2006年青海高考理科数学真题及答案

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1.（5分）已知集合M={x|x<3}，N={x|$\log_2 x$>1}，则M∩N=（　　）

A．∅　B．{x|0<x<3}　C．{x|1<x<3}　D．{x|2<x<3}

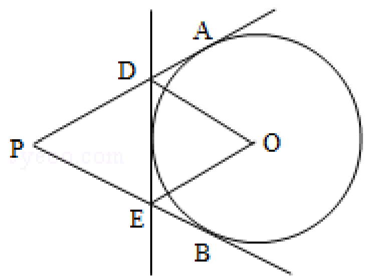
2.（5分）函数y=sin2x•cos2x的最小正周期是（　　）

A．2π　B．4π　C．$\frac{\pi}{4}$　D．$\frac{\pi}{2}$

3.（5分）$\frac{3}{(1-i)^2}$=（　　）

A．$\frac{3}{2}i$　B．$-\frac{3}{2}i$　C．i　D．－i

4.（5分）如图，PA、PB、DE分别与⊙O相切，若∠P=40°，则∠DOE等于（　　）度．



A．40　B．50　C．70　D．80

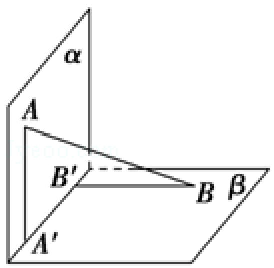
5.（5分）已知△ABC的顶点B，C在椭圆$\frac{x^2}{3}+y^2=1$上，顶点A是椭圆的一个焦点，且椭圆的另外一个焦点在BC边上，则△ABC的周长是（　　）

A．$2\sqrt{3}$　B．6　C．$4\sqrt{3}$　D．12

6.（5分）已知函数f（x）=lnx+1（x>0），则f（x）的反函数为（　　）

A．$y=e^{x+1}$（x∈R）　B．$y=e^{x-1}$（x∈R）　C．$y=e^{x+1}$（x>1）　D．$y=e^{x-1}$（x>1）

7.（5分）如图，平面α⊥平面β，A∈α，B∈β，AB与两平面α、β所成的角分别为$\frac{\pi}{4}$和$\frac{\pi}{6}$．过A、B分别作两平面交线的垂线，垂足为A′、B′，则AB：A′B′=（　　）



A. 2：1 B. 3：1 C. 3：2 D. 4：3

8.（5 分）函数 y=f（x）的图象与函数 g（x）=$\log_2 x$（x＞0）的图象关于原点对称，则 f（x）的表达式为（　　）

A. $f(x)=\frac{1}{\log_2 x}(x>0)$ B. $f(x)=\frac{1}{\log_2(-x)}(x<0)$

C. f（x）=－$\log_2 x$（x＞0）　D. f（x）=－$\log_2$（－x）（x＜0）

9.（5 分）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的一条渐近线方程为 $y=\frac{4}{3}x$，则双曲线的离心率为（　　）

A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

10.（5 分）若 f（sinx）=2－cos2x，则 f（cosx）等于（　　）

A. 2－sin2x B. 2+sin2x C. 2－cos2x D. 2+cos2x

11.（5 分）设 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若$\frac{S_3}{S_6}=\frac{1}{3}$，则$\frac{S_6}{S_{12}}=$（　　）

A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{9}$

12.（5 分）函数$f(x)=\sum_{n=1}^{19}|x-n|$的最小值为（　　）

A. 190 B. 171 C. 90 D. 45

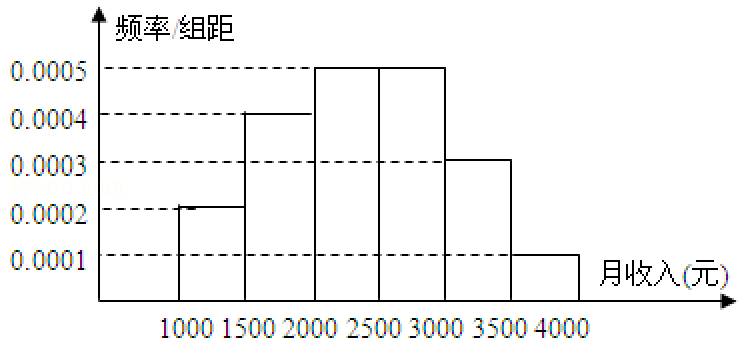
二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13.（4 分）在$(x^4+\frac{1}{x})^{10}$的展开式中常数项为____（用数字作答）.

14.（4 分）已知△ABC 的三个内角 A、B、C 成等差数列，且 AB=1，BC=4，则边 BC 上的中线 AD 的长为____.

15.（4 分）过点$(1,\sqrt{2})$的直线 l 将圆（x－2）^{2}+y^2=4 分成两段弧，当劣弧所对的圆心角最小时，直线 l 的斜率 k=____.

16.（4 分）一个社会调查机构就某地居民的月收入调查了 10000 人，并根据所得数据画了样本的频率分布直方图（如图）．为了分析居民的收入与年龄、学历、职业等方面的关系，要从这 10000 人中再用分层抽样方法抽出 100 人作进一步调查，则在[2500，3000)（元）月收入段应抽出____人.



三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17.（12 分）已知向量 $\vec{a}=(\sin\theta,\sqrt{3})$，$\vec{b}=(1,\cos\theta)$，$\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

（1）若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，求 θ；

（2）求 $|\vec{a}+\vec{b}|$ 的最大值.

18.（12 分）某批产品成箱包装，每箱 5 件，一用户在购进该批产品前先取出 3 箱，再从每箱中任意出取 2 件产品进行检验．设取出的第一、二、三箱中分别有 0 件、1 件、2 件二等品，其余为一等品.

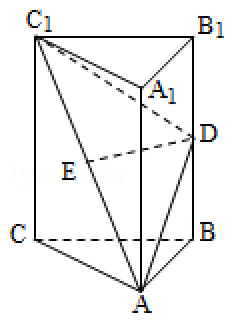
（1）用 ξ 表示抽检的 6 件产品中二等品的件数，求 ξ 的分布列及 ξ 的数学期望；

（2）若抽检的 6 件产品中有 2 件或 2 件以上二等品，用户就拒绝购买这批产品，求这批产品被用户拒绝的概率.

19.（12 分）如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，AB=BC，D、E 分别为 BB_1、AC_1 的中点.

（I）证明：ED 为异面直线 BB_1 与 AC_1 的公垂线；

（II）设 $AA_1=AC=\sqrt{2}AB$，求二面角 A_1-AD-C_1 的大小.



20.（12 分）设函数 f（x）=（x+1）ln（x+1）．若对所有的 x≥0，都有 f（x）≥ax 成立，求实数 a 的取值范围.

21．（14 分）已知抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F，A、B 是抛物线上的两动点，且

$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}(\lambda>0)$．过A、B两点分别作抛物线的切线，设其交点为M．

（Ⅰ）证明$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}$为定值；

（Ⅱ）设△ABM的面积为S，写出S=f（λ）的表达式，并求S的最小值．

22．（12分）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且方程$x^2-a_nx-a_n=0$有一根为S_n-1，n=1，2，3，….

（1）求a_1，a_2；

（2）猜想数列$\{S_n\}$的通项公式，并给出严格的证明．

2006年青海高考理科数学真题参考答案

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1．（5分）已知集合$M=\{x|x<3\}$，$N=\{x|\log_2x>1\}$，则$M\cap N=$（　　）

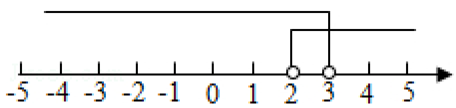
A．∅　　B．$\{x|0<x<3\}$　C．$\{x|1<x<3\}$　D．$\{x|2<x<3\}$

【分析】解出集合N，结合数轴求交集．

【解答】解：$N=\{x|\log_2x>1\}=\{x|x>2\}$，

用数轴表示可得答案D

故选D．



2．（5分）函数$y=\sin2x\cdot\cos2x$的最小正周期是（　　）

A．2π　B．4π　C．$\frac{\pi}{4}$　D．$\frac{\pi}{2}$

【分析】将函数化简为：$y=A\sin(\omega x+\phi)$的形式即可得到答案．

【解答】解：$y=\sin2x\cdot\cos2x=\frac{1}{2}\sin4x$所以最小正周期为$T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，

故选D

3．（5分）$\frac{3}{(1-i)^2}=$（　　）

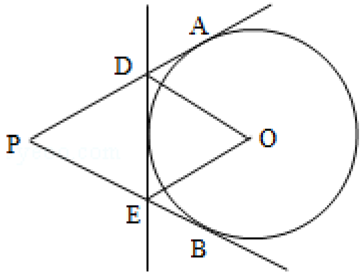
A. $\frac{3}{2}i$ B. $-\frac{3}{2}i$ C. i D. - i

【分析】化简复数的分母，再分子、分母同乘分母的共轭复数，化简即可.

【解答】解：$\frac{3}{(1-i)^2}=\frac{3}{-2i}=\frac{3i}{-2i^2}=\frac{3i}{2}=\frac{3}{2}i$

故选 A.

4.（5 分）如图，PA、PB、DE 分别与⊙O 相切，若∠P=40°，则∠DOE 等于（　　）度.



A. 40 B. 50 C. 70 D. 80

【分析】连接 OA、OB、OP，由切线的性质得∠AOB=140°，再由切线长定理求得∠DOE 的度数.

【解答】解：连接 OA、OB、OP，

∵∠P=40°，

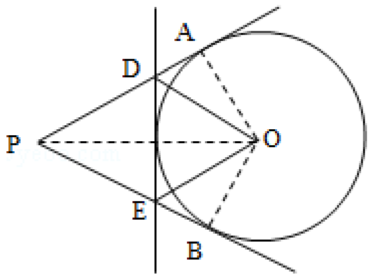
∴∠AOB=140°，

∵PA、PB、DE 分别与⊙O 相切，

∴∠AOD=∠POD，∠BOE=∠POE，

∴∠DOE=$\frac{1}{2}$∠AOB=$\frac{1}{2}$×140°=70°.

故选 C.



5.（5 分）已知△ABC 的顶点 B，C 在椭圆$\frac{x^2}{3}+y^2=1$上，顶点 A 是椭圆的一个焦点，且椭圆

的另外一个焦点在BC边上，则△ABC的周长是（　　）

A．$2\sqrt{3}$ B．6　　C．$4\sqrt{3}$ D．12

【分析】由椭圆的定义：椭圆上一点到两焦点的距离之和等于长轴长2a，可得△ABC的周长．

【解答】解：由椭圆的定义：椭圆上一点到两焦点的距离之和等于长轴长2a，

可得△ABC的周长为4a=$4\sqrt{3}$，

故选C

6．（5分）已知函数f（x）=lnx+1（x＞0），则f（x）的反函数为（　　）

A．$y=e^{x+1}$（x∈R） B．$y=e^{x-1}$（x∈R）　　C．$y=e^{x+1}$（x＞1） D．$y=e^{x-1}$（x＞1）

【分析】本题考查反函数的概念、求反函数的方法、指数式与对数式的互化，求函数的值域；将y=lnx+1看做方程解出x，然后由原函数的值域确定反函数的定义域即可．

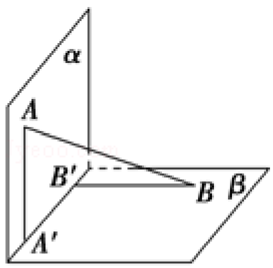
【解答】解：由y=lnx+1解得$x=e^{y-1}$，即：$y=e^{x-1}$

∵x＞0，∴y∈R

所以函数f（x）=lnx+1（x＞0）反函数为$y=e^{x-1}$（x∈R）

故选B

7．（5分）如图，平面α⊥平面β，A∈α，B∈β，AB与两平面α、β所成的角分别为$\frac{\pi}{4}$和$\frac{\pi}{6}$．过A、B分别作两平面交线的垂线，垂足为A′、B′，则AB：A′B′=（　　）



A．2：1 B．3：1 C．3：2 D．4：3

【分析】设AB的长度为a用a表示出A'B'的长度，即可得到两线段的比值．

【解答】解：连接AB'和A'B，设AB=a，可得AB与平面α所成的角为$\angle BAB'=\frac{\pi}{4}$，

在Rt△BAB'中有$AB'=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，同理可得AB与平面β所成的角为$\angle ABA'=\frac{\pi}{6}$，

所以$A'A=\frac{1}{2}a$，因此在Rt△AA'B'中$A'B'=\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2-(\frac{1}{2}a)^2}=\frac{1}{2}a$，

所以AB：A'B'=$a：\frac{1}{2}a=2：1$，

故选A．

8．（5分）函数y=f（x）的图象与函数g（x）=$\log_2x$（x＞0）的图象关于原点对称，则f（x）的表达式为（　　）

A．$f(x)=\frac{1}{\log_2x}(x>0)$ B．$f(x)=\frac{1}{\log_2(-x)}(x<0)$

C．f（x）=﹣$\log_2x$（x＞0）　　D．f（x）=﹣$\log_2$（﹣x）（x＜0）

【分析】先设函数f（x）上的点为（x，y），根据（x，y）关于原点的对称点为（﹣x，﹣y）且函数y=f（x）的图象与函数g（x）=$\log_2x$（x＞0）的图象关于原点对称，得到x与y的关系式，即得答案．

【解答】解：设（x，y）在函数f（x）的图象上

∵（x，y）关于原点的对称点为（﹣x，﹣y），

所以（﹣x，﹣y）在函数g（x）上

∴﹣y=$\log_2$（﹣x）⇒f（x）=﹣$\log_2$（﹣x）（x＜0）

故选D．

9．（5分）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的一条渐近线方程为$y=\frac{4}{3}x$，则双曲线的离心率为（　　）

A．$\frac{5}{3}$　B．$\frac{\sqrt{21}}{3}$ C．$\frac{5}{4}$　D．$\frac{\sqrt{7}}{2}$

【分析】由题意设出双曲线的方程，得到它的一条渐近线方程$y=\frac{b}{a}x$即$y=\frac{4}{3}x$，由此可得b：a=4：3，结合双曲线的平方关系可得c与a的比值，求出该双曲线的离心率．

【解答】解：∵双曲线的中心在原点，焦点在x轴上，

∴设双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，（a＞0，b＞0）

由此可得双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，结合题意一条渐近线方程为 $y=\frac{4}{3}x$，

得 $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$，设 b=4t，a=3t，则 $c=\sqrt{a^2+b^2}=5t$（t＞0）

∴该双曲线的离心率是 $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$.

故选 A.

10.（5 分）若 f（sinx）=2﹣cos2x，则 f（cosx）等于（　　）

A. 2﹣sin2x B. 2+sin2x　C. 2﹣cos2x D. 2+cos2x

【分析】本题考查的知识点是函数解析式的求法，根据已知中 f（sinx）=2﹣cos2x，结合倍角公式对解析式进行凑配，不难得到函数 f（x）的解析式，然后将 cosx 代入，并化简即可得到答案.

【解答】解：∵f（sinx）=2﹣（1﹣2sin²x）=1+2sin²x，

∴f（x）=1+2x²，（﹣1≤x≤1）

∴f（cosx）=1+2cos²x=2+cos2x.

故选 D

11.（5 分）设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $\frac{S_3}{S_6}=\frac{1}{3}$，则 $\frac{S_6}{S_{12}}=$（　　）

A. $\frac{3}{10}$　B. $\frac{1}{3}$　C. $\frac{1}{8}$　D. $\frac{1}{9}$

【分析】根据等差数列的前 n 项和公式，用 a_1 和 d 分别表示出 s_3 与 s_6，代入 $\frac{S_3}{S_6}=\frac{1}{3}$ 中，整理得 $a_1=2d$，再代入 $\frac{S_6}{S_{12}}$ 中化简求值即可.

【解答】解：设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，

由等差数列的求和公式可得 $\frac{S_3}{S_6}=\frac{3a_1+3d}{6a_1+15d}=\frac{1}{3}$，可得 $a_1=2d$ 且 d≠0，

$\therefore\frac{S_6}{S_{12}}=\frac{6a_1+15d}{12a_1+66d}=\frac{27d}{90d}=\frac{3}{10}$，

故选 A.

12.（5分）函数$f(x)=\sum_{n=1}^{19}|x-n|$的最小值为（　　）

A．190　B．171　C．90　 D．45

【分析】利用绝对值的几何意义求解或者绝对值不等式的性质求解.

【解答】解法一：f（x）=$\sum_{n=1}^{19}|x-n|$=|x﹣1|+|x﹣2|+|x﹣3|+|x﹣19|表示数轴上一点到1，2，3，…，19的距离之和，

可知x在1﹣19最中间时f（x）取最小值．即x=10时f（x）有最小值90，

故选C．

解法二：|x﹣1|+|x﹣19|≥18，当1≤x≤19时取等号；

|x﹣2|+|x﹣18|≥16，当2≤x≤18时取等号；

|x﹣3|+|x﹣17|≥14，当3≤x≤17时取等号；

…

|x﹣9|+|x﹣11|≥2，当9≤x≤11时取等号；

|x﹣10|≥0，当x=10时取等号；

将上述所有不等式累加得|x﹣1|+|x﹣2|+|x﹣3|+…+|x﹣19|≥18+16+14+…+2+0=90（当且仅当x=10时取得最小值）

故选C．

二、填空题（共4小题，每小题4分，满分16分）

13.（4分）在$(x^4+\frac{1}{x})^{10}$的展开式中常数项为__45__（用数字作答）.

【分析】利用二项式的通项公式（让次数为0，求出r）就可求出答案.

【解答】解：$T_{r+1}=C_{10}^{r}(x^4)^{10-r}(\frac{1}{x})^r=C_{10}^{r}x^{40-5r}$要求常数项，

即40﹣5r=0，

可得r=8代入通项公式可得$T_{r+1}=C_{10}^{8}=C_{10}^{2}=45$

故答案为：45．

14.（4分）已知△ABC的三个内角A、B、C成等差数列，且AB=1，BC=4，则边BC上的中线

AD 的长为__$\sqrt{3}$__.

【分析】先根据三个内角 A、B、C 成等差数列和三角形内角和为 π 可求得 B 的值，进而利用 AD 为边 BC 上的中线求得 BD，最后在△ABD 中利用余弦定理求得 AD.

【解答】解：∵△ABC 的三个内角 A、B、C 成等差数列

∴A+C=2B

∵A+B+C=π

∴ $\angle B=\frac{\pi}{3}$

∵AD 为边 BC 上的中线

∴BD=2，

由余弦定理定理可得 $AD=\sqrt{AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot \cos B}=\sqrt{3}$

故答案为：$\sqrt{3}$

15．（4 分）过点 $(1,\sqrt{2})$ 的直线 l 将圆（x－2）^{2}+y^2=4 分成两段弧，当劣弧所对的圆心角最小时，直线 l 的斜率 k=__$\frac{\sqrt{2}}{2}$__.

【分析】本题考查的是直线垂直时斜率之间的关系，及直线与圆的相关性质，要处理本题我们先要画出满足条件的图形，数形结合容易得到符合题目中的条件的数理关系，由劣弧所对的圆心角最小弦长最短，及过圆内一点最短的弦与过该点的直径垂直，易得到解题思路.

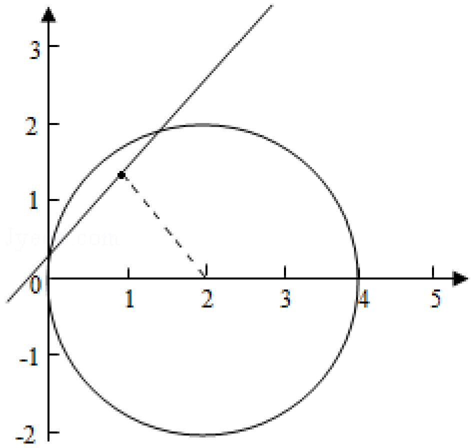
【解答】解：如图示，由图形可知：

点 A $(1,\sqrt{2})$ 在圆（x－2）^{2}+y^2=4 的内部，

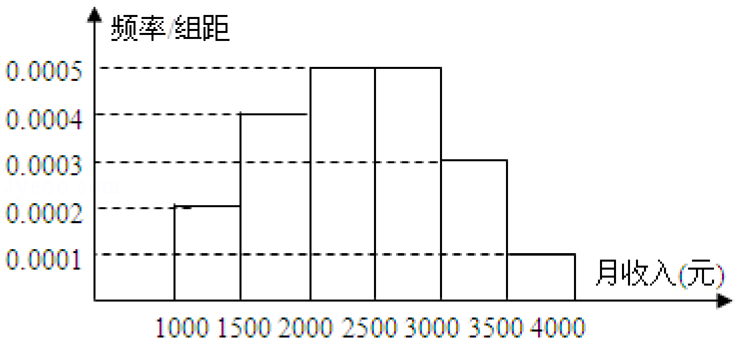
圆心为 O（2，0）要使得劣弧所对的圆心角最小，

只能是直线 l⊥OA，

所以 $k_1=-\frac{1}{k_{OA}}=-\frac{1}{-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



16.（4 分）一个社会调查机构就某地居民的月收入调查了 10000 人，并根据所得数据画了样本的频率分布直方图（如图）．为了分析居民的收入与年龄、学历、职业等方面的关系，要从这 10000 人中再用分层抽样方法抽出 100 人作进一步调查，则在[2500，3000)（元）月收入段应抽出__25__人．



【分析】直方图中小矩形的面积表示频率，先计算出[2500，3000）内的频率，再计算所需抽取人数即可．

【解答】解：由直方图可得[2500，3000)（元）月收入段共有 $10000\times0.0005\times500=2500$ 人

按分层抽样应抽出 $2500\times\dfrac{100}{10000}=25$ 人

故答案为：25

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17.（12 分）已知向量 $\vec{a}=(\sin\theta,\sqrt{3})$，$\vec{b}=(1,\cos\theta)$，$\theta\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$．

（1）若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，求 θ；

（2）求 $|\vec{a}+\vec{b}|$ 的最大值．

【分析】(1)利用向量垂直的充要条件列出方程，利用三角函数的商数关系求出正切，求出角.

（2）利用向量模的平方等于向量的平方，利用三角函数的平方关系及公式 $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\beta)$，化简 $|\vec{a}+\vec{b}|^2$，利用三角函数的有界性求出范围.

【解答】解：(1) 因为 $\vec{a}\perp\vec{b}$，所以 $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=0$

得 $\tan\theta=-\sqrt{3}$

又 $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，

所以 $\theta=-\frac{\pi}{3}$

(2) 因为 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\sin\theta+1)^2+(\cos\theta+\sqrt{3})^2$

$=5+4\sin(\theta+\frac{\pi}{3})$

所以当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，$|\vec{a}+\vec{b}|^2$ 的最大值为 5+4=9

故 $|\vec{a}+\vec{b}|$ 的最大值为 3

18.（12 分）某批产品成箱包装，每箱 5 件，一用户在购进该批产品前先取出 3 箱，再从每箱中任意出取 2 件产品进行检验．设取出的第一、二、三箱中分别有 0 件、1 件、2 件二等品，其余为一等品．

(1) 用 ξ 表示抽检的 6 件产品中二等品的件数，求 ξ 的分布列及 ξ 的数学期望；

(2) 若抽检的 6 件产品中有 2 件或 2 件以上二等品，用户就拒绝购买这批产品，求这批产品被用户拒绝的概率.

【分析】(1) 由取出的第一、二、三箱中分别有 0 件、1 件、2 件二等品可知变量 ξ 的取值，结合变量对应的事件做出这四个事件发生的概率，写出分布列和期望.

(2) 由上一问做出的分布列可以知道，$P(\xi=2)=\frac{15}{50}$，$P(\xi=3)=\frac{2}{50}$，这两个事件是互斥的，根据互斥事件的概率公式得到结果.

【解答】解 (1) 由题意知抽检的 6 件产品中二等品的件数 $\xi=0，1，2，3$

$P(\xi=0)=\frac{C_4^2}{C_5^2}\cdot\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{18}{100}=\frac{9}{50}$ $P(\xi=1)=\frac{C_4^1}{C_5^2}\cdot\frac{C_3^2}{C_5^2}+\frac{C_4^2}{C_5^2}\cdot\frac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_5^2}=\frac{24}{50}=\frac{12}{25}$

$P(\xi=2)=\frac{C_4^1}{C_5^2}\cdot\frac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_5^2}+\frac{C_4^2}{C_5^2}\cdot\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{15}{50}$ $P(\xi=3)=\frac{C_4^1}{C_5^2}\cdot\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{2}{50}=\frac{1}{25}$,

∴ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{9}{50}$	$\frac{24}{50}$	$\frac{15}{50}$	$\frac{2}{50}$

∴ξ 的数学期望 E（ξ）$=0\times\frac{9}{50}+1\times\frac{24}{50}+2\times\frac{15}{50}+3\times\frac{2}{50}=1.2$

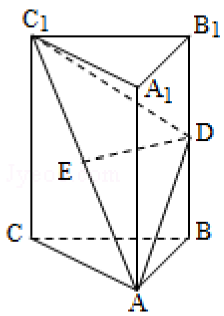
（2）∵P（ξ=2）$=\frac{15}{50}$，P（ξ=3）$=\frac{2}{50}$，这两个事件是互斥的

∴P（ξ≥2）$=P(\xi=2)+P(\xi=3)=\frac{15}{50}+\frac{2}{50}=\frac{17}{50}$

19.（12 分）如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，AB=BC，D、E 分别为 BB_1、AC_1 的中点.

（I）证明：ED 为异面直线 BB_1 与 AC_1 的公垂线；

（II）设 $AA_1=AC=\sqrt{2}AB$，求二面角 A_1-AD-C_1 的大小.



【分析】（Ⅰ）设 O 为 AC 中点，连接 EO，BO，欲证 ED 为异面直线 AC_1 与 BB_1 的公垂线，只需证明 ED 与直线 AC_1 与 BB_1 都垂直且相交，根据线面垂直的性质可知 $ED\perp CC_1$，而 $ED\perp BB_1$，即可证得；

（Ⅱ）连接 A_1E，作 $EF\perp AD$，垂足为 F，连接 A_1F，根据二面角的平面角定义可知 $\angle A_1FE$ 为二面角 A_1-AD-C_1 的平面角，在三角形 A_1FE 中求出此角即可.

【解答】解：（Ⅰ）设 O 为 AC 中点，连接 EO，BO，则 $EO\underline{\underline{/\!/}}\frac{1}{2}C_1C$，又 $C_1C\underline{\underline{/\!/}}B_1B$，所以 $EO\underline{\underline{/\!/}}DB$，EOBD 为平行四边形，ED∥OB.（2 分）

∵AB=BC，

∴$BO\perp AC$，

又平面 $ABC\perp$ 平面 ACC_1A_1，BOÌ 面 ABC，

故 $BO\perp$ 平面 ACC_1A_1，

∴$ED\perp$ 平面 ACC_1A_1，$ED\perp AC_1$，$ED\perp CC_1$，

∴$ED\perp BB_1$，ED 为异面直线 AC_1 与 BB_1 的公垂线.（6 分）

（Ⅱ）连接 A_1E，由 $AA_1=AC=\sqrt{2}AB$ 可知，A_1ACC_1 为正方形，

∴$A_1E\perp AC_1$，又由 $ED\perp$ 平面 ACC_1A_1 和 EDÌ 平面 ADC_1 知平面

$ADC_1\perp$ 平面 A_1ACC_1，

∴$A_1E\perp$ 平面 ADC_1.

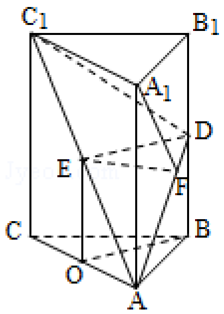
作 $EF\perp AD$，垂足为 F，连接 A_1F，则 $A_1F\perp AD$，$\angle A_1FE$ 为二面角 A_1-AD-C_1 的平面角.

不妨设 $AA_1=2$，则 $AC=2$，$AB=\sqrt{2}$，$ED=OB=1$，$EF=\frac{AE\times ED}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，

$\tan\angle A_1FE=\sqrt{3}$，

∴$\angle A_1FE=60°$.

所以二面角 A_1-AD-C_1 为 $60°$.（12 分）



20.（12 分）设函数 $f(x)=(x+1)\ln(x+1)$. 若对所有的 $x\geq 0$，都有 $f(x)\geq ax$ 成立，求实数 a 的取值范围.

【分析】令 $g(x)=(x+1)\ln(x+1)-ax$ 对 $g(x)$，求导得 $g'(x)=\ln(x+1)+1-a$，令 $g'(x)=0\Rightarrow x=e^{a-1}-1$，

当 $a\leq 1$ 时，对所有的 $x>0$ 都有 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为单调增函数，又 $g(0)=0$，所以对 $x\geq 0$ 时有 $g(x)\geq g(0)$，即当 $a\leq 1$ 时都有 $f(x)\geq ax$，所以 $a\leq 1$ 成立，当 $a>1$ 时，对于 $0<x<e^{a-1}-1$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,e^{a-1}-1)$ 上是减函数，又 $g(0)=0$，所以对于 $0<x<e^{a-1}-1$ 有 $g(x)<g(0)$，即 $f(x)<ax$，所以当 $a>1$ 时 $f(x)\geq ax$ 不一定成立

综上所述即可得出 a 的取值范围.

【解答】解法一：

令 g（x）=（x+1）ln（x+1）- ax，

对函数 g（x）求导数：g′（x）=ln（x+1）+1 - a

令 g′（x）=0，解得 $x=e^{a-1}-1$，

（i）当 a≤1 时，对所有 x>0，g′（x）>0，所以 g（x）在[0，+∞）上是增函数，

又 g（0）=0，所以对 x≥0，都有 g（x）≥g（0），

即当 a≤1 时，对于所有 x≥0，都有 f（x）≥ax.

（ii）当 a>1 时，对于 $0<x<e^{a-1}-1$，g′（x）<0，所以 g（x）在（0，$e^{a-1}-1$）是减函数，

又 g（0）=0，所以对 $0<x<e^{a-1}-1$，都有 g（x）<g（0），

即当 a>1 时，不是对所有的 x≥0，都有 f（x）≥ax 成立.

综上，a 的取值范围是（-∞，1].

解法二：

令 g（x）=（x+1）ln（x+1）- ax，

于是不等式 f（x）≥ax 成立即为 g（x）≥g（0）成立.

对函数 g（x）求导数：g′（x）=ln（x+1）+1 - a

令 g′（x）=0，解得 $x=e^{a-1}-1$，

当 $x>e^{a-1}-1$ 时，g′（x）>0，g（x）为增函数，

当 $-1<x<e^{a-1}-1$，g′（x）<0，g（x）为减函数，

所以要对所有 x≥0 都有 g（x）≥g（0）充要条件为 $e^{a-1}-1\leq 0$.

由此得 a≤1，即 a 的取值范围是（-∞，1].

21.（14 分）已知抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F，A、B 是抛物线上的两动点，且 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}(\lambda>0)$. 过 A、B 两点分别作抛物线的切线，设其交点为 M.

（Ⅰ）证明 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}$ 为定值；

（Ⅱ）设△ABM 的面积为 S，写出 S=f（λ）的表达式，并求 S 的最小值.

【分析】(1) 设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），M（x_o，y_o），根据抛物线方程可得焦点坐标和准线方程，设直线方程与抛物线方程联立消去 y，根据判别式大于 0 求得 x_1+x_2 和 x_1x_2，根据曲线

$4y=x^2$上任意一点斜率为$y'=\frac{x}{2}$，可得切线AM和BM的方程，联立方程求得交点坐标，求得$\overrightarrow{FM}$和$\overrightarrow{AB}$，进而可求得$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}$的结果为0，进而判断出$AB\perp FM$.

（2）利用（1）的结论，根据x_1+x_2的关系式求得k和λ的关系式，进而求得弦长AB，可表示出△ABM面积．最后根据均值不等式求得S的范围，得到最小值．

【解答】解：(1) 设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），M（x_o，y_o），焦点F（0，1），准线方程为$y=-1$，

显然AB斜率存在且过F（0，1）

设其直线方程为$y=kx+1$，联立$4y=x^2$消去y得：$x^2-4kx-4=0$，

判别式$\triangle=16(k^2+1)>0$.

$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$

于是曲线$4y=x^2$上任意一点斜率为$y'=\frac{x}{2}$，则易得切线AM，BM方程分别为$y=(\frac{1}{2})x_1(x-x_1)+y_1$，$y=(\frac{1}{2})x_2(x-x_2)+y_2$，其中$4y_1=x_1^2$，$4y_2=x_2^2$，联立方程易解得交点M坐标，$x_o=\frac{x_1+x_2}{2}=2k$，$y_o=\frac{x_1x_2}{4}=-1$，即M（$\frac{x_1+x_2}{2}$，$-1$）

从而，$\overrightarrow{FM}=(\frac{x_1+x_2}{2},-2)$，$\overrightarrow{AB}(x_2-x_1,y_2-y_1)$

$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)(x_2-x_1)-2(y_2-y_1)=\frac{1}{2}(x_2^2-x_1^2)-2[\frac{1}{4}(x_2^2-x_1^2)]=0$，（定值）命题得证.

这就说明$AB\perp FM$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知在△ABM中，$FM\perp AB$，因而$S=\frac{1}{2}|AB||FM|$.

$\because\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}(\lambda>0)$，

$\therefore(-x_1,1-y_1)=\lambda(x_2,y_2-1)$，即$\begin{cases}-x_1=\lambda x_2\\1-y_1=\lambda(y_2-1)\end{cases}$，

而$4y_1=x_1^2$，$4y_2=x_2^2$，

则$x_2^2=\frac{4}{\lambda}$，$x_1^2=4\lambda$，

$|FM|=\sqrt{(\frac{x_1+x_2}{2})^2+(-2)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}x_1^2+\frac{1}{4}x_2^2+\frac{1}{2}x_1x_2+4}=\sqrt{\lambda+\frac{1}{\lambda}+2}=\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

因为|AF|、|BF|分别等于A、B到抛物线准线$y=-1$的距离，所以

$|AB|=|AF|+|BF|=y_1+y_2+2=\frac{1}{4}x_1^2+\frac{1}{4}x_2^2+2=\lambda+\frac{1}{\lambda}+2=\left(\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^2$.

于是 $S=\frac{1}{2}|AB||FM|=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^3$，

由 $\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\geqslant 2$ 知 $S\geqslant 4$，且当 $\lambda=1$ 时，S 取得最小值 4.

22.（12 分）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且方程 $x^2-a_nx-a_n=0$ 有一根为 S_n-1，n=1，2，3，….

（1）求 a_1，a_2；

（2）猜想数列 $\{S_n\}$ 的通项公式，并给出严格的证明.

【分析】（1）验证当 n=1 时，$x^2-a_1x-a_1=0$ 有一根为 a_1 根据根的定义，可求得 a_1，同理，当 n=2 时，也可求得 a_2；

（2）用数学归纳法证明数列问题时分为两个步骤，第一步，先证明当当 n=1 时，已知结论成立，第二步，先假设 n=k 时结论成立，利用此假设结合题设条件证明当 n=k+1 时，结论也成立即可.

【解答】解：（1）当 n=1 时，$x^2-a_1x-a_1=0$ 有一根为 $S_1-1=a_1-1$，

于是 $(a_1-1)^2-a_1(a_1-1)-a_1=0$，解得 $a_1=\frac{1}{2}$.

当 n=2 时，$x^2-a_2x-a_2=0$ 有一根为 $S_2-1=a_2-\frac{1}{2}$，

于是 $\left(a_2-\frac{1}{2}\right)^2-a_2\left(a_2-\frac{1}{2}\right)-a_2=0$，

解得 $a_2=\frac{1}{6}$.

（2）由题设 $(S_n-1)^2-a_n(S_n-1)-a_n=0$，

$S_n^2-2S_n+1-a_nS_n=0$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，

代入上式得 $S_{n-1}S_n-2S_n+1=0$. ①

由（1）得 $S_1=a_1=\frac{1}{2}$，$S_2=a_1+a_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

由①可得 $S_3=\frac{3}{4}$. 由此猜想 $S_n=\frac{n}{n+1}$，n=1，2，3，.

下面用数学归纳法证明这个结论.

（i）n=1 时已知结论成立.

（ii）假设 n=k 时结论成立，即 $S_k=\frac{k}{k+1}$，当 n=k+1 时，由①得 $S_{k+1}=\frac{1}{2-S_k}$，即 $S_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}$，

故 n=k+1 时结论也成立.

综上，由（i）、（ii）可知 $S_n=\frac{n}{n+1}$对所有正整数 n 都成立.