1996年北京高考文科数学真题及答案

第Ⅰ卷（选择题共65分）

注意事项：

1．答案Ⅰ卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上．

2．每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，在选涂其它答案，不能答在试题卷上．

3．考试结束，监考人将本试卷和答题卡一并收回．

一．选择题：本大题共15小题；第1—10题每小题4分，第11—15题每小题5分，共65分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

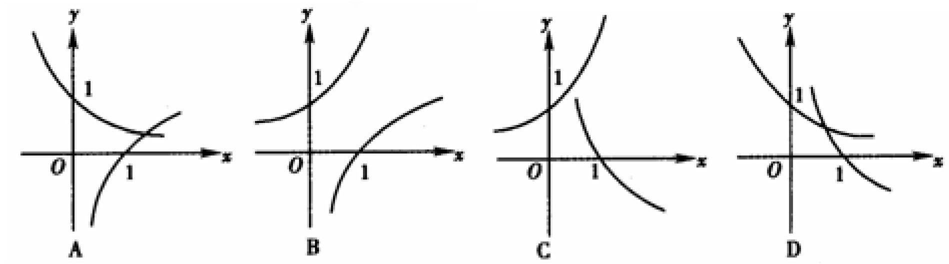
1．设全集$I=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，集合$A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{3,5\}$．则

A．$I=A\cup B$　　B．$I=\overline{A}\cup B$　　C．$I=A\cup\overline{B}$　　D．$I=\overline{A}\cup\overline{B}$

【答案】C

【解析】显然C正确．

2．当$a>1$时，在同一坐标系中，函数$y=a^{-x}$与$y=\log_a x$的图像



【答案】A

【解析】当$a>1$时，函数$y=a^{-x}$是减函数，且过点$(0,1)$；而函数$y=\log_a x$为增函数，且过点$(1,0)$．

3．若$\sin^2 x>\cos^2 x$，则x的取值范围是

A. $\left\{x \middle| 2k\pi-\frac{3}{4}\pi<x<2k\pi+\frac{1}{4}\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$

B. $\left\{x \middle| 2k\pi+\frac{1}{4}\pi<x<2k\pi+\frac{5}{4}\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$

C. $\left\{x \middle| k\pi-\frac{1}{4}\pi<x<k\pi+\frac{1}{4}\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$

D. $\left\{x \middle| k\pi+\frac{1}{4}\pi<x<k\pi+\frac{3}{4}\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$

【答案】D

【解析】$\sin^2 x>\cos^2 x\Rightarrow \sin^2 x>\frac{1}{2}\Rightarrow \sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}$或$\sin x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得$2k\pi+\frac{\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{3\pi}{4}(k\in Z)$或$2k\pi-\frac{3\pi}{4}<x<2k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in Z)$，即$(2k-1)\pi+\frac{\pi}{4}<x<(2k-1)\pi+\frac{3\pi}{4}(k\in Z)$，所以$x$的取值范围是$\left\{x \middle| k\pi+\frac{1}{4}\pi<x<k\pi+\frac{3}{4}\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

4．复数$\frac{(2+2i)^4}{(1-\sqrt{3}i)^5}$等于

A．$1+\sqrt{3}i$　　B．$-1+\sqrt{3}i$　　C．$1-\sqrt{3}i$　　D．$-1-\sqrt{3}i$

【答案】B

【解析】$\frac{(2+2i)^4}{(1-\sqrt{3}i)^5}=\frac{2^4(1+i)^4}{2^5(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^5}=\frac{(2i)^2}{2(-\omega)^5}=-1+\sqrt{3}i$.

5．6名同学排成一排，其中甲、乙两人必须排在一起的不同排法有

A．720种　　B．360种　　C．240种　　D．120种

【答案】C

【解析】将甲、乙两人捆绑在一起，不同的排法有$A_5^5A_2^2=240$.

6．已知α是第三象限角且$\sin\alpha=-\frac{24}{25}$，则$\tan\frac{\alpha}{2}=$

A．$\frac{4}{3}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$-\frac{3}{4}$　　D．$-\frac{4}{3}$

【答案】D

【解析】由已知得$\cos\alpha=-\frac{7}{25}$，所以$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$=\frac{1-(-\frac{7}{25})}{-\frac{24}{25}}=-\frac{4}{3}$.

7．如果直线l,m与平面α,β,γ满足：$l=\beta\cap\gamma,l//\alpha,m\subset\alpha$和$m\perp\gamma$，那么必有

A．$\alpha\perp\gamma$且$l\perp m$　　B．$\alpha\perp\gamma$且$m//\beta$　　C．$m//\beta$且$l\perp m$　　D．$\alpha//\beta$且$\alpha\perp\gamma$

【答案】A

【解析】略.

8．当$-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$时，函数$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$的

A．最大值是1，最小值是-1　　B．最大值是1，最小值是$-\frac{1}{2}$

C．最大值是2，最小值是-2　　D．最大值是2，最小值是-1

【答案】D

【解析】因为$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$，由已知$-\frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{6}$．故当$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{\pi}{6}$时，$f(x)$有最大值是2；当$x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}$，即$x=-\frac{\pi}{2}$时，$f(x)$有最小值是$-1$.

9．中心在原点，准线方程为$x=\pm4$，离心率为$\frac{1}{2}$的椭圆方程是

A．$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　B．$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$

C．$\frac{x^2}{4}+y^2=1$　　D．$x^2+\frac{y^2}{4}=1$

【答案】A

【解析】由题设可得$\dfrac{a^2}{c}=4,\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，解得$a=2,c=1$，所以椭圆方程是$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

10．圆锥母线长为 1，侧面展开图圆心角为240°，该圆锥的体积是

A．$\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{81}$　　B．$\dfrac{8\pi}{81}$　　C．$\dfrac{4\sqrt{5}\pi}{81}$　　D．$\dfrac{10\pi}{81}$

【答案】C

【解析】设圆锥底面半径为r，则$\dfrac{2\pi r}{1}=\dfrac{240^\circ}{360^\circ}\times 2\pi$，得$r=\dfrac{2}{3}$，则圆锥高为$\sqrt{1-(\dfrac{2}{3})^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，

圆锥的体积是$\dfrac{1}{3}\pi(\dfrac{2}{3})^2\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{4\sqrt{5}\pi}{81}$.

11．椭圆$25x^2-150x+9y^2+18y+9=0$的两个焦点坐标是

A．$(-3,5),(-3,-3)$　　B．$(3,3),(3,-5)$

C．$(1,1),(-7,1)$　　D．$(7,-1),(-1,-1)$

【答案】B

【解析】椭圆的标准方程为$\dfrac{(y+1)^2}{5^2}+\dfrac{(x-3)^2}{3^2}=1$，而$\dfrac{y^2}{5^2}+\dfrac{x^2}{3^2}=1$的焦点为$(0,\pm 4)$，所以

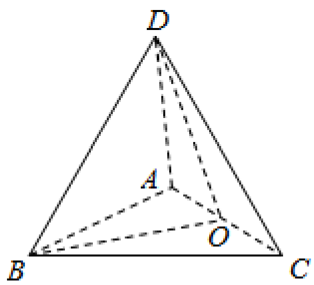
$\dfrac{(y+1)^2}{5^2}+\dfrac{(x-3)^2}{3^2}=1$的焦点坐标是$(3,3),(3,-5)$.

12．将边长为a的正方形$ABCD$沿对角线AC折起，使得$BD=a$，则三棱锥$D-ABC$的体积为

A．$\dfrac{a^3}{6}$　　B．$\dfrac{a^3}{12}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{12}a^3$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$

【答案】D

【解析】取 AC 的中点 O，连接 BO,DO，如图所示.



$\Delta ABC,\Delta ADC$ 均为等腰直角三角形，$BO=DO=\frac{AC}{2}=\frac{\sqrt{2}a}{2}$，

$\therefore\angle BOD=\frac{\pi}{2}$，则 $DO\perp$ 面 ABC，DO 就是三棱锥 $D-ABC$

的高，所以 $V_{D-ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{\sqrt{2}a}{2}=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$.

13．等差数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项和为 30，前 $2m$ 项和为 100，则它的前 $3m$ 项和为

A．130　　　B．170　　　C．210　　　D．260

【答案】C

【解析】由已知得 $S_m=30,S_{2m}=100$，则 $S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m}$ 成等差数列，所以

$S_{3m}=3(S_{2m}-S_m)=210$.

14．设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(0<a<b)$ 的半焦距为 c，直线 l 过 $(a,0),(0,b)$ 两点．已知原点

到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{4}c$，则双曲线的离心率为

A．2　　　B．$\sqrt{3}$　　　C．$\sqrt{2}$　　　D．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】A

【解析】直线 l 的方程为 $bx+ay-ab=0$，原点到直线 l 的距离为 $\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}c$，则

$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{3}{16}c^2$，即 $\frac{a^2(c^2-a)^2}{c^2}=\frac{3}{16}c^2$，解得 $e=2$ 或 $e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，又 $0<a<b$，所以

$e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}>\sqrt{2}$，所以 $e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 不合题意.

15．　$f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当 $0\le x\le 1$ 时，$f(x)=x$，则

$f(7.5)$ 等于

A．0.5　　　B．-0.5　　　C．1.5　　　D．-1.5

【答案】B

【解析】$f(7.5)=f(5.5+2)=-f(5.5)=-[-f(3.5)]=f(3.5)=-f(1.5)=-[-f(-0.5)]$

$=-f(0.5)=-0.5$．

第Ⅱ卷（非选择题共 85 分）

注意事项：

1．第Ⅱ卷共 6 页，用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中．

2．答卷前将密封线内的项目填写清楚．

二．填空题：本大题共 4 小题；每小题 4 分，共 16 分．把答案填在题中横线上．

16．已知点 $(-2,3)$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点的距离是 5，则 $p=$________．

【答案】4

【解析】由已知得 $\sqrt{(\frac{p}{2}+2)^2+3^2}=5$，解得 $p=4$．

17．正六边形的中心和顶点共 7 个点，以其中 3 个点为顶点的三角形共有________个．（用数字作答）

【答案】32

【解析】从 7 个点中取 3 个点有 C_7^3 种取法，3 个点共线的有 3 种，三角形共有 $C_7^3-3=32$ 个．

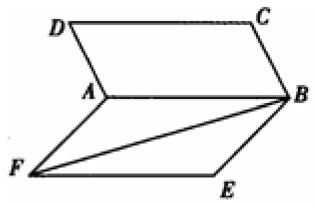
18．$\text{tg}20^\circ+\text{tg}40^\circ+\sqrt{3}\text{tg}20^\circ\text{tg}40^\circ$ 的值是________．

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】$\because \mathrm{tg}(20^\circ+40^\circ)=\dfrac{\mathrm{tg}20^\circ+\mathrm{tg}40^\circ}{1-\mathrm{tg}20^\circ\mathrm{tg}40^\circ}=\sqrt{3}$，$\therefore \mathrm{tg}20^\circ+\mathrm{tg}40^\circ=\sqrt{3}(1-\mathrm{tg}20^\circ\mathrm{tg}40^\circ)$，

$\mathrm{tg}20^\circ+\mathrm{tg}40^\circ+\sqrt{3}\mathrm{tg}20^\circ\mathrm{tg}40^\circ=\sqrt{3}$.

19．如图，正方形 $ABCD$ 所在平面与正方形 $ABEF$ 所在平面成 60° 的二面角，则异面直线 AD 与 BF 所成角的余弦值是________.



【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

【解析】由于 $AD//BC$，所以 $\angle CBF$ 即为异面直线 AD 与 BF 所成角，设正方形边长为 a，在 ΔCBF 中，$BF=\sqrt{2}a,BC=a,FC=\sqrt{FD^2+CD^2}=$

$\sqrt{AD^2+FA^2-2AD\cdot FA\cos 60^\circ+CD^2}=\sqrt{2}a$，

$\cos\angle CBF=\dfrac{BF^2+BC^2-FC^2}{2BF\cdot BC}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

三．解答题：本大题共 6 小题；共 69 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

20．（本小题满分 11 分）

解不等式 $\log_a(x+1-a)>1$.

【解】本小题考查对数函数性质，对数不等式的解法，分类讨论的方法和运算能力，满分 11 分．

（Ⅰ）$a>1$ 时，原不等式等价于不等式组：$\begin{cases}x+1-a>0,\\x+1-a>a.\end{cases}$ ——2 分

解得 $x>2a-1$. ——5 分

（Ⅱ）当 $0<a<1$ 时，原不等式等价于不等式组：$\begin{cases}x+1-a>0,\\x+1-a<a.\end{cases}$ ——7 分

解得 $a-1<x<2a-1$. 10 分

综上，当 $a>1$ 时，不等式的解集为 $\left\{x\middle|x>2a-1\right\}$；

当 $0<a<1$ 时，不等式的解集为 $\left\{x\middle|a-1<x<2a-1\right\}$. ——11 分

21．（本小题满分 12 分）

设等比数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n．若$S_3+S_6=2S_9$，求数列的公比q．

【解】本小题主要考查等比数列的基础知识，逻辑推理能力和运算能力．满分 12 分．

若$q=1$，则有$S_3=3a_1,S_6=6a_1,S_9=9a_1$．但$a_1\neq 0$，

即得$S_3+S_6\neq 2S_9$，与题设矛盾，故$q\neq 1$．——2 分

又依题意$S_3+S_6=2S_9$可得$\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\dfrac{2a_1(1-q^9)}{1-q}$．

整理得$q^3(2q^6-q^3-1)=0$．

由$q\neq 0$得方程$2q^6-q^3-1=0$．$(2q^3+1)(q^3-1)=0$，—— 9 分

$\because$ $q\neq 1,q^3\neq 1$，$\therefore 2q^3+1=0$，$\therefore q=-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$．——12 分

22．（本小题满分 11 分）

已知ΔABC的三个内角A,B,C满足：$A+C=2B,\dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos C}=-\dfrac{\sqrt{2}}{\cos B}$，求$\cos\dfrac{A-C}{2}$的值．

解法一：由题设条件知$B=60^\circ,A+C=120^\circ$．——2 分

$\because \dfrac{-\sqrt{2}}{\cos 60^\circ}=-2\sqrt{2}$，$\therefore \dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos C}=-2\sqrt{2}$．

将上式化为$\cos A+\cos C=-2\sqrt{2}\cos A\cos C$．

利用和差化积及积化和差公式，上式可化为

$2\cos\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A-C}{2}=-\sqrt{2}[\cos(A+C)+\cos(A-C)]$．——6 分

将$\cos\dfrac{A+C}{2}=\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2},\cos(A+C)=-\dfrac{1}{2}$代入上式得

$\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\cos(A-C)$.

将$\cos(A-C)=2\cos^2(\frac{A-C}{2})-1$代入上式并整理得

$4\sqrt{2}\cos^2(\frac{A-C}{2})+2\cos(\frac{A-C}{2})-3\sqrt{2}=0$ ——9 分

$(2\cos\frac{A-C}{2}-\sqrt{2})(2\sqrt{2}\cos\frac{A-C}{2}+3)=0$，

$\because 2\sqrt{2}\cos\frac{A-C}{2}+3\neq 0$，$\therefore 2\cos\frac{A-C}{2}-\sqrt{2}=0$.

从而得$\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ——12 分

解法二：由题设条件知$B=60^\circ, A+C=120^\circ$.

设$\alpha=\frac{A-C}{2}$，则$A-C=2\alpha$，可得$A=60^\circ+\alpha, C=60^\circ-\alpha$， ——3 分

所以$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=\frac{1}{\cos(60^\circ+\alpha)}+\frac{1}{\cos(60^\circ-\alpha)}$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}+\frac{1}{\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha}{\frac{1}{4}\cos^2\alpha-\frac{3}{4}\sin^2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\frac{3}{4}}.$$ ——7 分

依题设条件有$\frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\frac{3}{4}}=\frac{-\sqrt{2}}{\cos B}$，

$\because \cos B=\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\frac{3}{4}}=-2\sqrt{2}$.

整理得$4\sqrt{2}\cos^2\alpha+2\cos\alpha-3\sqrt{2}=0,$ ——9 分

$(2\cos\alpha-\sqrt{2})(2\sqrt{2}\cos\alpha+3)=0$，

$\because 2\sqrt{2}\cos\alpha+3\neq 0$，$\therefore 2\cos\alpha-\sqrt{2}=0$.

从而得$\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ——11 分

23．（本小题满分 12 分）

【注意：本题的要求是，参照标号①的写法，在标号②、③、④、⑤的横线上填写适当步骤，完成（Ⅰ）证明的全过程；并解答（Ⅱ），如图 2．】

如图 1，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=\dfrac{AA_1}{3}=a$，E,F 分别是 BB_1,CC_1 上的点，且 $BE=a,CF=2a$．

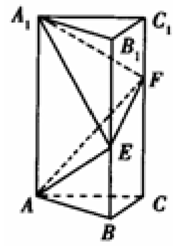


图 1

（Ⅰ）求证：面 $AEF\perp$ 面 ACF；

（Ⅱ）求三棱锥 A_1-AEF 的体积．

（Ⅰ）证明：　①$\because BE=a,CF=2a$，$BE//CF$，延长 FE 与 CB 延长线交于 D，连结 AD．

$\therefore \Delta DBE\sim\Delta DCF$，

$\therefore \dfrac{DB}{DC}=\dfrac{BE}{CF}$．

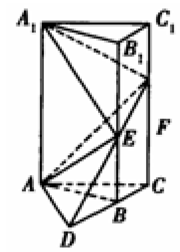


图 2

②____．

$\therefore DB=AB$．

③____．

$\therefore DA\perp AC$．

④____．

$\therefore FA\perp AD$．

⑤____．

$\therefore AEF\perp$ 面 ACF．

（Ⅱ）解：

【解】本小题考查空间线面关系，正三棱柱的性质，逻辑思维能力，空间想象能力及运算能力．满分 12 分．

（Ⅰ）②$\because BE:CF=1:2$，$\therefore DC=2DB$，$\therefore DB=BC$，　　——1 分

③$\because \Delta ABD$ 是等腰三角形，且 $\angle ABD=120^\circ$，

$\therefore \angle BAD=30^\circ$，$\therefore \angle CAD=90^\circ$，　　—— 3 分

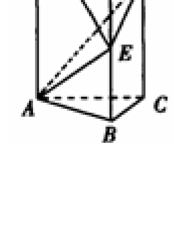
④$\because FC\perp$ 面 ACD，$\therefore CA$ 是 FA 在面 ACD 上的射影，

且 $CA\perp AD$，　　—— 5 分

⑤$\because FA\bigcap AC=A$，$DA\perp$ 面 ACF，$DA\subset$ 面 ADF，

$\therefore$面 $ADF\perp$ 面 ACF．　　7 分

（Ⅱ）$\because V_{A_1-AEF}=V_{E-AA_1F}$，



在面 $A_1B_1C_1$ 内作 $B_1G\perp A_1C_1$，垂足为 G．$B_1G=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$．

面 $A_1B_1C_1\perp$ 面 A_1C，$\therefore B_1G\perp$ 面 A_1C，

$\because E\in BB_1$，而 BB_1 // 面 A_1C，$\therefore$三棱柱 $E-AA_1F$ 的高为 $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$．——9 分

$S_{\Delta A_1FA}=\dfrac{1}{2}AA_1\cdot AC=\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2}$． ——10 分

$\therefore V_{A_1-AEF}=V_{E-AA_1F}=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$． ——12 分

24．（本小题满分 10 分）

某地现有耕地 10000 公顷，规划 10 年后粮食单产比现在增加 22%，人均粮食占有量比现在提高 10%．如果人口年增长率为 1%，那么耕地平均每年至多只能减少多少公顷（精确到 1 公顷）？（粮食单产=$\dfrac{\text{总产量}}{\text{耕地面积}}$，人均粮食占有量=$\dfrac{\text{总产量}}{\text{总人口数}}$）

【解】本小题主要考查运用数学知识和方法解决实际问题的能力，指数函数和二项式定理的应用，近似计算的方法和能力．满分 10 分．

设耕地平均每年至多只能减少 x 公顷，又设该地区现有人口为 P 人，粮食单产为 M 吨/公顷．

依题意得不等式 $\dfrac{M\times(1+22\%)\times(10^4-10x)}{P\times(1+1\%)^{10}}\geq\dfrac{M\times10^4}{P}\times(1+10\%)$． ——5 分

化简得 $x\leq10^3\times[1-\dfrac{1.1\times(1+0.01)^{10}}{1.22}]$． ——7 分

$\because 10^3\times[1-\dfrac{1.1\times(1+0.01)^{10}}{1.22}]=10^3\times[1-\dfrac{1.1}{1.22}\times(1+C_{10}^1\times0.01+C_{10}^2\times0.01^2+\cdots)]$

$\approx10^3\times[1-\dfrac{1.1}{1.22}\times1.1045]\approx4.1$． —— 9 分

$\therefore x\leq4$（公顷）．

答：按规划该地区耕地平均每年至多只能减少 4 公顷． ——10 分

25．（本小题满分 12 分）

已知 l_1,l_2 是过点 $P(-\sqrt{2},0)$ 的两条互相垂直的直线，且 l_1,l_2 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 各有两个交点，分别为 A_1,B_1 和 A_2,B_2．

（Ⅰ）求 l_1 的斜率 k_1 的取值范围；

（Ⅱ）若 A_1 恰是双曲线的一个顶点，求 $\left|A_2B_2\right|$ 的值．

【解】本小题主要考查直线与双曲线的性质，解析几何的基本思想，以及综合运用知识的能力．满分 12 分．

（Ⅰ）依题设，l_1,l_2 的斜率都存在，因为 l_1 过点 $P(-\sqrt{2},0)$ 且与双曲线有两个交点，故方程组 $\begin{cases} y=k_1(x+\sqrt{2})(k_1\neq 0), \\ y^2-x^2=1. \end{cases}$ ① ——1 分

有两个不同的解．

在方程组①中消去 y，整理得 $(k_1^2-1)x^2+2\sqrt{2}k_1^2x+2k_1^2-1=0$． ②

若 $k_1^2-1=0$，则方程组①只有一个解，即 l_1 与双曲线只有一个交点，与题设矛盾，故 $k_1^2-1\neq 0$，即 $\left|k_1\right|\neq 1$，方程②的判别式为

$\Delta_1=(2\sqrt{2}k_1^2)^2-4(k_1^2-1)(2k_1^2-1)=4(3k_1^2-1)$．

设 l_2 的斜率为 k_2，因为 l_2 过点 $P(-\sqrt{2},0)$ 且与双曲线有两个交点，故方程组

$\begin{cases} y=k_2(x+\sqrt{2})(k_2\neq 0), \\ y^2-x^2=1. \end{cases}$ ③

有两个不同的解．在方程组③中消去 y，整理得

$(k_2^2-1)x^2+2\sqrt{2}k_2^2x+2k_2^2-1=0$． ④

同理有 $k_2^2-1\neq 0,\Delta_2=4(3k_2^2-1)$．

又因为 $l_1\perp l_2$，所以有 $l_1\cdot l_2=-1$． ——4 分

于是，l_1,l_2 与双曲线各有两个交点，等价于 $\begin{cases} 3k_1^2-1>0, \\ 3k_2^2-1>0, \\ k_1\cdot k_2=-1, \\ \left|k_1\right|\neq 1. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{3}<\left|k_1\right|<\sqrt{3}, \\ \left|k_1\right|\neq 1. \end{cases}$ ——6 分

$\therefore k_1 \in (-\sqrt{3},-1)\cup(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3})\cup(\frac{\sqrt{3}}{3},1)\cup(1,\sqrt{3})$. ——7 分

（Ⅱ）双曲线 $y^2-x^2=1$ 的顶点为 $(0,1),(0,-1)$.

取 $A_1(0,1)$ 时，有 $k_1(0+\sqrt{2})=1$，

解得 $k_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 从而 $k_2=-\frac{1}{k_1}=-\sqrt{2}$. ——8 分

将 $k_2=-\sqrt{2}$ 代入方程④得 $x^2+4\sqrt{2}x+3=0$. ⑤

记 l_2 与双曲线的两交点为 $A_2(x_1,y_1),B_2(x_2,y_2)$，则

$\left|A_2B_2\right|^2=(x_1-x_2)^2+(y-y_2)^2=3(x_1-x_2)^2=3[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]$.

由⑤知 $x_1+x_2)=-4\sqrt{2},x_1x_2=3$.

$\therefore \left|A_2B_2\right|^2=60,\left|A_2B_2\right|=2\sqrt{15}$. ——11 分

当取 $A_1(0,-1)$ 时，由双曲线 $y^2-x^2=1$ 关于 x 轴的对称性，知 $\left|A_2B_2\right|=2\sqrt{15}$.

所以 l_1 过双曲线的一个顶点时，$\left|A_2B_2\right|=2\sqrt{15}$. ——12 分