2025 年全国统一高考数学试卷

（新高考II卷）

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在试卷上无效.

3.考试结束后，本试卷和答题卡一并交回.

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．样本数据 2，8，14，16，20 的平均数为（　）

A．8　　B．9　　C．12　　D．18

2．已知 $z=1+\mathrm{i}$，则 $\dfrac{1}{z-1}=$（　）

A．$-\mathrm{i}$　　B．i　　C．-1　　D．1

3．已知集合 $A=\{-4,0,1,2,8\}$，$B=\left\{x\mid x^3=x\right\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$\{0,1,2\}$　　B．$\{1,2,8\}$

C．$\{2,8\}$　　D．$\{0,1\}$

4．不等式 $\dfrac{x-4}{x-1}\geq 2$ 的解集是（　）

A．$\{x|-2\leq x\leq 1\}$　　B．$\{x|\ x\leq -2\}$

C．$\{x|-2\leq x<1\}$　　D．$\{x|\ x>1\}$

5．在 $\triangle ABC$ 中，$BC=2$，$AC=1+\sqrt{3}$，$AB=\sqrt{6}$，则 $A=$（　）

A．$45°$　　B．$60°$　　C．$120°$　　D．$135°$

6．设抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 A 在 C 上，过 A 作 C 的准线的垂线，垂足为 B，若直线 BF 的方程为 $y=-2x+2$，则 $|AF|=$（　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

7．记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_3=6,S_5=-5$，则 $S_6=$（　）

A．-20　　B．-15　　C．-10　　D．-5

8．已知$0<\alpha<\pi$，$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，则$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$（　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{10}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{5}$　　C．$\frac{3\sqrt{2}}{10}$　　D．$\frac{7\sqrt{2}}{10}$

二、多选题：本题共 3 小题，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.

9．记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，q 为$\{a_n\}$的公比，$q>0$，若$S_3=7,a_3=1$，则（　）

A．$q=\frac{1}{2}$　　B．$a_5=\frac{1}{9}$

C．$S_5=8$　　D．$a_n+S_n=8$

10．已知$f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数，且当$x>0$时，$f(x)=(x^2-3)e^x+2$，则（　）

A．$f(0)=0$　　B．当$x<0$时，$f(x)=-(x^2-3)e^{-x}-2$

C．$f(x)\geq 2$当且仅当$x\geq\sqrt{3}$　　D．$x=-1$是$f(x)$的极大值点

11．双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别是$F_1$、$F_2$，左、右顶点分别为$A_1$，$A_2$，以$F_1F_2$为直径的圆与 C 的一条渐近线交于 M、N 两点，且$\angle NA_1M=\frac{5\pi}{6}$，则（　）

A．$\angle A_1MA_2=\frac{\pi}{6}$　　B．$|MA_1|=2|MA_2|$

C．C 的离心率为$\sqrt{13}$　　D．当$a=\sqrt{2}$时，四边形NA_1MA_2的面积为$8\sqrt{3}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12．已知平面向量$\vec{a}=(x,1),\vec{b}=(x-1,2x)$，若$\vec{a}\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，则$|\vec{a}|=$____________

13．若$x=2$是函数$f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$的极值点，则$f(0)=$____________

14．一个底面半径为4cm，高为9cm的封闭圆柱形容器（容器壁厚度忽略不计）内有两个半径相等的铁球，则铁球半径的最大值为____________cm.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15．已知函数$f(x)=\cos(2x+\varphi)(0\leq\varphi<\pi),f(0)=\frac{1}{2}$.

(1)求φ；

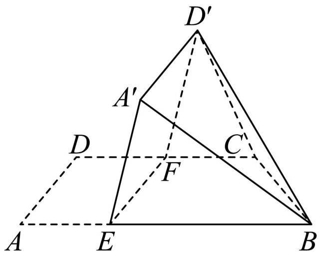
(2)设函数 $g(x)=f(x)+f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，求 $g(x)$ 的值域和单调区间.

16．已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，长轴长为 4.

(1)求 C 的方程;

(2)过点 $(0,-2)$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点，O 为坐标原点，若 $\triangle OAB$ 的面积为 $\sqrt{2}$，求 $|AB|$.

17. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB//CD,\angle DAB=90°$，F 为 CD 的中点，点 E 在 AB 上，$EF//AD$，$AB=3AD,CD=2AD$，将四边形 $EFDA$ 沿 EF 翻折至四边形 $EFD'A'$，使得面 $EFD'A'$ 与面 $EFCB$ 所成的二面角为 $60°$.



(1)证明: $A'B//$ 平面 $CD'F$;

(2)求面 BCD' 与面 $EFD'A'$ 所成的二面角的正弦值.

18．已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-kx^3$，其中 $0<k<\frac{1}{3}$.

(1)证明：$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 存在唯一的极值点和唯一的零点;

(2)设 x_1,x_2 分别为 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的极值点和零点.

（i）设函数 $g(t)=f(x_1+t)-f(x_1-t)$·证明：$g(t)$ 在区间 $(0,x_1)$ 单调递减;

（ii）比较 $2x_1$ 与 x_2 的大小，并证明你的结论.

19．甲、乙两人进行乒乓球练习，每个球胜者得 1 分，负者得 0 分．设每个球甲胜的概率为 $P\left(\frac{1}{2}<p<1\right)$，乙胜的概率为 q，$p+q=1$，且各球的胜负相互独立，对正整数 $k\geq 2$，记 p_k 为打完 k 个球后甲比乙至少多得 2 分的概率，q_k 为打完 k 个球后乙比甲至少多得 2 分的概率.

(1)求 p_3,p_4（用 p 表示).

(2)若 $\frac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=4$，求 p.

(3)证明：对任意正整数 m，$p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$.

1．C

【分析】由平均数的计算公式即可求解.

【详解】样本数据$2,8,14,16,20$的平均数为$\dfrac{2+8+14+16+20}{5}=\dfrac{60}{5}=12$.

故选：C.

2．A

【分析】由复数除法即可求解.

【详解】因为$z=1+\mathrm{i}$，所以$\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}-1}=\dfrac{1}{\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=-\mathrm{i}$.

故选：A.

3．D

【分析】求出集合B后结合交集的定义可求$A\cap B$.

【详解】$B=\left\{x\mid x^3=x\right\}=\left\{0,-1,1\right\}$，故$A\bigcap B=\left\{0,1\right\}$，

故选：D.

4．C

【分析】移项后转化为求一元二次不等式的解即可.

【详解】$\dfrac{x-4}{x-1}\geq 2$即为$\dfrac{x+2}{x-1}\leq 0$即$\begin{cases}(x+2)(x-1)\leq 0\\ x-1\neq 0\end{cases}$，故$-2$ £ $x<1$，

故解集为$\left[-2,1\right)$，

故选：C.

5．A

【分析】由余弦定理$\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\bullet AC}$直接计算求解即可.

【详解】由题意得$\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\bullet AC}=\dfrac{\left(\sqrt{6}\right)^2+\left(1+\sqrt{3}\right)^2-2^2}{2\times\sqrt{6}\times\left(1+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又$0^\circ<A<180^\circ$，所以$A=45^\circ$.

故选：A

6．C

【分析】先由直线l_{BF}求出焦点F和P即抛物线C的方程，进而依次得抛物线的准线方程和点B，从而可依次求出y_A和x_A，再由焦半径公式即可得解.

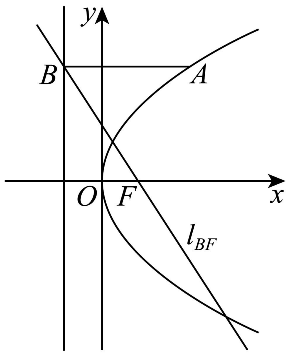
【详解】对 $l_{BF}: y=-2x+2$，令 $y=0$，则 $x=1$，

所以 $F(1,0)$， $p=2$ 即抛物线 $C: y^2=4x$，故抛物线的准线方程为 $x=-1$，

故 $B(-1,4)$，则 $y_A=4$，代入抛物线 $C: y^2=4x$ 得 $x_A=4$.

所以 $|AF|=|AB|=x_A+\frac{p}{2}=4+1=5$.

故选：C



7．B

【分析】由等差数列前 n 项和公式结合题意列出关于首项 a_1 和公差 d 的方程求出首项 a_1 和公差 d，再由等差数列前 n 项和公式即可计算求解.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则由题可得 $\begin{cases}3a_1+3d=6\\5a_1+10d=-5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}d=-3\\a_1=5\end{cases}$，

所以 $S_6=6a_1+15d=6\times5+15\times(-3)=-15$.

故选：B.

8．D

【分析】利用二倍角余弦公式得 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，则 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，最后再根据两角差的正弦公式即可得到答案.

【详解】$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-1=-\frac{3}{5}$,

因为 $0<\alpha<\pi$，则 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，则 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$，

则 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

故选：D.

9．AD

【分析】对 A，根据等比数列通项公式和前n项和公式得到方程组，解出a_1,q，再利用其通项公式和前n项和公式一一计算分析即可.

【详解】对 A，由题意得$\begin{cases} a_1q^2=1 \\ a_1+a_1q+a_1q^2=7 \end{cases}$，结合$q>0$，解得$\begin{cases} a_1=4 \\ q=\dfrac{1}{2} \end{cases}$或$\begin{cases} a_1=9 \\ q=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$（舍去），

故 A 正确；

对 B，则$a_5=a_1q^4=4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{4}$，故 B 错误；

对 C，$S_5=\dfrac{a_1\left(1-q^5\right)}{1-q}=\dfrac{4\times\left(1-\dfrac{1}{32}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{31}{4}$，故 C 错误；

对 D，$a_n=4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{3-n}$，$S_n=\dfrac{4\times\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\dfrac{1}{2}}=8-2^{-n+3}$，

则$a_n+S_n=2^{3-n}+8-2^{3-n}=8$，故 D 正确；

故选：AD.

10．ABD

【分析】对 A，根据奇函数特点即可判断；对 B，利用$f(x)=-f\left(-x\right)$代入求解即可；对 C，举反例$f(-1)>2$即可；对 D，直接求导，根据极大值点判定方法即可判断.

【详解】对 A，因为$f(x)$定义在 R 上奇函数，则$f(0)=0$，故 A 正确；

对 B，当$x<0$时，$-x>0$，则$f(x)=-f\left(-x\right)=-\left[\left((-x)^2-3\right)e^{-x}+2\right]=-\left(x^2-3\right)e^{-x}-2$，故 B 正确；

对 C，$f(-1)=-(1-3)e-2=2(e-1)>2$，故 C 错误；

对 D，当$x<0$时，$f(x)=\left(3-x^2\right)e^{-x}-2$，则$f'(x)=-\left(3-x^2\right)e^{-x}-2xe^{-x}=\left(x^2-2x-3\right)e^{-x}$，

令$f'(x)=0$，解得$x=-1$或3（舍去），

当$x\in\left(-\infty,-1\right)$时，$f'(x)>0$，此时$f\left(x\right)$单调递增，

当$x\in\left(-1,0\right)$时，$f'(x)<0$，此时$f\left(x\right)$单调递减，

则$x=-1$是$f(x)$极大值点，故 D 正确；

故选：ABD.

11．ACD

【分析】由平行四边形的性质判断 A；由 $F_1M \perp F_2M$ 且 $|MO| = c$ 结合 M 在渐近线上可求 M 的坐标，从而可判断 B 的正误，或者利用三角函数定义和余弦定理也可判断；由中线向量结合 B 的结果可得 $c^2 = 13a^2$，计算后可判断 C 的正误，或者利用 $\dfrac{|MA_2|}{|A_1A_2|} = \dfrac{b}{2a} = \sqrt{3}$ 并结合离心率变形公式即可判断；结合 BC 的结果求出面积后可判断 D 的正误.

【详解】不妨设渐近线为 $y = \dfrac{b}{a}x$，M 在第一象限，N 在第三象限，

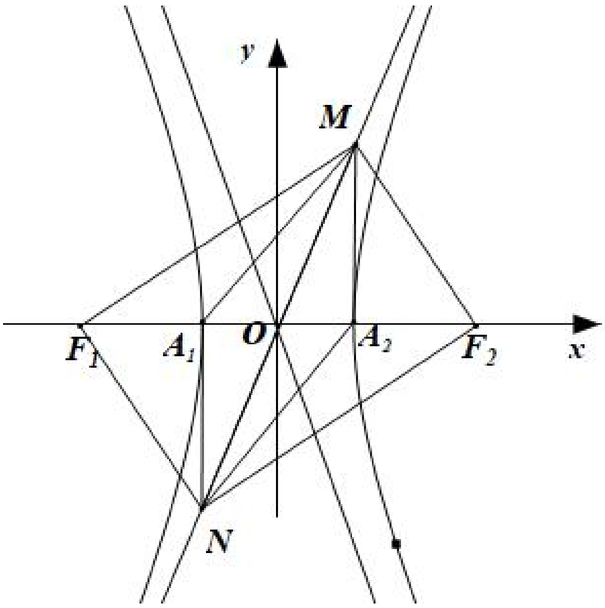
对于 A，由双曲线的对称性可得 A_1MA_2N 为平行四边形，故 $\angle A_1MA_2 = \pi - \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$，

故 A 正确；

对于 B，方法一：因为 M 在以 F_1F_2 为直径的圆上，故 $F_1M \perp F_2M$ 且 $|MO| = c$，

设 $M(x_0, y_0)$，则 $\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = c^2 \\ \dfrac{y_0}{x_0} = \dfrac{b}{a} \end{cases}$，故 $\begin{cases} x_0 = a \\ y_0 = b \end{cases}$，故 $MA_2 \perp A_1A_2$，

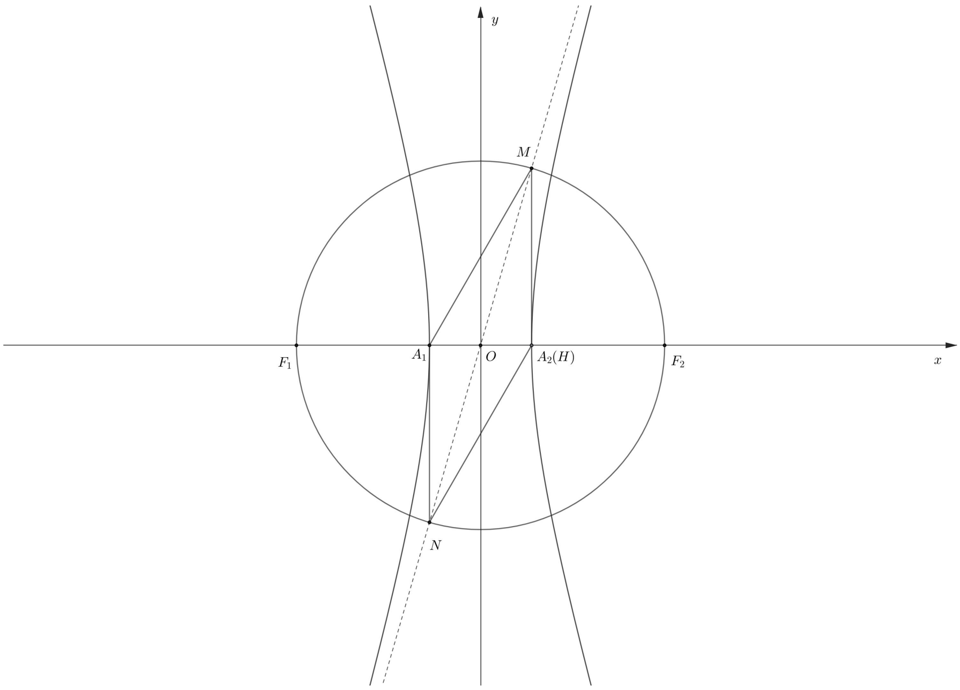
由 A 得 $\angle A_1MA_2 = \dfrac{\pi}{6}$，故 $|MA_2| = |MA_1| \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 即 $|MA_1| = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}|MA_2|$，故 B 错误；



方法二：因为 $\tan\angle MOA_2 = \dfrac{b}{a}$，因为双曲线中，$c^2 = a^2 + b^2$，

则 $\cos\angle MOA_2 = \dfrac{a}{c}$，又因为以 F_1F_2 为直径的圆与 C 的一条渐近线交于 M、N，则 $OM = c$，

则若过点M往x轴作垂线，垂足为H，则$|OH| = c \cdot \dfrac{a}{c} = a = |OA_2|$，则点$H$与$A_2(H)$重合，则$MA_2 \perp x$轴，则$|MA_2| = \sqrt{c^2 - a^2} = b$，



方法三：在$\triangle OMA_2$利用余弦定理知，$|MA_2|^2 = |OM|^2 + |OA_2|^2 - 2|OM||OA_2|\cos\angle MOA_2$，

即$|MA_2|^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \dfrac{a}{c} = b^2$，则$|MA_2| = b$，

则$\triangle A_1A_2M$为直角三角形，且$\angle A_1MA_2 = \dfrac{\pi}{6}$，则$2|MA_2| = \sqrt{3}|MA_1|$，故B错误；

对于C，方法一：因为$\overrightarrow{MO} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2}\right)$，故$4\overrightarrow{MO}^2 = \overrightarrow{MA_1}^2 + 2\overrightarrow{MA_1} \cdot \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_2}^2$，

由B可知$|MA_2| = b, |MA_1| = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}b$，

故$4c^2 = b^2 + \dfrac{4}{3}b^2 + 2 \times b \times \dfrac{2\sqrt{3}}{3} b \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{13}{3}b^2 = \dfrac{13}{3}\left(c^2 - a^2\right)$即$c^2 = 13a^2$，

故离心率$e = \sqrt{13}$，故C正确；

方法二：因为$\dfrac{|MA_2|}{|A_1A_2|} = \dfrac{b}{2a} = \sqrt{3}$，则$\dfrac{b}{a} = 2\sqrt{3}$，则$e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{13}$，故C正确；

对于D，当$a = \sqrt{2}$时，由C可知$e = \sqrt{13}$，故$c = \sqrt{26}$，

故$b = 2\sqrt{6}$，故四边形NA_1MA_2为$2S_{\triangle MA_1A_2} = 2 \times \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{3}$，

故D正确，

故选：ACD.

12．$\sqrt{2}$

【分析】根据向量坐标化运算得$\vec{a}-\vec{b}=(1,1-2x)$，再利用向量垂直的坐标表示得到方程，解出即可.

【详解】$\vec{a}-\vec{b}=(1,1-2x)$，因为$\vec{a}\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，则$\vec{a}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$，

则$x+1-2x=0$，解得$x=1$.

则$\vec{a}=(1,1)$，则$|\vec{a}|=\sqrt{2}$.

故答案为：$\sqrt{2}$.

13．-4

【分析】由题意得$f'\left(2\right)=0$即可求解a，再代入即可求解.

【详解】由题意有$f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-a\right)$，

所以$f'\left(x\right)=\left(x-a\right)\left(x-1\right)+\left(x-1\right)\left(x-2\right)+\left(x-a\right)\left(x-2\right)$，

因为2是函数$f\left(x\right)$极值点，所以$f'\left(2\right)=2-a=0$，得$a=2$，

当$a=2$时，$f'\left(x\right)=2\left(x-2\right)\left(x-1\right)+\left(x-2\right)^2=\left(x-2\right)\left(3x-4\right)$，

当$x\in\left(-\infty,\frac{4}{3}\right),f'\left(x\right)>0,f\left(x\right)$单调递增，当$x\in\left(\frac{4}{3},2\right),f'\left(x\right)<0,f\left(x\right)$单调递减，

当$x\in\left(2,+\infty\right),f'\left(x\right)>0,f\left(x\right)$单调递增，

所以$x=2$是函数$f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-a\right)$的极小值点，符合题意；

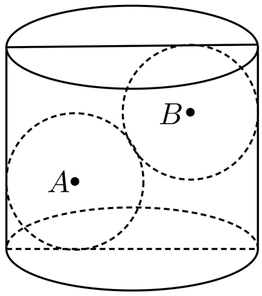
所以$f\left(0\right)=-1\times\left(-2\right)\times\left(-a\right)=-2a=-4$.

故答案为：-4.

14．2.5

【分析】根据圆柱与球的性质以及球的体积公式可求出球的半径；

【详解】



圆柱的底面半径为4cm，设铁球的半径为 r，且 $r<4$，

由圆柱与球的性质知 $AB^2=(2r)^2=(8-2r)^2+(9-2r)^2$，

即 $4r^2-68r+145=(2r-5)(2r-29)=0$，$\because r<4$，

$\therefore r=2.5.$

故答案为：2.5.

15．(1) $\varphi=\frac{\pi}{3}$

(2)答案见解析

【分析】（1）直接由题意得 $\cos\varphi=\frac{1}{2},(0\le\varphi<\pi)$，结合余弦函数的单调性即可得解；

（2）由三角恒等变换得 $g(x)=\sqrt{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，由此可得值域，进一步由整体代入法可得函数 $g(x)$ 的单调区间.

【详解】（1）由题意 $f(0)=\cos\varphi=\frac{1}{2},(0\le\varphi<\pi)$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$；

（2）由（1）可知 $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

所以 $g(x)=f(x)+f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x$

$=\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\cos 2x=\frac{3}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\sqrt{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

所以函数 $g(x)$ 的值域为 $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$，

令 $2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\pi+2k\pi, k\in Z$，解得 $-\frac{\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{12}+k\pi, k\in Z$，

令 $\pi+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 2\pi+2k\pi, k\in Z$，解得 $\frac{5\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{11\pi}{12}+k\pi, k\in Z$，

所以函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right], k\in Z$，

函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{11\pi}{12}+k\pi\right], k\in Z$.

16．(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

(2) $\sqrt{5}$

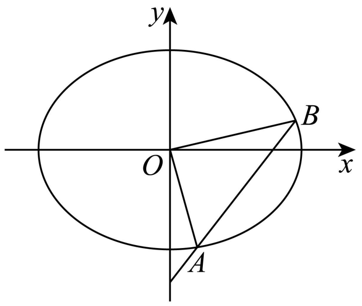
【分析】（1）根据长轴长和离心率求出基本量后可得椭圆方程；

（2）设出直线方程并联立椭圆方程后结合韦达定理用参数t表示面积后可求t的值，从而可求弦长.

【详解】（1）因为长轴长为4，故$a=2$，而离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，故$c=\sqrt{2}$，

故$b=\sqrt{2}$，故椭圆方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

（2）



由题设直线AB的斜率不为0，故设直线$l: x=t(y+2)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}x=t(y+2)\\x^2+2y^2=4\end{cases}$可得$(t^2+2)y^2+4t^2y+4t^2-4=0$，

故$\Delta=16t^4-4(t^2+2)(4t^2-4)=4(8-4t^2)>0$即$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$，

且$y_1+y_2=-\frac{4t^2}{t^2+2},y_1y_2=\frac{4t^2-4}{t^2+2}$，

故$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times|2t|\times|y_1-y_2|=|t|\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{|t|\sqrt{32-16t^2}}{t^2+2}=\sqrt{2}$，

解得$t=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$，

故$|AB|=\sqrt{1+t^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+\frac{2}{3}}\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{\frac{5}{3}}\times\frac{\sqrt{32-16\times\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}+2}=\sqrt{5}$

17．(1)证明见解析

(2) $\frac{\sqrt{42}}{7}$

【分析】（1）先应用线面平行判定定理得出$A'E$ // 平面$CD'F$及EB // 平面$CD'F$，

再应用面面平行判定定理得出平面 $A'EB//$ 平面 $CD'F$，进而得出线面平行；

（2）建立空间直角坐标系，利用已知条件将点 B,C,D',E,F 的坐标表示出来，然后将平面 BCD' 及平面 $EFD'A'$ 的法向量求出来，利用两个法向量的数量积公式可将两平面的夹角余弦值求出来，进而可求得其正弦值.

【详解】（1）设 $AD=1$，所以 $AB=3,CD=2$，因为 F 为 CD 中点，所以 $DF=1$，因为 $EF//AD$，$AB//CD$，所以 $AEFD$ 是平行四边形， 所以 $AE//DF$，所以 $A'E//D'F$，

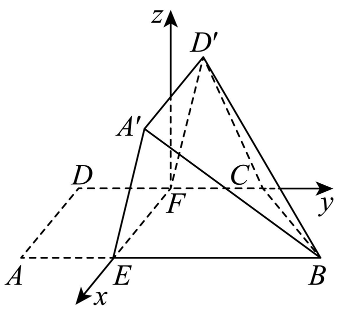
因为 $D'F\subset$ 平面 $CD'F,A'E\not\subset$ 平面 $CD'F$，所以 $A'E//$ 平面 $CD'F$，

因为 $FC//EB,FC\subset$ 平面 $CD'F,EB\not\subset$ 平面 $CD'F$，所以 $EB//$ 平面 $CD'F$，

又 $EB\cap A'E=E$，$EB,A'E\subset$ 平面 $A'EB$，所以平面 $A'EB//$ 平面 $CD'F$，

又 $A'B\subset$ 平面 $A'EB$，所以 $A'B//$ 平面 $CD'F$.

（2）



因为 $\angle DAB=90°$，所以 $AD\perp AB$，又因为 $AB//FC,EF//AD$，所以 $EF\perp FC$，

以 F 为原点，FE,FC 以及垂直于平面 $BECF$ 的直线分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系.

因为 $D'F\perp EF,CF\perp EF$，平面 $EFD'A'$ 与平面 $EFCB$ 所成二面角为 $60°$，

所以 $\angle D'FC=60^{\circ}$.

则 $B(1,2,0)$，$C(0,1,0)$，$D'\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$E(1,0,0)$，$F(0,0,0)$，.

所以 $\overrightarrow{BC}=(-1,-1,0),\overrightarrow{CD'}=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\overrightarrow{FE}=(1,0,0),\overrightarrow{FD'}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

设平面 BCD' 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{CD'}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}-\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ -x-y=0\end{cases}$，令 $y=\sqrt{3}$，则 $z=1,x=-\sqrt{3}$，则 $\vec{n}=(-\sqrt{3},\sqrt{3},1)$.

设平面 $EFD'A'$ 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{FE}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{FD'}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$，所以$\begin{cases}\dfrac{1}{2}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ x=0\end{cases}$，

令$y=\sqrt{3}$，则$z=-1,x=0$，所以$\vec{m}=\left(0,\sqrt{3},-1\right)$.

所以$\cos\vec{m},\vec{n}=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{0+3-1}{\sqrt{3+3+1}\times\sqrt{1+3}}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

所以平面BCD'与平面$EFD'A'$夹角的正弦值为$\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

18．(1)证明见解析；

(2)（i）证明见解析；（ii）$2x_1>x_2$，证明见解析.

【分析】（1）先由题意求得$f'(x)=x^2\left(\dfrac{1}{1+x}-3k\right)$，接着构造函数$g(x)=\dfrac{1}{1+x}-3k,x>0$，利用导数工具研究函数$g(x)$的单调性和函数值情况，从而得到函数的单调性，进而得证函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上存在唯一极值点；再结合$f(0)=0$和$x\to+\infty$时$f(x)$的正负情况即可得证$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上存在唯一零点；

（2）（i）由（1）$x_1+1=\dfrac{1}{3k}$和$g'(t)=f'(x_1+t)-f'(x_1-t)$结合（1）中所得导函数$f'(x_1)$计算得到$g'(t)=-t\left[\dfrac{(x_1+t)^2}{(x_1+t+1)(x_1+1)}+\dfrac{(x_1-t)^2}{(x_1-t+1)(x_1+1)}\right]$，再结合$t\in(0,x_1)$得$g'(t)<0$即可得证；

（ii）由函数$g(t)$在区间$(0,x_1)$上单调递减得到$0>f(2x_1)$，再结合$f(x_2)=0$，和函数$f(x)$的单调性以以及函数值的情况即可得证.

【详解】（1）由题得$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x-3kx^2=\dfrac{x^2}{1+x}-3kx^2=x^2\left(\dfrac{1}{1+x}-3k\right)$，

因为$x\in(0,+\infty)$，所以$x^2>0$，设$g(x)=\dfrac{1}{1+x}-3k,x>0$，

则$g'(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}<0$在$(0,+\infty)$上恒成立，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，

$g(0)=1-3k>0$，令$g(x_1)=0\Rightarrow x_1=\dfrac{1}{3k}-1$，

所以当$x\in(0,x_0)$时，$g(x)>0$，则$f'(x)>0$；当$x\in(x_0,+\infty)$时，$g(x)<0$，则$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一极值点，

对函数 $y=\ln(1+x)-x$ 有 $y'=\dfrac{1}{1+x}-1=-\dfrac{x}{1+x}<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $y=\ln(1+x)-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $y=\ln(1+x)-x<y|_{x=0}=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

又因为 $f(0)=0$， $x\to+\infty$ 时 $\dfrac{1}{2}x^2-kx^3=\dfrac{1}{2}x^2(1-2kx)<0$，

所以 $x\to+\infty$ 时 $f(x)<0$，

所以存在唯一 $x_2\in(0,+\infty)$ 使得 $f(x_2)=0$，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点.

（2）（i）由（1）知 $x_1=\dfrac{1}{3k}-1$，则 $x_1+1=\dfrac{1}{3k}$， $f'(x)=x^2\left(\dfrac{1}{1+x}-3k\right)$，

则 $g'(t)=f'(x_1+t)-f'(x_1-t)=(x_1+t)^2\left(\dfrac{1}{x_1+t+1}-3k\right)-(x_1-t)^2\left(\dfrac{1}{x_1-t+1}-3k\right)$

$=(x_1+t)^2\left(\dfrac{1}{x_1+t+1}-\dfrac{1}{x_1+1}\right)-(x_1-t)^2\left(\dfrac{1}{x_1-t+1}-\dfrac{1}{x_1+1}\right)$

$=\dfrac{-t(x_1+t)^2}{(x_1+t+1)(x_1+1)}-\dfrac{t(x_1-t)^2}{(x_1-t+1)(x_1+1)}=-t\left[\dfrac{(x_1+t)^2}{(x_1+t+1)(x_1+1)}+\dfrac{(x_1-t)^2}{(x_1-t+1)(x_1+1)}\right]$

$=-t\left[\dfrac{(x_1+t)^2}{(x_1+t+1)(x_1+1)}+\dfrac{(x_1-t)^2}{(x_1-t+1)(x_1+1)}\right]$，

因为 $t\in(0,x_1)$，所以 $x_1-t+1>0$，所以 $\dfrac{(x_1+t)^2}{(x_1+t+1)(x_1+1)}+\dfrac{(x_1-t)^2}{(x_1-t+1)(x_1+1)}>0$，

所以 $g'(t)<0$， 所以函数 $g(t)$ 在区间 $(0,x_1)$ 上单调递减；

（ii） $2x_1>x_2$，证明如下：

由（i）知：函数 $g(t)$ 在区间 $(0,x_1)$ 上单调递减，

所以 $g(0)>g(x_1)$ 即 $0>f(2x_1)$，又 $f(x_2)=0$，

由（1）可知 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减， $x_2\in(x_0,+\infty)$，且对任意 $x\in(0,x_2)$ $f(x)>0$，

所以 $2x_1>x_2$.

19．(1) $p_3=p^3$， $p_4=p^3(4-3p)$

(2) $p=\dfrac{2}{3}$

(3)证明过程见解析

【分析】（1）直接由二项分布概率计算公式即可求解；

（2）由题意 $q_3=q^3,q_4=q^3(4-3q)$，联立 $\dfrac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=4$， $p+q=1$即可求解；

（3）首先 $p_{2m}-p_{2m+1}=C_{2m}^{m-1}p^{m+1}q^m$，$p_{2m+2}-p_{2m+1}=C_{2m+1}^{m}p^{m+2}q^m$，同理有 $q_{2m}-q_{2m+1}=C_{2m}^{m-1}q^{m+1}p^m$，

$q_{2m+2}-q_{2m+1}=C_{2m+1}^{m}q^{m+2}p^m$，作差有 $p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}$，另一方面

$p_{2m+2}-p_{2m}=\dfrac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}p^mq^m\cdot p\left(p-\dfrac{m}{2m+1}\right)$，且同理有

$q_{2m+2}-q_{2m}=\dfrac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}p^mq^m\cdot q\left(q-\dfrac{m}{2m+1}\right)$，作差能得到 $p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$，由此即可得证.

【详解】（1） p_3为打完3个球后甲比乙至少多得两分的概率，故只能甲胜三场，

故所求为 $p_3=C_3^3(1-p)^0p^3=p^3$，

p_4为打完4个球后甲比乙至少多得两分的概率，故甲胜三场或四场，

故所求为 $p_4=C_4^3(1-p)^1p^3+C_4^4(1-p)^0p^4=4p^3(1-p)+p^4=p^3(4-3p)$；

（2）由（1）得 $p_3=p^3$， $p_4=p^3(4-3p)$，同理 $q_3=q^3,q_4=q^3(4-3q)$，

若 $\dfrac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=4$， $p+q=1$，

则 $\dfrac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=\dfrac{p^3(4-3p)-p^3}{q^3(4-3q)-q^3}=\dfrac{3p^3(1-p)}{3q^3(1-q)}=\dfrac{p^3q}{q^3p}=\left(\dfrac{p}{q}\right)^2=4$，

由于 $0<p,q<1$，所以 $p=2q=2(1-p)>0$，解得 $p=\dfrac{2}{3}$；

（3）我们有

$$p_{2m}-p_{2m+1}=\sum_{k=0}^{m-1}C_{2m}^{k}p^{2m-k}q^k-\sum_{k=0}^{m-1}C_{2m+1}^{k}p^{2m+1-k}q^k=\sum_{k=0}^{m-1}C_{2m}^{k}p^{2m-k}q^k-\sum_{k=0}^{m-1}C_{2m}^{k}p^{2m+1-k}q^k-\sum_{k=0}^{m-1}C_{2m}^{k-1}p^{2m+1-k}q^k$$

$$=(1-p)\sum_{k=0}^{m-1}C_{2m}^{k}p^{2m-k}q^k-\sum_{k=0}^{m-1}C_{2m}^{k-1}p^{2m+1-k}q^k=\sum_{k=0}^{m-1}C_{2m}^{k}p^{2m-k}q^{k+1}-\sum_{k=0}^{m-1}C_{2m}^{k-1}p^{2m+1-k}q^k$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{C}_{2m}^{k}p^{2m-k}q^{k+1}-\sum_{k=0}^{m-2}\mathrm{C}_{2m}^{k}p^{2m-k}q^{k+1}=\mathrm{C}_{2m}^{m-1}p^{m+1}q^{m}.$$

以及

$$p_{2m+2}-p_{2m+1}=\sum_{k=0}^{m}\mathrm{C}_{2m+2}^{k}p^{2m+2-k}q^{k}-\sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{C}_{2m+1}^{k}p^{2m+1-k}q^{k}=\sum_{k=0}^{m}\mathrm{C}_{2m+1}^{k-1}p^{2m+2-k}q^{k}+\sum_{k=0}^{m}\mathrm{C}_{2m+1}^{k}p^{2m+2-k}q^{k}-\sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{C}_{2m+1}^{k}p^{2m+1-k}q^{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\mathrm{C}_{2m+1}^{k-1}p^{2m+2-k}q^{k}+\mathrm{C}_{2m+1}^{m}p^{m+2}q^{m}+(p-1)\sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{C}_{2m+1}^{k}p^{2m+1-k}q^{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\mathrm{C}_{2m+1}^{k-1}p^{2m+2-k}q^{k}+\mathrm{C}_{2m+1}^{m}p^{m+2}q^{m}-\sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{C}_{2m+1}^{k}p^{2m+1-k}q^{k+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{C}_{2m+1}^{k}p^{2m+1-k}q^{k+1}+\mathrm{C}_{2m+1}^{m}p^{m+2}q^{m}-\sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{C}_{2m+1}^{k}p^{2m+1-k}q^{k+1}=\mathrm{C}_{2m+1}^{m}p^{m+2}q^{m}.$$

至此我们得到 $p_{2m}-p_{2m+1}=\mathrm{C}_{2m}^{m-1}p^{m+1}q^{m}$， $p_{2m+2}-p_{2m+1}=\mathrm{C}_{2m+1}^{m}p^{m+2}q^{m}$，同理有

$q_{2m}-q_{2m+1}=\mathrm{C}_{2m}^{m-1}q^{m+1}p^{m}$， $q_{2m+2}-q_{2m+1}=\mathrm{C}_{2m+1}^{m}q^{m+2}p^{m}$.

故 $p_{2m}-p_{2m+1}=\mathrm{C}_{2m}^{m-1}p^{m+1}q^{m}=p\cdot\left(\mathrm{C}_{2m}^{m-1}p^{m}q^{m}\right)>q\cdot\left(\mathrm{C}_{2m}^{m-1}p^{m}q^{m}\right)=\mathrm{C}_{2m}^{m-1}q^{m+1}p^{m}=q_{2m}-q_{2m+1}$，即

$p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}$.

另一方面，由于

$$p_{2m+2}-p_{2m}=\left(p_{2m+2}-p_{2m+1}\right)-\left(p_{2m}-p_{2m+1}\right)=\mathrm{C}_{2m+1}^{m}p^{m+2}q^{m}-\mathrm{C}_{2m}^{m-1}p^{m+1}q^{m}=p^{m}q^{m}\cdot p\left(p\cdot\mathrm{C}_{2m+1}^{m}-\mathrm{C}_{2m}^{m-1}\right)$$

$$=p^{m}q^{m}\cdot p\left(p\cdot\frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}-\frac{(2m)!}{(m-1)!(m+1)!}\right)=\frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}p^{m}q^{m}\cdot p\left(p-\frac{m}{2m+1}\right)$$

且同理有 $q_{2m+2}-q_{2m}=\dfrac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}p^{m}q^{m}\cdot q\left(q-\dfrac{m}{2m+1}\right)$.

故结合

$$p\left(p-\frac{m}{2m+1}\right)-q\left(q-\frac{m}{2m+1}\right)=(p-q)(p+q)-\frac{m}{2m+1}(p-q)=(p-q)-\frac{m}{2m+1}(p-q)=\frac{m+1}{2m+1}(p-q)>0$$

，

就能得到 $p_{2m+2}-p_{2m}>q_{2m+2}-q_{2m}$，即 $p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$，证毕.