 50\%$,

故D项正确.

因为是选择不正确的一项,

故选: A.

【点评】 本题主要考查事件与概率, 概率的应用, 命题的真假的判断, 考查发现问题解决问题的能力.

4. (5分) 已知椭圆C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的一个焦点为 $(2, 0)$, 则C的离心率为 ()

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【考点】 K4: 椭圆的性质.

【专题】 11: 计算题; 35: 转化思想; 49: 综合法; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 利用椭圆的焦点坐标, 求出 a , 然后求解椭圆的离心率即可.

【解答】 解: 椭圆C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的一个焦点为 $(2, 0)$,

可得 $a^2 - 4 = 4$, 解得 $a = 2\sqrt{2}$,

$\therefore c = 2$,

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故选：C.

【点评】本题考查椭圆的简单性质的应用，考查计算能力.

5. (5分) 已知圆柱的上、下底面的中心分别为 O_1 , O_2 , 过直线 O_1O_2 的平面截该圆柱所得的截面是面积为8的正方形, 则该圆柱的表面积为 ()
- A. $12\sqrt{2}\pi$ B. 12π C. $8\sqrt{2}\pi$ D. 10π

【考点】LE: 棱柱、棱锥、棱台的侧面积和表面积.

【专题】11: 计算题; 35: 转化思想; 49: 综合法; 5F: 空间位置关系与距离

【分析】利用圆柱的截面是面积为8的正方形, 求出圆柱的底面直径与高, 然后求解圆柱的表面积.

【解答】解: 设圆柱的底面直径为 $2R$, 则高为 $2R$,

圆柱的上、下底面的中心分别为 O_1 , O_2 ,

过直线 O_1O_2 的平面截该圆柱所得的截面是面积为8的正方形,

可得: $4R^2=8$, 解得 $R=\sqrt{2}$,

则该圆柱的表面积为: $\pi \cdot (\sqrt{2})^2 \times 2 + 2\sqrt{2}\pi \times 2\sqrt{2} = 12\pi$.

故选：B.

【点评】本题考查圆柱的表面积的求法, 考查圆柱的结构特征, 截面的性质, 是基本知识的考查.

6. (5分) 设函数 $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + ax$. 若 $f(x)$ 为奇函数, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 ()
- A. $y = -2x$ B. $y = -x$ C. $y = 2x$ D. $y = x$

【考点】6H: 利用导数研究曲线上某点切线方程.

【专题】11: 计算题; 35: 转化思想; 49: 综合法; 53: 导数的综合应用.

【分析】利用函数的奇偶性求出 a , 求出函数的导数, 求出切线的向量然后求解切线方程.

【解答】解：函数 $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + ax$ ，若 $f(x)$ 为奇函数，
 可得 $a=1$ ，所以函数 $f(x) = x^3 + x$ ，可得 $f'(x) = 3x^2 + 1$ ，
 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线的斜率为：1，
 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为： $y=x$ 。
 故选：D.

【点评】本题考查函数的奇偶性以及函数的切线方程的求法，考查计算能力.

7. (5分) 在 $\triangle ABC$ 中，AD为BC边上的中线，E为AD的中点，则 $\overrightarrow{EB} =$ ()

- A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

【考点】9H：平面向量的基本定理.

【专题】34：方程思想；41：向量法；5A：平面向量及应用.

【分析】运用向量的加减运算和向量中点的表示，计算可得所求向量.

【解答】解：在 $\triangle ABC$ 中，AD为BC边上的中线，E为AD的中点，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EB} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}, \end{aligned}$$

故选：A.

【点评】本题考查向量的加减运算和向量中点表示，考查运算能力，属于基础题.

8. (5分) 已知函数 $f(x) = 2\cos^2x - \sin^2x + 2$ ，则 ()

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π ，最大值为3
 B. $f(x)$ 的最小正周期为 π ，最大值为4
 C. $f(x)$ 的最小正周期为 2π ，最大值为3
 D. $f(x)$ 的最小正周期为 2π ，最大值为4

【考点】H1：三角函数的周期性.

【专题】35：转化思想；56：三角函数的求值；57：三角函数的图像与性质.

【分析】首先通过三角函数关系式的恒等变换，把函数的关系式变形为余弦型函数，进一步利用余弦函数的性质求出结果.

【解答】解：函数 $f(x) = 2\cos^2x - \sin^2x + 2$,

$$= 2\cos^2x - \sin^2x + 2\sin^2x + 2\cos^2x,$$

$$= 4\cos^2x + \sin^2x,$$

$$= 3\cos^2x + 1,$$

$$= 3 \cdot \frac{\cos 2x + 1}{2} + 1,$$

$$= \frac{3\cos 2x}{2} + \frac{5}{2},$$

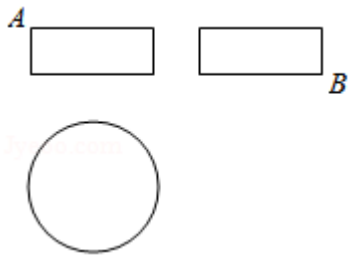
故函数的最小正周期为 π ,

$$\text{函数的最大值为 } \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4,$$

故选：B.

【点评】本题考查的知识要点：三角函数关系式的恒等变换，余弦型函数的性质的应用.

9. (5分) 某圆柱的高为2，底面周长为16，其三视图如图. 圆柱表面上的点M在正视图上的对应点为A，圆柱表面上的点N在左视图上的对应点为B，则在此圆柱侧面上，从M到N的路径中，最短路径的长度为 ()



A. $2\sqrt{17}$

B. $2\sqrt{5}$

C. 3

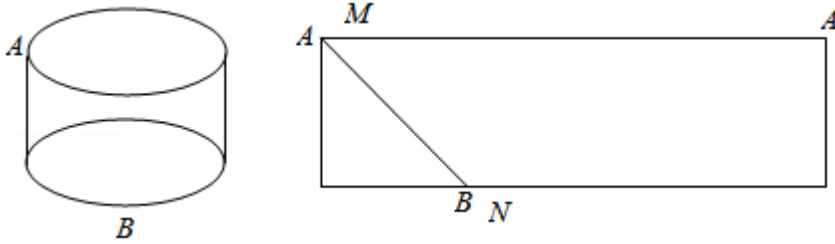
D. 2

【考点】L1：由三视图求面积、体积.

【专题】11：计算题；31：数形结合；49：综合法；5F：空间位置关系与距离.

【分析】判断三视图对应的几何体的形状，利用侧面展开图，转化求解即可.

【解答】解：由题意可知几何体是圆柱，底面周长16，高为：2，
直观图以及侧面展开图如图：



圆柱表面上的点N在左视图上的对应点为B，则在此圆柱侧面上，从M到N的路径中，最短路径的长度： $\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.

故选：B.

【点评】本题考查三视图与几何体的直观图的关系，侧面展开图的应用，考查计算能力.

10. (5分) 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=BC=2$ ， AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 30° ，则该长方体的体积为 ()

- A. 8 B. $6\sqrt{2}$ C. $8\sqrt{2}$ D. $8\sqrt{3}$

【考点】MI：直线与平面所成的角.

【专题】11：计算题；31：数形结合；35：转化思想；49：综合法；5F：空间位置关系与距离.

【分析】画出图形，利用已知条件求出长方体的高，然后求解长方体的体积即可.

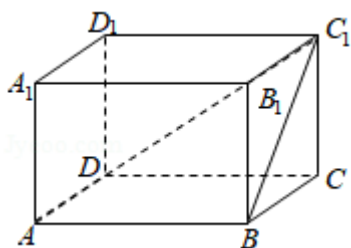
【解答】解：长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=BC=2$ ， AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 30° ，

$$\text{即 } \angle AC_1B = 30^\circ, \text{ 可得 } BC_1 = \frac{AB}{\tan 30^\circ} = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{可得 } BB_1 = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{所以该长方体的体积为： } 2 \times 2 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$$

故选：C.



【点评】 本题考查长方体的体积的求法，直线与平面所成角的求法，考查计算能力.

11. (5分) 已知角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边上有两点 $A(1, a)$ ， $B(2, b)$ ，且 $\cos 2\alpha = \frac{2}{3}$ ，则 $|a - b| = (\quad)$
- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. 1

【考点】 G9: 任意角的三角函数的定义; GS: 二倍角的三角函数.

【专题】 11: 计算题; 35: 转化思想; 4R: 转化法; 56: 三角函数的求值.

【分析】 推导出 $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2}{3}$ ，从而 $|\cos\alpha| = \frac{\sqrt{30}}{6}$ ，进而 $|\tan\alpha| = \left| \frac{b-a}{2-1} \right| = |a - b| = \frac{\sqrt{5}}{5}$. 由此能求出结果.

【解答】 解: \because 角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边上有两点 $A(1, a)$ ， $B(2, b)$ ，且 $\cos 2\alpha = \frac{2}{3}$,

$$\therefore \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2}{3}, \text{ 解得 } \cos^2\alpha = \frac{5}{6},$$

$$\therefore |\cos\alpha| = \frac{\sqrt{30}}{6}, \therefore |\sin\alpha| = \sqrt{1 - \frac{30}{36}} = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

$$|\tan\alpha| = \left| \frac{b-a}{2-1} \right| = |a - b| = \frac{|\sin\alpha|}{|\cos\alpha|} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{\frac{\sqrt{30}}{6}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

故选: B.

【点评】 本题考查两数差的绝对值的求法，考查二倍角公式、直线的斜率等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是中档题.

12. (5分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, 则满足 $f(x+1) < f(2x)$ 的 x 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -1]$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-1, 0)$ D. $(-\infty, 0)$

【考点】 5B: 分段函数的应用.

【专题】 11: 计算题; 31: 数形结合; 49: 综合法; 51: 函数的性质及应用.

【分析】 画出函数的图象, 利用函数的单调性列出不等式转化求解即可.

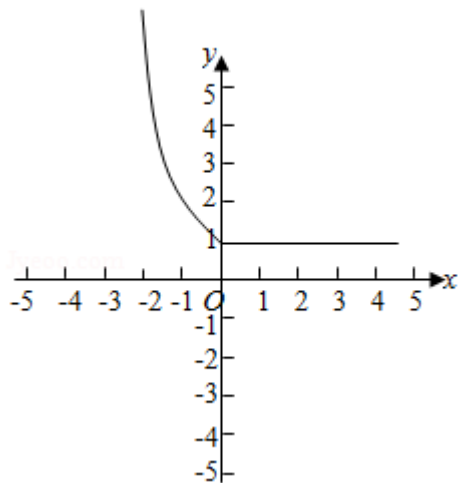
【解答】 解: 函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, 的图象如图:

满足 $f(x+1) < f(2x)$,

可得: $2x < 0 < x+1$ 或 $2x < x+1 \leq 0$,

解得 $x \in (-\infty, 0)$.

故选: D.



【点评】 本题考查分段函数的应用, 函数的单调性以及不等式的解法, 考查计算能力.

二、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分.

13. (5分) 已知函数 $f(x) = \log_2(x^2+a)$, 若 $f(3) = 1$, 则 $a = \underline{-7}$.

【考点】 3T: 函数的值; 53: 函数的零点与方程根的关系.

【专题】 11: 计算题; 33: 函数思想; 49: 综合法; 51: 函数的性质及应用.

【分析】 直接利用函数的解析式, 求解函数值即可.

【解答】 解: 函数 $f(x) = \log_2(x^2+a)$, 若 $f(3) = 1$,

可得: $\log_2(9+a) = 1$, 可得 $a = -7$.

故答案为: -7 .

【点评】 本题考查函数的解析式的应用, 函数的领导与方程根的关系, 是基本知识的考查.

14. (5分) 若 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} x-2y-2 \leq 0 \\ x-y+1 \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$
, 则 $z=3x+2y$ 的最大值为 6.

【考点】 7C: 简单线性规划.

【专题】 31: 数形结合; 4R: 转化法; 59: 不等式的解法及应用.

【分析】 作出不等式组对应的平面区域, 利用目标函数的几何意义进行求解即可.

【解答】 解: 作出不等式组对应的平面区域如图:

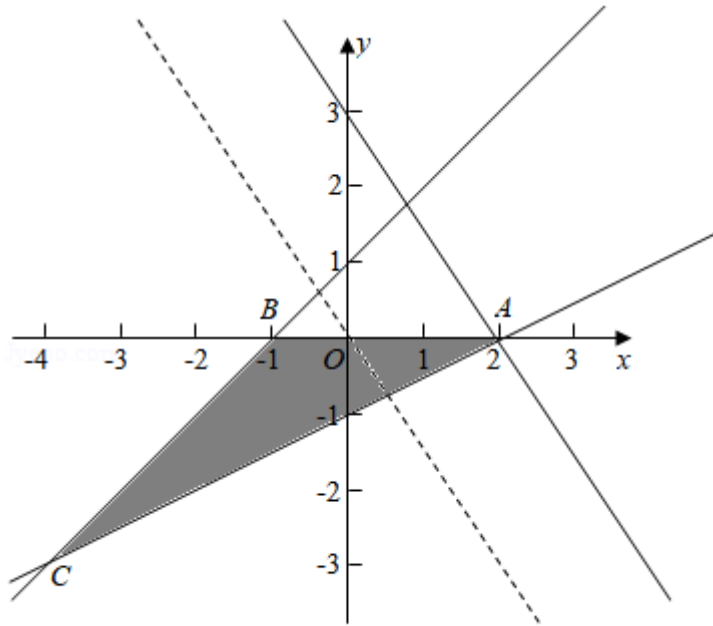
由 $z=3x+2y$ 得 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}z$,

平移直线 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}z$,

由图象知当直线 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}z$ 经过点 $A(2, 0)$ 时, 直线的截距最大, 此时 z 最大

,
最大值为 $z=3 \times 2=6$,

故答案为: 6



【点评】 本题主要考查线性规划的应用，利用目标函数的几何意义以及数形结合是解决本题的关键.

15. (5分) 直线 $y=x+1$ 与圆 $x^2+y^2+2y-3=0$ 交于A, B两点, 则 $|AB|=\underline{2\sqrt{2}}$.

【考点】 J9: 直线与圆的位置关系.

【专题】 11: 计算题; 34: 方程思想; 49: 综合法; 5B: 直线与圆.

【分析】 求出圆的圆心与半径, 通过点到直线的距离以及半径、半弦长的关系, 求解即可.

【解答】 解: 圆 $x^2+y^2+2y-3=0$ 的圆心 $(0, -1)$, 半径为: 2,

圆心到直线的距离为: $\frac{|0+1+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,

所以 $|AB|=2\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$.

故答案为: $2\sqrt{2}$.

【点评】 本题考查直线与圆的位置关系的应用, 弦长的求法, 考查计算能力.

16. (5分) $\triangle ABC$ 的内角A, B, C的对边分别为a, b, c. 已知 $b\sin C+c\sin B=4a\sin$

$B\sin C$, $b^2+c^2-a^2=8$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 $\underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$.

【考点】HP：正弦定理；HR：余弦定理.

【专题】35：转化思想；56：三角函数的求值；58：解三角形.

【分析】直接利用正弦定理求出A的值，进一步利用余弦定理求出bc的值，最后求出三角形的面积.

【解答】解：△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c.

$$b\sin C + c\sin B = 4a\sin B\sin C,$$

利用正弦定理可得 $\sin B\sin C + \sin C\sin B = 4\sin A\sin B\sin C$,

由于 $0 < B < \pi$, $0 < C < \pi$,

所以 $\sin B\sin C \neq 0$,

$$\text{所以 } \sin A = \frac{1}{2},$$

$$\text{则 } A = \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \frac{5\pi}{6}$$

由于 $b^2 + c^2 - a^2 = 8$,

$$\text{则: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\text{①当 } A = \frac{\pi}{6} \text{ 时, } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{2bc},$$

$$\text{解得 } bc = \frac{8\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{②当 } A = \frac{5\pi}{6} \text{ 时, } -\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{2bc},$$

$$\text{解得 } bc = -\frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ (不合题意), 舍去.}$$

$$\text{故: } S_{\triangle ABC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

【点评】本体考察的知识要点：三角函数关系式的恒等变换，正弦定理和余弦定理的应用及三角形面积公式的应用.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要

求作答。（一）必考题：共60分。

17. （12分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ ， $na_{n+1}=2(n+1)a_n$ ，设 $b_n=\frac{a_n}{n}$ 。

- (1) 求 b_1, b_2, b_3 ;
- (2) 判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列，并说明理由;
- (3) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【考点】87：等比数列的性质；8E：数列的求和；8H：数列递推式.

【专题】35：转化思想；54：等差数列与等比数列.

【分析】（1）直接利用已知条件求出数列的各项.

（2）利用定义说明数列为等比数列.

（3）利用（1）（2）的结论，直接求出数列的通项公式.

【解答】解：（1）数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ ， $na_{n+1}=2(n+1)a_n$,

$$\text{则: } \frac{\frac{a_{n+1}}{n+1}}{\frac{a_n}{n}} = 2 \text{ (常数),}$$

$$\text{由于 } b_n = \frac{a_n}{n},$$

$$\text{故: } \frac{b_{n+1}}{b_n} = 2,$$

数列 $\{b_n\}$ 是以 b_1 为首项，2为公比的等比数列.

$$\text{整理得: } b_n = b_1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1},$$

所以: $b_1=1, b_2=2, b_3=4$.

（2）数列 $\{b_n\}$ 是为等比数列，

$$\text{由于 } \frac{b_{n+1}}{b_n} = 2 \text{ (常数);}$$

（3）由（1）得: $b_n = 2^{n-1}$,

$$\text{根据 } b_n = \frac{a_n}{n},$$

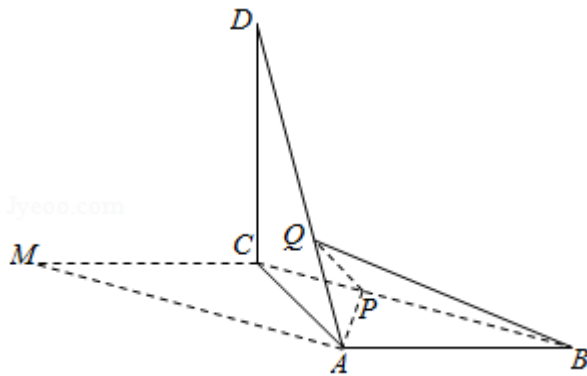
所以: $a_n = n \cdot 2^{n-1}$.

【点评】 本题考查的知识要点：数列的通项公式的求法及应用.

18. (12分) 如图, 在平行四边形ABCM中, $AB=AC=3$, $\angle ACM=90^\circ$, 以AC为折痕将 $\triangle ACM$ 折起, 使点M到达点D的位置, 且 $AB\perp DA$.

(1) 证明: 平面 $ACD\perp$ 平面ABC;

(2) Q为线段AD上一点, P为线段BC上一点, 且 $BP=DQ=\frac{2}{3}DA$, 求三棱锥Q-ABP的体积.



【考点】 LF: 棱柱、棱锥、棱台的体积; LY: 平面与平面垂直.

【专题】 35: 转化思想; 49: 综合法; 5F: 空间位置关系与距离.

【分析】 (1) 可得 $AB\perp AC$, $AB\perp DA$. 且 $AD\cap AC=A$, 即可得 $AB\perp$ 面ADC, 平面 $ACD\perp$ 平面ABC;

(2) 首先证明 $DC\perp$ 面ABC, 再根据 $BP=DQ=\frac{2}{3}DA$, 可得三棱锥Q-ABP的高, 求出三角形ABP的面积即可求得三棱锥Q-ABP的体积.

【解答】 解: (1) 证明: \because 在平行四边形ABCM中, $\angle ACM=90^\circ$, $\therefore AB\perp AC$, 又 $AB\perp DA$. 且 $AD\cap AC=A$,

$\therefore AB\perp$ 面ADC, $\because AB\subset$ 面ABC,

\therefore 平面 $ACD\perp$ 平面ABC;

(2) $\because AB=AC=3$, $\angle ACM=90^\circ$, $\therefore AD=AM=3\sqrt{2}$,

$\therefore BP=DQ=\frac{2}{3}DA=2\sqrt{2}$,

由(1)得 $DC\perp AB$, 又 $DC\perp CA$, $\therefore DC\perp$ 面ABC,

$$\begin{aligned} \therefore \text{三棱锥} Q - ABP \text{ 的体积 } V &= \frac{1}{3} S_{\triangle ABP} \times \frac{1}{3} DC \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} S_{\triangle ABC} \times \frac{1}{3} DC = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{1}{3} \times 3 = 1. \end{aligned}$$

【点评】 本题考查面面垂直，考查三棱锥体积的计算，考查学生分析解决问题的能力，属于中档题.

19. (12分) 某家庭记录了未使用节水龙头50天的日用水量数据 (单位: m^3)

和使用了节水龙头50天的日用水量数据, 得到频数分布表如下:

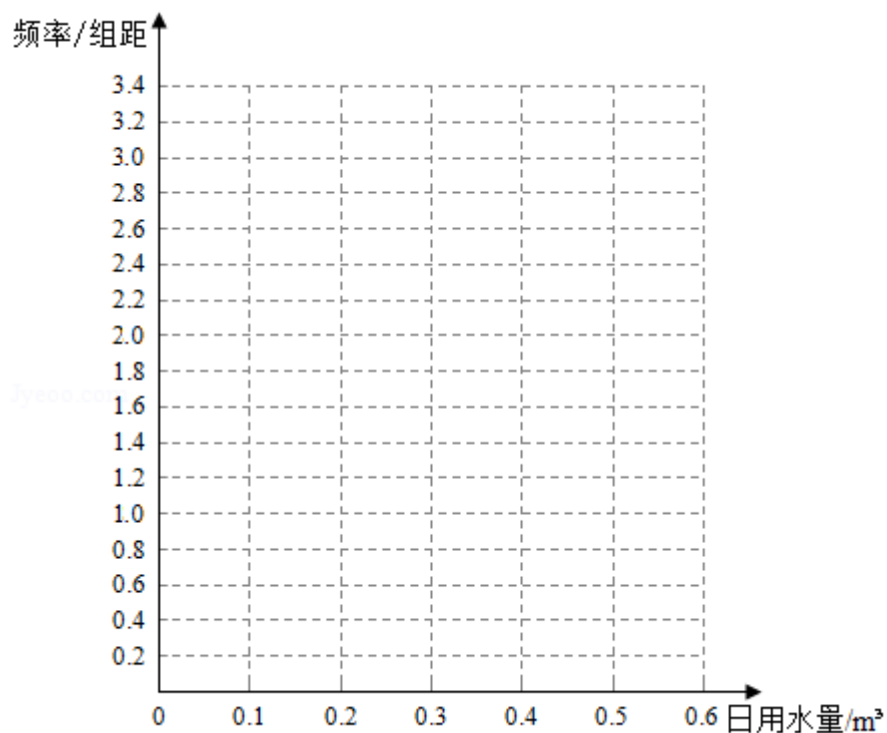
未使用节水龙头50天的日用水量频数分布表

日用水量	[0, 0.1)	[0.1, 0.2)	[0.2, 0.3)	[0.3, 0.4)	[0.4, 0.5)	[0.5, 0.6)	[0.6, 0.7)
频数	1	3	2	4	9	26	5

使用了节水龙头50天的日用水量频数分布表

日用水量	[0, 0.1)	[0.1, 0.2)	[0.2, 0.3)	[0.3, 0.4)	[0.4, 0.5)	[0.5, 0.6)
频数	1	5	13	10	16	5

(1) 作出使用了节水龙头50天的日用水量数据的频率分布直方图;



- (2) 估计该家庭使用节水龙头后，日用水量小于 0.35m^3 的概率；
- (3) 估计该家庭使用节水龙头后，一年能节省多少水？（一年按365天计算，同一组中的数据以这组数据所在区间中点的值作代表）

【考点】B7：分布和频率分布表；B8：频率分布直方图.

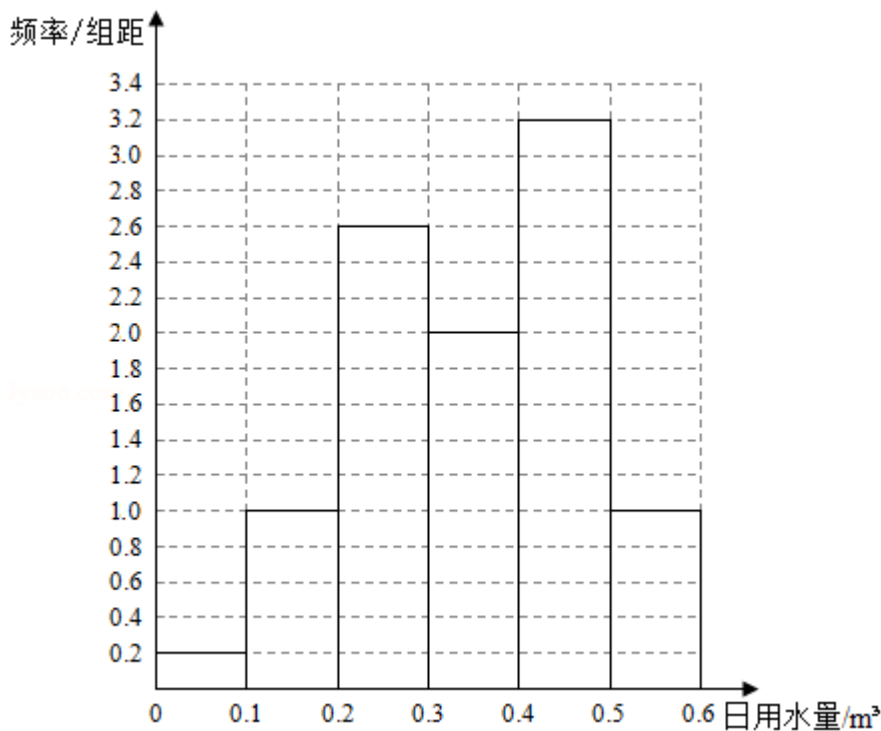
【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；51：概率与统计.

【分析】（1）根据使用了节水龙头50天的日用水量频数分布表能作出使用了节水龙头50天的日用水量数据的频率分布直方图.

（2）根据频率分布直方图能求出该家庭使用节水龙头后，日用水量小于 0.35m^3 的概率.

（3）由题意得未使用水龙头50天的日均水量为 0.48 ，使用节水龙头50天的日均用水量为 0.35 ，能此能估计该家庭使用节水龙头后，一年能节省多少水.

【解答】解：（1）根据使用了节水龙头50天的日用水量频数分布表，作出使用了节水龙头50天的日用水量数据的频率分布直方图，如下图：



（2）根据频率分布直方图得：

该家庭使用节水龙头后，日用水量小于 0.35m^3 的概率为：

$$p = (0.2 + 1.0 + 2.6 + 1) \times 0.1 = 0.48.$$

(3) 由题意得未使用水龙头50天的日均水量为:

$$\frac{1}{50} (1 \times 0.05 + 3 \times 0.15 + 2 \times 0.25 + 4 \times 0.35 + 9 \times 0.45 + 26 \times 0.55 + 5 \times 0.65) = 0.48,$$

使用节水龙头50天的日均用水量为:

$$\frac{1}{50} (1 \times 0.05 + 5 \times 0.15 + 13 \times 0.25 + 10 \times 0.35 + 16 \times 0.45 + 5 \times 0.55) = 0.35,$$

∴估计该家庭使用节水龙头后, 一年能节省: $365 \times (0.48 - 0.35) = 47.45 \text{m}^3$.

【点评】 本题考查频率分布直方图的作法, 考查概率的求法, 考查平均数的求法及应用等基础知识, 考查运算求解能力, 考查函数与方程思想, 是中档题.

20. (12分) 设抛物线C: $y^2=2x$, 点A(2, 0), B(-2, 0), 过点A的直线l与C交于M, N两点.

(1) 当l与x轴垂直时, 求直线BM的方程;

(2) 证明: $\angle ABM = \angle ABN$.

【考点】 KN: 直线与抛物线的综合.

【专题】 35: 转化思想; 4R: 转化法; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 (1) 当 $x=2$ 时, 代入求得M点坐标, 即可求得直线BM的方程;

(2) 设直线l的方程, 联立, 利用韦达定理及直线的斜率公式即可求得 $k_{BN} + k_{BM} = 0$, 即可证明 $\angle ABM = \angle ABN$.

【解答】 解: (1) 当l与x轴垂直时, $x=2$, 代入抛物线解得 $y = \pm 2$,

所以M(2, 2)或M(2, -2),

直线BM的方程: $y = \frac{1}{2}x + 1$, 或: $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

(2) 证明: 设直线l的方程为l: $x = ty + 2$, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2),

联立直线l与抛物线方程得 $\begin{cases} y^2 = 2x \\ x = ty + 2 \end{cases}$, 消x得 $y^2 - 2ty - 4 = 0$,

即 $y_1 + y_2 = 2t$, $y_1 y_2 = -4$,

$$\text{则有 } k_{BN} + k_{BM} = \frac{y_1}{x_1 + 2} + \frac{y_2}{x_2 + 2} = \frac{\left(\frac{y_2^2}{2} \times y_1 + \frac{y_1^2}{2} \times y_2\right) + 2(y_1 + y_2)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} =$$

$$\frac{(y_1+y_2)\left(\frac{y_1y_2}{2}+2\right)}{(x_1+2)(x_2+2)}=0,$$

所以直线BN与BM的倾斜角互补，

$\therefore \angle ABM = \angle ABN$.

【点评】 本题考查抛物线的性质，直线与抛物线的位置关系，考查韦达定理，直线的斜率公式，考查转化思想，属于中档题.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x - 1$.

(1) 设 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 a ，并求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 证明：当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时， $f(x) \geq 0$.

【考点】 6B：利用导数研究函数的单调性；6D：利用导数研究函数的极值；6E：利用导数研究函数的最值.

【专题】 14：证明题；35：转化思想；49：综合法；53：导数的综合应用.

【分析】 (1) 推导出 $x > 0$ ， $f'(x) = ae^x - \frac{1}{x}$ ，由 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点，解得 $a = \frac{1}{2e^2}$ ，从而 $f(x) = \frac{1}{2e^2}e^x - \ln x - 1$ ，进而 $f'(x) = \frac{1}{2e^2}e^x - \frac{1}{x}$ ，由此能求出 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时， $f(x) \geq \frac{e^x}{e} - \ln x - 1$ ，设 $g(x) = \frac{e^x}{e} - \ln x - 1$ ，则 $g'(x) = \frac{e^x}{e} - \frac{1}{x}$ ，由此利用导数性质能证明当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时， $f(x) \geq 0$.

【解答】 解：(1) \because 函数 $f(x) = ae^x - \ln x - 1$.

$$\therefore x > 0, f'(x) = ae^x - \frac{1}{x},$$

$\because x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点，

$$\therefore f'(2) = ae^2 - \frac{1}{2} = 0, \text{ 解得 } a = \frac{1}{2e^2},$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2e^2}e^x - \ln x - 1, \therefore f'(x) = \frac{1}{2e^2}e^x - \frac{1}{x},$$

当 $0 < x < 2$ 时， $f'(x) < 0$ ，当 $x > 2$ 时， $f'(x) > 0$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 2)$ 单调递减，在 $(2, +\infty)$ 单调递增.

(2) 证明: 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq \frac{e^x}{e} - \ln x - 1$,

设 $g(x) = \frac{e^x}{e} - \ln x - 1$, 则 $g'(x) = \frac{e^x}{e} - \frac{1}{x}$,

当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$,

当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$,

$\therefore x=1$ 是 $g(x)$ 的最小值点,

故当 $x > 0$ 时, $g(x) \geq g(1) = 0$,

\therefore 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq 0$.

【点评】 本题考查函数的单调性、导数的运算及其应用, 同时考查逻辑思维能力和综合应用能力, 是中档题.

(二) 选考题: 共10分. 请考生在第22、23题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分. [选修4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

22. (10分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的方程为 $y=k|x|+2$. 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2+2\rho\cos\theta-3=0$

(1) 求 C_2 的直角坐标方程;

(2) 若 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点, 求 C_1 的方程.

【考点】 Q4: 简单曲线的极坐标方程.

【专题】 35: 转化思想; 5S: 坐标系和参数方程.

【分析】 (1) 直接利用转换关系, 把参数方程和极坐标方程与直角坐标方程进行转化.

(2) 利用直线在坐标系中的位置, 再利用点到直线的距离公式的应用求出结果

【解答】 解: (1) 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2+2\rho\cos\theta-3=0$.

转换为直角坐标方程为: $x^2+y^2+2x-3=0$,

转换为标准式为: $(x+1)^2+y^2=4$.

(2) 由于曲线 C_1 的方程为 $y=k|x|+2$, 则: 该射线关于 y 轴对称, 且恒过定点 $(0$

, 2).

由于该射线与曲线 C_2 的极坐标有且仅有三个公共点.

所以: 必有一直线相切, 一直线相交.

则: 圆心到直线 $y=kx+2$ 的距离等于半径2.

$$\text{故: } \frac{|2-k|}{\sqrt{1+k^2}}=2, \text{ 或 } \frac{|2+k|}{\sqrt{1+k^2}}=2$$

$$\text{解得: } k=-\frac{4}{3} \text{ 或 } 0, \text{ (0舍去) 或 } k=\frac{4}{3} \text{ 或 } 0$$

经检验, 直线 $y=\frac{4}{3}x+2$ 与曲线 C_2 没有公共点.

故 C_1 的方程为: $y=-\frac{4}{3}|x|+2$.

【点评】 本体考察知识要点: 参数方程和极坐标方程与直角坐标方程的转化, 直线和曲线的位置关系的应用, 点到直线的距离公式的应用.

[选修4-5: 不等式选讲] (10分)

23. 已知 $f(x) = |x+1| - |ax-1|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) > 1$ 的解集;

(2) 若 $x \in (0, 1)$ 时不等式 $f(x) > x$ 成立, 求 a 的取值范围.

【考点】 R5: 绝对值不等式的解法.

【专题】 15: 综合题; 38: 对应思想; 4R: 转化法; 5T: 不等式.

【分析】 (1) 去绝对值, 化为分段函数, 即可求出不等式的解集,

(2) 当 $x \in (0, 1)$ 时不等式 $f(x) > x$ 成立, 转化为即 $|ax-1| < 1$, 即 $0 < ax < 2$, 转化为 $a < \frac{2}{x}$, 且 $a > 0$, 即可求出 a 的范围.

【解答】 解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = |x+1| - |x-1| = \begin{cases} 2, & x > 1 \\ 2x, & -1 \leq x \leq 1 \\ -2, & x < -1 \end{cases}$

由 $f(x) > 1$,

$$\therefore \begin{cases} 2x > 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 2 > 1 \\ x > 1 \end{cases}$$

解得 $x > \frac{1}{2}$,

故不等式 $f(x) > 1$ 的解集为 $(\frac{1}{2}, +\infty)$,

(2) 当 $x \in (0, 1)$ 时不等式 $f(x) > x$ 成立,

$$\therefore |x+1| - |ax-1| - x > 0,$$

$$\text{即 } x+1 - |ax-1| - x > 0,$$

$$\text{即 } |ax-1| < 1,$$

$$\therefore -1 < ax-1 < 1,$$

$$\therefore 0 < ax < 2,$$

$$\therefore x \in (0, 1),$$

$$\therefore a > 0,$$

$$\therefore 0 < x < \frac{2}{a},$$

$$\therefore a < \frac{2}{x}$$

$$\therefore \frac{2}{x} > 2,$$

$$\therefore 0 < a \leq 2,$$

故 a 的取值范围为 $(0, 2]$.

【点评】 本题考查了绝对值不等式的解法和含参数的取值范围, 考查了运算能力和转化能力, 属于中档题.